بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه آمار

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته آمار ریاضی

عنوان :

ترتیب تصادفی میان مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

استاد راهنما:
دکتر بهاءالدین خالدی

نگارش:
مونا شیری

دی ماه ۹۱

دانشکده علوم پایه
گروه آمار

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته آمار ریاضی

نام دانشجو:
مونا شیری

تحت عنوان :

ترتیب تصادفی میان مجموع متغیرهای تصادفی مستقل

در تاریخ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر بهاءالدین خالدی	با مرتبه‌ی علمی استاد	امضاء:
استاد داور دکتر عبدالرضا سیاره	با مرتبه‌ی علمی دانشیار	امضاء:
استاد داور دکتر مهرداد نیاپرست	با مرتبه‌ی علمی استادیار	امضاء:

... به نام خداوند اندیشه و قلم ...

اکنون که با لطف و یاری پروردگار انجام این پایان نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می دانم از کلیه عزیزانی که در این راه مرا یاری نموده اند قدردانی نمایم. سپاس و قدردانی ام را به استاد فرزانه و بزرگوارم جناب آقای دکتر بهاء الدین خالدی تقدیم می دارم که در کنار ایشان همواره دریچه های تازه ای از دانایی برایم گشوده می شود. از اساتید گرانقدرم جناب آقای دکتر سیاره و جناب آقای دکتر نیاپرست که بزرگوارانه زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شده اند، کمال تشکر را دارم. همچنین از پدر و مادر فداکارم که در کلیه مراحل تحصیل مشوق من بودند و با نور شمع وجودشان، روشنی بخش راهم گردیدند، خالصانه سپاسگذارم.

در پایان از تمامی اساتید گروه آمار دانشگاه رازی کرمانشاه که آموزش هایشان در طول دوره ی کارشناسی ارشد مرا برای نوشتن این پایان نامه آماده کرده است، قدردانی می نمایم.

مونا شیری

کرمانشاه - دی ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیز

و خواهر مهربانم

چکیده

در این پایان نامه، توابع مهم در قابلیت اعتماد و مفاهیم ترتیب های تصادفی معرفی شده است. سپس براساس این تعاریف و مفاهیم خاصیت ترتیب کاهشی مجموع های جزئی متغیرهای تصادفی مستقل وقتی متغیرهای تصادفی مستقل نسبت به ترتیب نسبت درستنمایی مرتب شده اند، مطالعه شده است. بررسی ترتیب تصادفی میان مجموع های جزئی با مقایسه ی توابع پارامتری آنها از مطالعات دیگر این پایان نامه است. مقایسه ی تصادفی مجموع متغیرهای تصادفی مستقل با استفاده از ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر، ترتیب نسبت درستنمایی و ترتیب میانگین مانده ی عمر بررسی شده و کاربرد ترتیب نسبت درستنمایی میان مجموع متغیرهای تصادفی در آماره های ترتیبی سانسوریده مطالعه شده است. در پایان ترتیب های تصادفی میان مانده های مجموع در مسائل تک نمونه ای و دو نمونه ای متغیرهای تصادفی بررسی و کاربرد نتایج آنها در تئوری قابلیت اعتماد، بیمه و صف بندی بیان شده است.

کلمات کلیدی:

ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر، ترتیب نسبت درستنمایی، ترتیب میانگین مانده ی عمر، لگ-کاو، مانده ی عمر، مانده های مجموع، نرخ شکست افزایشی(IFR)، TP_2.

فهرست مطالب

فهرست مطالب آ

۱ تعاریف و مفاهیم اولیه ۱

۱.۱ مقدمه ۲

۲.۱ توابع مهم در قابلیت اعتماد ۲

۱.۲.۱ مانده ی طول عمر و تابع میانگین مانده ی عمر ۲

۲.۲.۱ توابع خطر و نرخ خطر ۴

۳.۱ ترتیب های تصادفی ۵

۱.۳.۱ ترتیب تصادفی معمولی ۶

۲.۳.۱ ترتیب نرخ خطر ۱۰

۳.۳.۱ ترتیب نسبت درستنمایی ۱۳

۴.۳.۱ ترتیب میانگین مانده ی عمر ۱۷

۴.۱ ترتیب های تصادفی چند متغیره ۱۸

۵.۱ برخی خصوصیات مهم برای توزیع ها در نظریه ی قابلیت اعتماد ۲۰

۱.۵.۱ توزیع هایی با میانگین مانده ی عمر یکنوا ۲۰

۲.۵.۱ توزیع هایی با تابع نرخ خطر یکنوا ۲۱

۳.۵.۱ خانواده چگالی های لگ-کاو و لگ-کوژ ۲۲

۶.۱ برخی خصوصیات متغیر تصادفی مانده ی عمر ۲۳

۱.۶.۱ توزیع مجموع متغیرهای تصادفی ۲۷

۲ ترتیب تصادفی میان مجموع جزئی متغیرهای تصادفی مستقل ۲۹

۱.۲ مقدمه ۳۰

۲.۲ ترتیب تصادفی معمولی میان مجموع های جزئی ۳۰

۳.۲ ترتیب تصادفی معمولی میان بردارهای n بعدی با مقایسه ی تابع های پارامتری آنها ۳۵

۴.۲ ترتیب تصادفی معمولی فرآیندهای تصادفی ۴۲

۵.۲ کاربردها ۴۴

۱.۵.۲ قابلیت اعتماد ۴۴

۲.۵.۲ صف بندی ۴۴
۳.۵.۲ ترتیب تصادفی میان هزینه های نگهداری ۴۵
۴.۵.۲ مسائل عبور اول ۴۵

۳ ترتیب تصادفی میان مجموع متغیرهای تصادفی مستقل **٤٦**
۱.۳ مقدمه ۴۷
۲.۳ برخی خواص مجموع متغیرهای تصادفی مستقل ۴۷
۳.۳ ترتیب تصادفی میان مجموع متغیرهای تصادفی ۴۸
۱.۳.۳ ترتیب تصادفی معمولی میان مجموع متغیرهای تصادفی ۴۸
۲.۳.۳ ترتیب نرخ خطر میان مجموع متغیرهای تصادفی ۵۰
۳.۳.۳ ترتیب نسبت درستنمایی میان مجموع متغیرهای تصادفی ۵۵
۴.۳.۳ ترتیب میانگین مانده ی عمر میان مجموع متغیرهای تصادفی ۵۹
۴.۳ کاربرد ترتیب نسبت درستنمایی میان مجموع متغیرهای تصادفی در آماره های ترتیبی سانسوریده نوع دوم (II) ۶۱
۱.۴.۳ انواع سانسور و کاربردهای آن ۶۲
۲.۴.۳ طرح عمومی سانسور فزاینده ی نوع (II) ۶۳
۳.۴.۳ ترتیب نسبت درستنمایی میان آماره های ترتیبی سانسوریده فزاینده ی نوع دوم (II) . ۶۵

٤ ترتیب تصادفی میان مانده های مجموع متغیرهای تصادفی **۷۱**
۱.۴ مقدمه ۷۲
۲.۴ ترتیب تصادفی میان مانده های مجموع در مسائل دو نمونه ای ۷۴
۳.۴ ترتیب تصادفی معمولی میان مانده های مجموع در مسائل تک نمونه ای ۸۳
۱.۳.۴ ترتیب تصادفی معمولی میان مانده های مجموع در حالت چند متغیره ۸۵
۴.۴ ترتیب نسبت درستنمایی میان مانده های مجموع در مسائل تک نمونه ای ۸۶
۱.۴.۴ ترتیب نسبت درستنمایی میان مانده های مجموع در حالت چند متغیره ۸۸
۵.۴ کاربردها ۹۰
۱.۵.۴ تئوری قابلیت اعتماد ۹۰
۲.۵.۴ تئوری صف بندی ۹۰

کتاب‌نامه **۹۲**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۹۵**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۹۷**

پیشگفتار

مجموع متغیرهای تصادفی یکی از مهمترین آماره هایی است که در بسیاری از شاخه های آمار و احتمال کاربرد فراوان دارد. به دلیل اهمیت این آماره در مسائل اجتماعی، اقتصادی، صنعتی و غیره در این پایان نامه به مطالعه ی خواص و مقایسه تصادفی آنها با استفاده از ترتیب های تصادفی پرداخته شده است. براین اساس، توابع مهم در تئوری قابلیت اعتماد و طول عمر، همچنین ترتیب های تصادفی مورد نیاز و روابط میان آنها در فصل اول معرفی شده است. در فصل دوم مجموع جزئی متغیرهای تصادفی و خاصیت ترتیب کاهشی مجموع های جزئی متغیرهای تصادفی مستقل وقتی متغیرهای تصادفی مستقل نسبت به ترتیب نسبت درستنمایی مرتب شده اند، بررسی شده است. همچنین نشان داده شده است که اگر خانواده تابع های چگالی دارای خاصیت نیمه گروهی باشد، آنگاه ترتیب تصادفی معمولی میان بردار مجموع های جزئی با مقایسه توابع پارامتری آنها برقرار خواهد شد. با استدلال مشابه ترتیب تصادفی معمولی میان فرآیندهای تصادفی از طریق مقایسه توابع پارامتری آنها مطالعه شده و در پایان چند مثال کاربردی از نتایج بدست آمده بیان شده است. فصل سوم، اختصاص به بررسی خواص مجموع متغیرهای تصادفی و همچنین ترتیب های تصادفی مختلف از جمله ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر و ترتیب نسبت درستنمایی میان مجموع متغیرهای تصادفی دارد. در ادامه کاربرد ترتیب نسبت درستنمایی میان مجموع متغیرهای تصادفی، در اثبات قضیه ای مهم در مبحث آماره های ترتیبی سانسوریده فزاینده نوع دوم بیان شده است. بررسی خواص تصادفی مانده های مجموع در فصل چهارم ارائه شده است. بدین منظور، ابتدا کاربرد این متغیرهای تصادفی در تئوری قابلیت اعتماد و تئوری بیمه عنوان شده است. سپس ترتیب های تصادفی مختلف میان مانده های مجموع در مسائل تک نمونه ای و مسائل دو نمونه ای مطالعه و با استفاده از آنها کران های محاسبه پذیر برای تابع بقا و مقادیر مورد انتظار مانده های مجموع بدست آورده شده است. در پایان کاربرد این قضایا در تئوری قابلیت اعتماد و تئوری صف بندی با استفاده از چند مثال بیان شده است.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$X_{1:n}, X_{2:n}, \cdots, X_{n:n}$	آماره های مرتب
$P(.)$	اندازه احتمال
$E(.)$	امید ریاضی
$\overset{d}{=}$	برابری در توزیع (هم توزیعی)
$\mid$	به شرط اینکه
iid	به طور مستقل و مشابه توزیع شده
∞	بی نهایت
$\bar{F}$	تابع بقا توزیع F
F	تابع توزیع
f	تابع چگالی احتمال
$\Gamma(.)$	تابع گاما
F^{-1}	تابع معکوس تابع توزیع F
$I_A(.)$	تابع نشانگر مجموعه A
$Bin(n, p)$	توزیع دوجمله ای با تعداد n آزمایش و احتمال پیروزی p
$\sim$	توزیع شدن
$X \mid A$	توزیع شرطی X به شرط رخداد واقعه A
$Gamma(\alpha, \beta)$	توزیع گاما با پارامترهای α و β
$U(0,1)$	توزیع یکنواخت استاندارد $(0,1)$
$\in$	عضویت مجموعه ای
Sup	عملگر مجموعه ای سوپریمم
Max	عملگر مجموعه ای ماکزیمم
Min	عملگر مجموعه ای می نیمم
$\preceq_{st}$	کوچکتری در ترتیب تصادفی معمولی
$\preceq_{mrl}$	کوچکتری در ترتیب میانگین مانده عمر
$\preceq_{hr}$	کوچکتری در ترتیب نرخ خطر
$\preceq_{lr}$	کوچکتری در ترتیب نسبت درستنمایی
$\sum_{i=1}^{n} X_i$	مجموع نمونه تصادفی به اندازه ی n

$\Re$ مجموعه اعداد حقیقی

l_X نقطه انتهایی چپ تکیه گاه X

u_X نقطه انتهایی راست تکیه گاه X

$X_۱, X_۲, \cdots, X_n$ نمونه تصادفی به اندازه ی n

$\wedge$ "و" منطقی

$\vee$ "یا" منطقی

ج

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در این پایان نامه را بررسی می کنیم. در بخش ۲.۱ برخی از توابع مهم در تئوری قابلیت اعتماد و طول عمر را بیان می کنیم. ترتیب های تصادفی مورد نیاز و روابط میان آن ها را در بخش ۳.۱ معرفی خواهیم کرد. در بخش ۴.۱ ترتیب های تصادفی چند متغیره را بیان می کنیم. در ادامه برخی خصوصیات مهم برای توزیع ها در نظریه ی قابلیت اعتماد و همچنین تعاریف و قضایایی که در طول پایان نامه مورد استفاده است را مطالعه می کنیم. در آخر تابع توزیع و چگالی مجموع متغیرهای تصادفی را که از مطالعات اصلی این پایان نامه است، بیان می نماییم.

۲.۱ توابع مهم در قابلیت اعتماد

توابعی از قبیل تابع مولد گشتاور، تابع بقا، تبدیل لاپلاس، توابع نرخ خطر و نرخ خطر معکوس و تابع میانگین مانده ی عمر، از جمله توابع مهمی هستند که بسیاری از خصوصیات متغیرهای تصادفی را به خصوص زمانی که نشان دهنده ی طول عمر یک وسیله باشند، بیان می کنند. بنابراین برای شناخت بیشتر خصوصیات توزیع ها، بررسی این توابع که هر کدام توصیف کننده ی خصوصیتی از توزیع هاست، بسیار مفید خواهد بود. ابتدا تابع میانگین مانده ی طول عمر که نقش اساسی در نظریه قابلیت اعتماد دارد را معرفی می کنیم.

۱.۲.۱ مانده ی طول عمر و تابع میانگین مانده ی عمر

متغیر تصادفی X با تابع توزیع F و تابع چگالی f را در نظر بگیرید. فرض کنید این متغیر توصیف کننده ی طول عمر یک وسیله باشد، در این صورت احتمال این که این وسیله بیشتر از زمان t عمر کند برابر است با

$$\bar{F}_X(t) = P(X > t) = ۱ - F_X(t).$$

$\bar{F}_X(t)$ به تابع قابلیت اعتماد (یا همان تابع بقا) متغیر تصادفی X معروف است. حال فرض کنید که بدانیم این وسیله تا زمان t عمر کرده باشد(یعنی بدانیم طول عمر وسیله بزرگتر از t است) در این صورت متغیر تصادفی

$$X_t = [X - t \mid X > t]$$

را متغیر تصادفی مانده ی عمر وسیله در زمان t می نامیم. رفتار متغیر تصادفی X_t نسبت به t در قابلیت اعتماد از اهمیت خاصی برخوردار است.

تابع چگالی این متغیر تصادفی به ازای هر $x \geq 0$ به صورت

$$f_t(x) = \frac{f(x+t)}{\bar{F}(t)}$$

است. تابع توزیع مانده ی عمر بعد از زمان t را با F_t نشان می دهیم که به ازای هر $x \geq 0$ برابر است با:

$$\begin{aligned} F_t(x) &= P(X_t \leq x) \\ &= P(X - t \leq x \mid X > t) \\ &= P(X \leq x + t \mid X > t) \\ &= \frac{P(t < X \leq x+t)}{\bar{F}(t)} \\ &= \frac{\bar{F}(t) - \bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}. \end{aligned}$$

با توجه به تعاریف بالا تابع بقا مانده ی عمر بعد از زمان t به صورت زیر به دست می آید:

$$\forall x \geq 0; \qquad \begin{aligned} \bar{F}_t(x) &= 1 - P(X_t \leq x) \\ &= \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}. \end{aligned}$$

در عمل این توزیع به دلیل بررسی مانده ی عمر مؤلفه های کهنه (مثلاً یک ماشین کهنه) دارای اهمیت فراوانی است. حال با در نظر گرفتن مفهوم مانده ی طول عمر، تابع میانگین مانده ی عمر را معرفی می کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. تابع میانگین مانده ی عمر[1]

مقدار میانگین متغیر تصادفی X_t را تابع میانگین مانده ی عمر می گوییم. این تابع را که به زمان t بستگی دارد با $\psi_F(t)$ نشان می دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} \psi_F(t) &= E(X_t) \\ &= \int_0^\infty \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} dx \\ &= \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(t)}. \end{aligned}$$

[1] mrl

میانگین مانده ی عمر معیار مناسبی برای استنباط راجع به مانده ی عمر است. اگر به ازای هر $t \leq t'$، داشته باشیم

$$E(X_t) \leq (\geq) E(X_{t'})$$

نشان می دهد با گذشت زمان طول عمر وسیله افزایش (کاهش) می یابد. به عبارت دیگر به ازای هر $x \geq 0$،

$$\frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$$

نسبت به t افزایشی (کاهشی) است.

۲.۲.۱ توابع خطر و نرخ خطر

متغیر تصادفی X با تابع توزیع F را در نظر بگیرید. تابع خطر (تابع خطر کل) توزیع F به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(x) = -\ Ln(\bar{F}(x)).$$

با استفاده از رابطه ی بالا می توان تابع بقای متغیر تصادفی X را از روی تابع خطر آن محاسبه کرد:

$$\bar{F}(x) = exp(-R(x)).$$

در صورتی که توزیع X پیوسته و دارای تابع چگالی f باشد، می توان تابع نرخ خطر متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} r_F(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{P(x < X \leq t + x \mid X > x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{F(t+x) - F(x)}{t} \frac{1}{\bar{F}(x)} \\ &= \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}. \end{aligned}$$

بنابراین برای t های کوچک

$$P(x < X \leq t + x \mid X > x) \simeq r_F(x)t$$

است. یعنی $r_F(x)t$ تقریباً برابر احتمال این پیشامد است که مؤلفه ای با توزیع F در فاصله زمانی $[x, x+t)$ از کار افتاده باشد، به شرط این که بدانیم این مؤلفه تا زمان x مشغول به کار بوده است. به وضوح هر چه مقدار نرخ خطر بزرگتر باشد می توان نتیجه گرفت که مانده ی طول عمر آن مؤلفه به طور تصادفی کوچکتر است. این تفسیر از تابع نرخ خطر برای طول عمر یک مؤلفه، گویای اهمیت این تابع در مباحث قابلیت اعتماد است.

در این صورت

$$r_F(x) = \frac{d}{dx}R(x)$$

و

$$\bar{F}(x) = exp(-\int_{\circ}^{x} r(t)dt).$$

برای آشنایی بیشتر با توابع خطر و نرخ خطر به مارشال [۲] و الکین [۳] (۲۰۰۷) مراجعه نمایید.

۳.۱ ترتیب های تصادفی

خصوصیات توزیع های متغیرهای تصادفی مانند شاخص های مرکزی، پراکندگی، چولگی و غیره از گذشته های دور برای اهداف توصیفی توزیع ها به کار گرفته شده است. به عنوان مثال انحراف معیار، شاخصی برای اندازه گیری پراکندگی توزیع ها است، بنابراین می توان برای مقایسه ی پراکندگی دو توزیع، انحراف معیار دو توزیع را مقایسه کرد. روش دیگر این است که متغیرهای تصادفی را به صورت احتمالی مقایسه کنیم. رفتار تصادفی متغیرهای تصادفی معمولاً به وسیله ی توابع چگالی، توزیع، بقا، مولد گشتاور، تبدیل لاپلاس، نرخ خطر ، نرخ خطر معکوس و غیره توصیف می شود. بنابراین برای مقایسه ی متغیرهای تصادفی می توانیم هر یک از توابع مذکور از متغیرهای تصادفی را با هم مقایسه کنیم. این روش از مقایسه ی متغیرهای تصادفی، به ترتیب تصادفی میان متغیرهای تصادفی یا به طور معادل میان توزیع ها معروف است.
پدیده های تصادفی در طبیعت معمولاً پیچیده اند. مدل سازی آنها وتعیین کران ها و تقریب ها برای مشخصه های مورد توجه و مهم آن مدل ها از نقطه نظر کاربردی با اهمیت و مفید است. به عبارت دیگر تقریبی از یک مدل تصادفی با استفاده از یک مدل ساده تر و یا با استفاده از یک مدل که از مؤلفه های ساده تشکیل شده است، می تواند کران ها وتقریب های مناسبی از برخی مشخصه های خاص و مطلوب مدل مورد مطالعه به دست دهد. ترتیب های تصادفی نقش مهمی را در

[۲] Marshal

[۳] Olkin

کران سازی و تقریب مناسب در برخی مشخصه های طول عمر دارد. با اثبات وجود ترتیب تصادفی خاص میان مدل های ساده و مدل مورد مطالعه، می توان کران یا تقریب مناسبی برای مشخصه هایی مانند تابع میانگین مانده ی عمر ، تابع نرخ خطر و غیره از طول عمر وسیله مورد نظر به دست آورد.

ایده ی ترتیب های تصادفی و همچنین مفهوم مرتب کردن توزیع ها، توسط لهمن [۴] در سال ۱۹۵۵ در ساده ترین نوع آن مطرح شد و تاکنون چندین نوع دیگر از ترتیب های تصادفی برای مقایسه ی توزیع های احتمال تعریف شده و مورد استفاده قرار می گیرد. برای مطالعه بیشتر در مورد ترتیب های تصادفی می توان به شیکد [۵] وشانتیکومار [۶] (۱۹۹۴و۲۰۰۷) ، سکلی [۷] (۱۹۹۵)، مولر [۸] واستویان [۹] (۲۰۰۲) ، مارشال و الکین (۲۰۰۷) مراجعه کرد.

۱.۳.۱ ترتیب تصادفی معمولی

تعریف ۱.۳.۱. متغیر تصادفی X و Y به ترتیب با توابع توزیع F وG را در نظر بگیرید. گوییم متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی معمولی از متغیر تصادفی Y کوچکتر است ($X \preceq_{st} Y$) اگر وتنها اگر داشته باشیم :

$$\forall t \in \Re\,; \qquad \bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)$$

که در آن $\bar{F}$ و $\bar{G}$ به ترتیب توابع بقای متغیرهای تصادفی X وY هستند.

با توجه به تعریف بالا اگر $X \preceq_{st} Y$ باشد، نتیجه می شود که متغیر تصادفی Y مقادیر بزرگتر را با احتمال بیشتری نسبت به متغیر تصادفی X می پذیرد.

قضیه ۲.۳.۱. متغیر تصادفی X وY به ترتیب با توابع توزیع F وG را در نظر بگیرید. در این صورت $X \preceq_{st} Y$ است اگر وتنها اگر به ازای تمام مقادیر $۰ \leq p \leq ۱$ داشته باشیم:

$$F^{-1}(p) \leq G^{-1}(p)$$

که در آن $F^{-1}(p) = inf\{x : F(x) \geq p\}$ و $G^{-1}(p) = inf\{x : G(x) \geq p\}$ است.

[۴] Lehmann

[۵] Shaked

[۶] Shanthikumar

[۷] Szekli

[۸] Müller

[۹] Stoyan

با توجه به قضیه بالا می توان به یکی از کاربردهای ترتیب های تصادفی پی برد. زیرا در مقایسه دو جامعه، ممکن است جامعه ی اول در معیار میانه بهتر از جامعه دوم باشد اما در معیار دیگر به طور مثال چارک اول، جامعه ی دوم بهتر باشد. بنابراین در معیارهای مختلف نتیجه گیری های مختلفی بدست می آید. اما اگر داشته باشیم $X \preceq_{st} Y$ بنابر قضیه بالا تمام چارک های توزیع Y از تمام چارک های توزیع X بزرگتر است.

همچنین ممکن است معیار مورد نظر برای مقایسه دو جامعه وجود نداشته باشد. مثلاً توزیع کوشی دارای میانگین نیست، بنابراین برای مقایسه دو جامعه که دارای توزیع کوشی هستند از ترتیب های تصادفی استفاده می کنیم.

قضیه ۳.۳.۱. اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، $X \preceq_{st} Y$ است اگر وتنها اگر دو متغیر تصادفی $\widehat{X}$ و $\widehat{Y}$ که روی فضای احتمالی یکسان تعریف شده اند وجود داشته باشند، به طوری که

$$\widehat{X} =_{st} X \tag{۱.۱}$$

$$\widehat{Y} =_{st} Y \tag{۲.۱}$$

و

$$P\{\widehat{X} \leq \widehat{Y}\} = ۱. \tag{۳.۱}$$

که برای دو متغیر تصادفی S و T، $S =_{st} T$ به این معناست که S و T توزیع یکسان دارند.

اثبات. به وضوح روابط (۱.۱) ، (۲.۱) و (۳.۱) ، $X \preceq_{st} Y$ را نتیجه می دهد. برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید F و G به ترتیب تابع های توزیع X و Y باشند و $F^{-۱}$ و $G^{-۱}$ را معکوس های از راست پیوسته (که در قضیه قبل تعریف شده است)در نظر بگیرید. تعریف کنید $\widehat{X} = F^{-۱}(U)$ و $\widehat{Y} = G^{-۱}(U)$ که U یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی $[۰,۱]$ باشد. $\widehat{X}$ و $\widehat{Y}$ به ترتیب دارای تابع توزیع های F و G هستند. چون $X \preceq_{st} Y$ است بنابراین $F \geq G$ و در نتیجه $F^{-۱}(U) \leq G^{-۱}(U)$ است. بنابراین $\widehat{X} \leq \widehat{Y}$ است و اثبات کامل می شود. ■

قضیه ۴.۳.۱. گزاره های زیر معادل هستند:

الف) $X \preceq_{st} Y$ ،