بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض(جبر)

رابطهٔ بین حلپذیری یک گروه و تجزیه‌پذیری عناصرش

نگارش

کاظم قلی‌زاده

استاد راهنما

دکتر علی ایرانمنش

آبان ماه ۱۳۸۶

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **کاظم قلی‌زاده‌بقرآباد** رشته **ریاضی (محض)** تحت عنوان: «**رابطه بین حل‌پذیری یک گروه و تجزیه‌پذیری عناصرش**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تائید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	آقای دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	آقای دکتر سیدمحمد باقری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر علیرضا ذکائی	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی

دانشگاه تربیت‌مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاستهای پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱– حقوق مادی و معنوی پایان‌نامه‌ها/ رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعملهای مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲– انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی می‌باید به نام دانشگاه بوده و **استاد راهنما** نویسنده **مسئول مقاله** باشند.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشرمی‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳– انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ۴– ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵– این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸٤/٤/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم‌الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری خواهد بود.۱۳۸٤/٦/۱۳پ

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند

«کتاب حاضر حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/~~رسالهٔ دکتری~~ نگارنده در رشتهٔ ریاضی محض است که در سال ۱۳۸۶ در دانشکدهٔ علوم دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکارخانم /جناب آقای دکتر علی ایرانمنش، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر ———— و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴- درصورت عدم رعایت مادهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تادیه کند.

مادهٔ ۵- دانشجو تعهد و قبول می‌کند درصورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶- اینجانب کاظم آقایی راد دانشجوی رشته ریاضی مقطع ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

۱۳۸۷ / ۲ / ۵ نام و نام خانوادگی: کاظم آقایی راد

تاریخ و امضا:

۸۶/۸/۲۹

تقدیم به

بهترین واژگان حیات

پدر و مادرم

و

کسانی که دوستشان دارم

قدردانی

بدین‌وسیله مراتب سپاس و قدردانی خود را از استاد ارجمند، جناب آقای دکتر علی ایرانمنش که در تمام مراحل تدوین این پایان‌نامه و دوره کارشناسی ارشد همواره با راهنمایی‌های ارزشمندشان یاریگر من بودند، ابراز می‌دارم. همچنین مراتب سپاس و قدردانی خود را از اساتید ارجمند آقایان دکتر علیرضا ذکائی، دکتر سیداحمد موسوی و دکتر سیدمحمد باقری نیز به خاطر خواندن پایان‌نامه و نیز به دلیل حضور در جمع داوران ابراز می‌دارم. و در پایان از برادر عزیزم آقای ابراهیم قلیزاده و بقیه دوستانی که در این راه مشوق من بوده‌اند صمیمانه تشکر می‌نمایم.

چکیده

ردهبندی گروههای حلپذیر و تجزیهٔپذیری گروهها مسائلی مهم و مورد توجه در نظریهٔ گروهها هستند. در سال ۱۹۹٤ باری و وارد، با توسّل به نتیجه‌ای از تامپسون ثابت کردند که گروه متناهی G حلپذیر است اگر و فقط اگر $G=P_1\cdots P_m$ برای هر ترتیب دلخواه از p_i- سیلو زیرگروههای P_i، که در آن $p_1,\ldots,p_m$ همهٔ اعداد اول مجزای هستند که $|G|$ را عاد می کنند.

در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم در گروه متناهی G، برای هر عدد اول p که $|G|$ را عاد می‌کند یک عامل وجود دارد و مرتبهٔ این عامل p^α می باشد ($\alpha \geq 0$ عددی صحیح است) و هر عضو G قابل تجزیه به حاصلضرب عوامل فوق می باشد. عضو $g \in G$ را منحصراً تجزیه پذیر نامیم هرگاه دارای تجزیه‌ای یکتا به حاصلضرب عوامل دو به دو جابه جایی باشد. خواهیم دید وجود عضوهای منحصراً تجزیه‌پذیر با حلپذیری گروه رابطه دارد.

نشان داده می‌شود G حلپذیر است اگر و فقط اگر مجموعهٔ همهٔ عضوهای منحصراً تجزیه پذیر G، همان فیتینگ زیرگروه G باشد. همچنین شرطهای کافی مختلف برای عدم وجود عناصر منحصراً تجزیه‌پذیر در گروههای غیرحلپذیر ارائه خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: سیلو تجزیه‌پذیر، سیلو عاملهای استاندارد، سیلو دنبالهٔ کامل، سیلو ضرب کامل، دنبالهٔ هال کامل.

فهرست مطالب

فهرست علائم

گروه متناوب روی n حرف	A_n
گروه خودریختیهای میدان F	$Aut\,(F)$
ترانسپوزه ماتریس B	B^t
مشخصه میدان F	$char\ F$
دترمینال ماتریس A	$det\ A$
بعد فضای برداری V	$dim\ V$
گروه ضربی میدان F	$F^{\times}$
زیرگروه فیتینگ G	$Fit\,(G)$

مرتبهٔ گروه G	$\lvert G \rvert$
اندیس زیرگروه H در G	$\lvert G : H \rvert$
میدان گالوا با q عضو	$GF(q)$
گروه G روی مجموعهٔ Ω عمل می کند	$(G \backslash \Omega)$
پایدار ساز w تحت عمل گروه G	G_w
گرو خطی عام فضای برداری با بعد n روی میدان F	$GL_n(F)$
گرو خطی عام فضای برداری با بعد n روی میدان گالوای $GF(q)$	$GL_n(q)$
گروه یکانی عام فضای هرمیتی	$GU(V,f)$
H زیرگروه G	$H \leq G$
H زیرگروه سـره G	$H < G$
H زیرگروه ماکسیمال G	$H <\cdot G$
H زیرگروه نرمال G	$H \lhd G$
H زیرگروه زیر نرمال G	$H \lhd\lhd G$
H زیرگروه مشخص G	$H \operatorname{char} G$
گروه خطی عام تصویری در بعد n روی میدان F	$PGL_n(F)$
گروه خطی خاص تصویری در بعد n روی میدان F	$PSL_n(F)$
گروه خطی عام تصویری در بعد n روی میدان q عضوی	$PGL_n(q)$

گروه خطی خاص تصویری در بعد n روی میدان q عضوی	$PSL_n(q)$
گروه متقارن روی n حرف	S_n
گروه سوزوکی	$S_Z(q)$
گروه خطی خاص در بعد n روی میدان q عضوی	$SL_n(q)$
گروه یکانی خاص در بعد n روی میدان q عضوی	$SU_n(q)$
مجموعهٔ p-زیرگروههای سیلوی G	$Syl_p(G)$
عضو $g^{-1}xg$	x^g
فضای برداری روی میدان F	$V(F)$
فضای برداری با بعد n روی میدان گالوای $GF(q)$	$V_n(q)$
مجموعهٔ اعداد اول $\lvert G\rvert$	$\pi(G)$

مقدمه

مسئلهٔ تجزیه‌پذیری گروههای متناهی در نظریهٔ گروهها همیشه مورد توجه است. از جملهٔ مهمترین کارها، در ([٤]) D. F. Holt و P. Rowly نشان داده‌اند که همهٔ گروههای متناهی سیلو تجزیه‌پذیر نیستند. در ([٢])، M. J. J. Barry و M. B. Ward با توسّل به نتیجه‌ای از J. G. Thompson ([١٢]) نشان داده اند که یک گروه متناهی حلپذیر است اگر و فقط اگر گروه برابر با حاصلضرب سیلو زیرگروههای خود با هر ترتیب معین باشد. همچنین در ([٩])، G. Kaplan و D. Levy ثابت کرده اند که عضوهای منحصراً تجزیه‌پذیر وجود دارند اگر و فقط اگر گروه حلپذیر باشد. در ([٢])، سیلو تجزیه پذیری S_n به ازای $1 \leq n \leq 8$ ثابت شده است. ولی سیلو تجزیه‌پذیری S_n برای هر n طبیعی مسألهٔ‌ای باز است. در این پایان‌نامه با ارائهٔ

تعاریف سیلو تجزیه‌پذیری، سیلو عاملهای استاندارد، سیلو دنبالهٔ کامل، سـیلو ضـرب کامـل و دنبالهٔ هال کامل، نتیجه خواهیم گرفت که یک گروه متناهی حلپذیر است اگر و فقط اگر شـامل یک عضو منحصراً تجزیه‌پـذیر باشـد. وهمچنـین در گروههـای حلپـذیر $U(G) = Fit\ (G)$ ، وگروههای غیر حلپذیر بدون تجزیهٔ یکتا هستند. در واقع این پایان‌نامه تفصیل مقالهٔ زیر است.

G. Kaplan and D. Levy, Uniquely factorizable and Solvability of finite groups.

فصل اوّل

پیشنیازها

۱،۱ مقدمات و تعاریف

قرارداد . تمام گروههای مورد نظر در این پایان‌نامه متناهی‌اند .

تعریف۱ . ۱ . ۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. یک زنجیر متناهی از زیر گروههای G مانند $1=G_0 \leq \cdots \leq G_r =G$ را یک سری زیر نرمال برای G گوئیم هرگاه برای هر $1\leq i \leq r$ ، $G_{i-1} \lhd G_i$. عدد r را طول سری و گروههای خارج قسمتی $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ ($1\leq i \leq r$) را عوامل سری گوئیم .

تعریف۱ .۱ .۲. سری $1=G_0 \leq \cdots \leq G_r = G$ برای G را یک سری نرمال گوئیم هرگاه بـرای هر $1 \leq i \leq r$، G_i زیر گروه نرمالی از G باشد.

تعریف۱ .۱ .۳. سری نرمال $1=G_0 \leq \cdots \leq G_r = G$ را یک سری مرکزی گوئیم هرگاه بـرای هر $1 \leq i \leq r$، داشته باشیم $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}})$.

تعریف۱ .۱ .٤. گروه G را پوچتوان گوئیم هرگاه دارای یک سری مرکزی باشد.

تعریف۱ .۱ .٥. گروه G را حلپذیر گوئیم هرگاه دارای یک سری زیر نرمال با عوامـل آبلـی باشد.

تعریف۱ .۱ .٦. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه تولید شده توسط همهٔ زیرگروههای نرمال و پوچتوان G را زیرگروه فیتینگ G نامیده و با $Fit(G)$ نشان می‌دهیم.

برهان قضایای ۱ .۱ .۷ و ۱ .۱ .۸ در بیشتر کتابهای کلاسیک نظریهٔ گروهها آمده است لذا از آوردن برهان صرفنظر شده است.

قضیه۱ .۱ .۷. اگر G گروهی حلپذیر باشد آنگاه $Fit(G) \neq 1$.

قضیه ۱.۱.۸. اگر G گروهی حلپذیر و N زیرگروه نرمال G باشد آنگاه

$$\frac{Fit(G)}{N} \leq Fit(\frac{G}{N}).$$

۲.۱ عمل گروهها بر مجموعه‌ها

تعریف۱ .۲ .۱. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای غیر خالی باشد. و فرض کنیم برای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x \bullet g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد بطوریکه

(i) به ازای هر x از X، $x \bullet 1 = x$.

(ii) به ازای هر g_1 و g_2 از G و هر x از X، $x \bullet (g_1 g_2) = (x \bullet g_1) \bullet g_2$.

در این صورت گوئیم G بر X عمل می کند و $\bullet$ را عمل G بر X نامیم. برای سهولت در نوشتن، به جای $x \bullet g$ معمولاً خواهیم نوشت xg یا (x^g) و عمل فوق را با $(G|X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف۱ .۲ .۲. فرض کنیم Ω یک مجموعه و G یک گروه بوده و G روی Ω عمل کند. در این صورت زیر مجموعهٔ Δ از Ω یک بلوک نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $g \in G$ داشته باشیم $\Delta^g = \Delta$ یا $\Delta^g \cap \Delta = \varnothing$.

تعریف۱ .۲ .۳. فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ X عمل کند. رابطه هم ارزی $\sim$ را در X چنین تعریف می‌کنیم: گوئیم $x_1 \sim x_2$ هرگاه به ازای عضوی از G مانند g، $x_1 g = x_2$. هر ردهٔ

هم ارزی را یک مدار عمل، یا گاهی از اوقات یک G–مدار می‌نامیم. اگر $x \in X$ آنگاه ردهٔ هم ارزی شامل x را مدار x در G می‌نامیم و آن را با علامت $orb_G(x)$ نشان می‌دهیم. هر مدار یک بلوک نیز می‌باشد.

تعریف۱ .۲ .٤. فرض کنیم گروه G برمجموعهٔ غیر تهی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت مجموعهٔ $\{g \in G \mid xg = x\}$ را پایدار ساز x در G می‌نامیم و با G_x نمایش می‌دهیم.

تعریف۱ .۲ .۵. فرض کنیم گروه G بر مجموعهٔ X عمل کند. عمل را متعدی(انتقالی) گوئیم هرگاه X تنها مدار عمل باشد. به عبارت دیگر به ازای هر دو عضو X مانند x_1 و x_2 ، عضوی از G مانند g موجود باشد بطوریکه $x_1g = x_2$.

تعریف۱ .۲ .٦. فرض کنیم $(G|X)$ و $k \in \mathbb{N}$ که $|X| > k$. در این صورت گوئیم G روی X ، k–انتقالی عمل می کند هرگاه به ازاء هر دو k–گانه $(x_1,\dots,x_k) \in X^K$ و $(y_1,\dots,y_k) \in X^k$،که در آنها به ازای هر $1 \le i,j \le k$ و $i \neq j$، $x_i \neq x_j$ و $y_i \neq y_j$ ، عنصر $g \in G$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $1 \le i \le k$، $y_i = x_i^g$.

تعریف۱ .۲ .۷. فرض کنیم $(G|X)$ انتقالی باشد. گوئیم G روی X منظم عمل می‌کند هرگاه