بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم آمنه وفایی‌نژاد رشته ریاضی‌محض به شماره دانشجویی ۹۰۵۲۰۵۱۰۳۱ تحت عنوان: «گراف‌های هم- بیشین وابسته به حلقه‌ها» را در تاریخ ۱۳۹۲/۴/۱۰ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیداحمد موسوی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر علی رجایی	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر محمدجواد نیک‌مهر	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر علی رجایی	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده 1: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده 2: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال 1392در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر سید احمد موسوی از آن دفاع شده است.»

ماده 3: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده 4: در صورت عدم رعایت ماده 3، 50٪ بهای شمارگان چاپ شده رابه عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده 5: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواندخسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده 4 را از محل توقیف کتابهای عرضه شده‌نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده 6: اینجانب آمنه وفایی‌نژاد دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: آمنه وفایی‌نژاد

تاریخ و امضا: 92/4/18

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی که با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱- حقوق مادی و معنوی پایان نامه‌ها / رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و استاد راهنما مسئول مکاتبات مقاله باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه های مصوب انجام می‌شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸۴/۴/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل، از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری می شود.

نام و نام خانوادگی آمنه وفای‌نژاد

امضاء

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده‌ی علوم ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد
گروه ریاضی محض

گراف‌های هم‌بیشین وابسته به حلقه‌ها

نگارنده:
آمنه وفایی‌نژاد

استاد راهنما:
دکتر سیداحمد موسوی

تیر ماه ۱۳۹۲

تقدیم

به ساحت مقدس سید و سالار شهیدان آقا اباعبدالله الحسین (ع) و علمدار کربلا آقا ابالفضل العباس (ع)

و

پدر و مادر عزیز و فداکار،

و

خانواده مهربانم،

اگر شایسته تقدیم باشد.

پروردگارا

همواره به خاطر تمام نعمتهایی که به من عنایت فرمودی سپاسگذارم و از درگاه بلندمرتبه ات خواستارم که یکی از بهترین بندگان خوبت واقع شوم.

وظیفه خود می دانم از استاد راهنمای محترمم جناب آقای دکتر سید احمد موسوی، داوران داخلی گرامیم جناب آقای دکتر علی رجایی و جناب آقای دکتر عباس حیدری، داور خارجی مهربانم جناب آقای دکتر سید محمد جواد نیکمهر قدردانی و تشکر نمایم. همچنین از زحمات بی دریغ خانواده عزیزم بخصوص پدر و مادر دلسوز و فداکارم کمال سپاسگذاری را دارم.

چکیده

فرض کنیم R حلقه‌ی جابجایی با عنصر همانی و $\Gamma(R)$ گرافی باشد که اعضای حلقه‌ی R به‌عنوان مجموعه‌ی رئوس گراف هستند و دو رأس متمایز a و b مجاورند اگروتنهااگر $Ra + Rb = R$. در این پایان‌نامه یک زیرگراف $\Gamma_2(R)$ از گراف $\Gamma(R)$ را در نظر می‌گیریم که شامل عناصر غیریکه است. همبندی و قطر این گراف را مطالعه کرده و به‌طور کامل قطر گراف $\Gamma_2(R) \setminus J(R)$ را دسته‌بندی می‌کنیم. به‌علاوه نشان می‌دهیم که برای دو حلقه‌ی نیم‌موضعی متناهی R و S اگر حلقه‌ی R کاهشی باشد در این صورت $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ اگروتنهااگر $R \cong S$. در ادامه یک گراف $\Gamma_+(R)$ را به حلقه‌ی R نظیر می‌کنیم به‌طوری‌که رئوس آن ایده‌آل‌های سره غیرصفر حلقه‌ی R هستند و دو رأس I و J مجاورند اگروتنهااگر $I + J = R$. در این‌پایان‌نامه، سعی می‌کنیم ویژگی‌های این گراف را به ویژگی‌های جبری حلقه‌ی R و بالعکس ترجمه کنیم.

واژگان کلیدی:

گراف دوبخشی، گراف کامل، یکریختی گراف‌ها، گراف وابسته به حلقه، گراف وابسته به ایده‌آل‌ها.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

پیش‌گفتار

پیشرفت‌های اخیر در ریاضیات به‌ویژه کاربردهای آن را مرهون عوامل متعددی می‌دانند که به‌طور قطع نظریه گراف یکی از آن‌ها است. هم‌اکنون نظریه گراف ابزار بسیار مناسبی برای سایر شاخه‌های علوم و مهندسی مانند نظریه کدگذاری، تحقیق در عملیات، آمار، تحلیل شبکه‌ها، شبکه‌های اجتماعی، مهندسی ترافیک، علوم کامپیوتر، شیمی، زیست‌شناسی، علوم‌اجتماعی و غیره گردیده است.

تحقیقات گسترده‌ای جهت نسبت دادن گراف‌های مختلف به ساختارهای جبری انجام شده است. در این بین انتساب گراف به ساختارهای جبری از موضوعات مطرح و جدید در حوزه جبر است. در میان ساختارهای جبری به حلقه‌ها گراف‌های بیشتری نسبت داده شده است.

یکی از مهمترین کاربردهای گراف مدل‌سازی پدیده‌های گوناگون و بررسی آن‌ها است. ویژگی‌های هندسی گراف ابزار مهمی برای به شهود درآوردن طیف وسیعی از مسائل گوناگون است که قبلاً کاملاً غیرشهودی می‌نمودند. همچنانکه به هر گراف ماتریس‌هایی نظیر می‌شود می‌توان به سایر ساختارهای جبری نیز گراف‌هایی نظیر کرده و از ابزارهای گرافی برای حل مسائل جبری یا برعکس استفاده نمود. این موضوع به‌ویژه در دو دهه اخیر مورد توجه بسیاری از متخصصین علم جبر قرار گرفته است.

اهدافی که در این پایان‌نامه دنبال می‌کنیم به شرح ذیل است:

۱. ترجمه برخی از خواص جبری یک حلقه به خواص هندسی گراف‌ها،

۲. استخراج ویژگی‌های یک حلقه به کمک گراف‌ها،

۳. بررسی یکریخت بودن حلقه‌ها با استفاده از یکریختی گراف‌ها،

۴. ارتباط بین دو شاخه از ریاضیات (جبر و گراف).

مطالعه‌ی نظریه گراف جبری یک موضوع جالب برای ریاضی‌دانان است و حداقل به سال ۱۹۷۳ میلادی برمی‌گردد، آن زمان بیگز [۱] کارش را منتشر کرد و در مقدمه کتاب خود هدفش را که «ترجمه

[۱] Biggs

کردن ویژگی‌های جبری و سپس استفاده از نتایج و روش‌های جبر و به‌دست آوردن قضایایی در مورد گراف‌ها» بود، نوشت [۹] اگرچه بیگز در مورد روش‌های جبری و جبر به‌طور عمومی صحبت کرد ولی نوعی از جبری که او واقعاً استفاده کرد جبرخطی و برخی ویژگی‌های چندجمله‌ای‌ها بود. در این پایان‌نامه هدفی شبیه کار بیگز داریم و گراف دیگری را مطالعه خواهیم کرد که وابسته به حلقه‌ی شرکت‌پذیر باشد.

بعداً بک[۲] گراف مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه‌ی جابجایی را بررسی کرد و بیشتر علاقه‌مند به رنگ‌آمیزی آن گراف بود. او $\Gamma(R)$ را به‌عنوان گرافی در نظر گرفت که رئوس آن عناصر حلقه‌ی R بودند و دو رأس متمایز a و b مجاورند اگروتنهااگر $ab = ۰$. او رنگ‌آمیزی حلقه‌ها با ساختار این گراف را بررسی کرد و نشان داد که برای برخی کلاس‌های حلقه‌ها رابطه‌ی $\chi(\Gamma(R)) = \omega(\Gamma(R))$ برقرار است [۸]. از آن پس توجه جبردانان و نظریه‌پردازان گراف بر روی مطالعه‌ی گراف مقسوم‌علیه‌های صفر متمرکز شد. سپس مطالعه‌ی رنگ‌آمیزی گرافِ مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی جابجایی توسط اندرسن[۳] و نصیر[۴] ادامه پیدا کرد. آن‌ها حلقه‌های متناهی رنگ‌آمیزی‌پذیر را مورد بررسی بیشتری قرار دادند و یک مثال از یک حلقه‌ی موضعی متناهی ارائه دادند که $\omega(\Gamma(R)) = ۵ < \chi(\Gamma(R)) = ۶$ [۵]. شرما[۵] و باتوادکار[۶] گراف دیگری را روی حلقه‌ی R مانند گراف $\Gamma(R)$ تعریف کردند که رئوس آن عناصر حلقه‌ی R هستند و دو رأس مجزای a و b مجاورند اگروتنهااگر $Ra + Rb = R$ [۱۲] آن‌ها نشان دادند که $\chi(\Gamma(R) < \infty$ اگروتنهااگر R یک حلقه‌ی متناهی باشد. در این‌حالت

$$\chi(\Gamma(R)) = \omega(\Gamma(R)) = t + l$$

که t و l به‌ترتیب تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال و عناصر یکه حلقه‌ی R را نشان می‌دهند. در این‌پایان‌نامه ساختار گراف تعریف شده توسط شرما و باتوادکار را مورد بررسی بیشتر قرار می‌دهیم.

در ادامه ساختار پایان‌نامه بدین شرح است:

در فصل اول به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی در زمینه‌ی جبر و گراف می‌پردازیم.

در فصل دوم مطابق مقاله [۱۱] فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی با عنصر همانی باشد و $\Gamma_۱(R)$ زیرگراف القایی گراف $\Gamma(R)$ از یکه‌ها و $\Gamma_۲(R)$ زیرگراف القایی گراف $\Gamma(R)$ از عناصر غیریکه

[۲] Beck

[۳] Anderson

[۴] Naseer

[۵] Sharma

[۶] Bhatwadekar

حلقه‌ی R باشد. در این فصل نشان داده می‌شود که گراف $\Gamma_2(R) \setminus J(R)$ یک گراف دوبخشی کامل است اگروتنهااگر حلقه‌ی R شامل دو ایده‌آل ماکسیمال باشد. (رئوس گراف $\Gamma_2(R) \setminus J(R)$ عناصر غیریکه حلقه‌ی R منهای $J(R)$ است.) همچنین نشان می‌دهیم که حلقه‌ی R حاصل‌ضرب متناهی از حلقه‌های موضعی است اگروتنهااگر R حلقه‌ای تمیز با $\omega(\Gamma_2(R) \setminus J(R))$ متناهی باشد. همچنین نشان داده می‌شود که $\Gamma_2(R) \setminus J(R)$ گرافی همبند با قطر حداکثر **۳** است به‌علاوه به‌طور کامل قطر گراف $\Gamma_2(R) \setminus J(R)$ مشخص می‌شود. سپس به‌طور کامل نشان داده می‌شود که اگر R و S دو حلقه‌ی نیم‌موضعی متناهی باشند و R حلقه‌ی کاهشی باشد، در این صورت $\Gamma(R) \cong \Gamma(S)$ اگروتنهااگر $R \cong S$.

در سراسر فصل سوم مطابق مقاله [۴] فرض می‌کنیم برای هر حلقه‌ی R یک گراف $\Gamma_+(R)$ نظیر می‌کنیم که رئوس آن ایده‌آل‌های سره غیرصفر حلقه‌ی R هستند و دو ایده‌آل در این گراف مجاورند اگر هم‌بیشین باشند. در ادامه‌ی فصل نشان می‌دهیم که عدد خوشه‌ای و عدد رنگی این گراف با تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R برابر هستند. سپس روی مسطح بودن گراف $\Gamma_+(R)$ متمرکز شده و شرایط لازم و کافی می‌یابیم که تحت آن گراف $\Gamma_+(R)$ یک جنگل یا یک درخت باشد. همچنین در نهایت شرایطی را می‌یابیم که تحت آن متعامد بودن رئوس گراف $\Gamma_+(R)$ و مجموع مستقیم بودن آن‌ها هم‌ارز باشد .

در سراسر این پایان‌نامه منظور از یک حلقه، حلقه‌ای یکدار شرکت‌پذیر است و $J(R)$ رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R را نمایش می‌دهد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

بیشتر مطالب این فصل از مراجع [۱، ۲، ۷، ۱۰] گرفته شده است.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ (حلقه‌ی تقسیم). حلقه‌ی یکدار R را حلقه‌ی تقسیم گویند هرگاه هر عضو ناصفرش وارون‌پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۱ (حلقه‌ی نیم‌موضعی). حلقه‌ی R نیم‌موضعی نامیده می‌شود اگر تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱ (مقسوم‌علیه صفر). یک عنصر x از حلقه‌ی R، مقسوم‌علیه صفر نامیده می‌شود، اگر عنصر $y \neq 0$ در حلقه‌ی R وجود داشته باشد به‌طوری‌که $xy = 0$.

تعریف ۴.۱.۱ (حوزه‌ی صحیح). حلقه‌ی جابجایی و یکدار R را حوزه‌ی صحیح نامند هرگاه مقسوم‌علیه صفر غیربدیهی نداشته باشد.

تعریف ۵.۱.۱ (عضوخودتوان). حلقه‌ی R دارای عضو خودتوان x است اگر $x^2 = x$

تعریف ۶.۱.۱ (عضو پوچ‌توان). حلقه‌ی R دارای عضو پوچ‌توان است اگر عدد صحیح و مثبت n موجود باشد که $x^n = 0$.

تعریف ۷.۱.۱ (حلقه‌ی کاهشی). حلقه‌ی R کاهشی است اگر R عناصر پوچ‌توان غیرصفر نداشته باشد.

تعریف ۸.۱.۱ (R-مدول نیم‌ساده). فرض کنید M یک R-مدول باشد، M را نیم‌ساده می‌نامند هرگاه به‌ازای هر زیرمدول از M مثل K زیرمدولی از M مثل P موجود باشد که

$$M = K \oplus P.$$

تعریف ۹.۱.۱ (حلقه‌ی نیم‌ساده). فرض کنیم R یک حلقه باشد، R را نیم‌ساده گویند هرگاه R به‌عنوان R-مدول نیم‌ساده باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ (حلقه‌ی نیم‌ساده جیکوبسن). حلقه‌ی R را نیم‌ساده جیکوبسن گویند اگر $J(R) = \text{۰}$.

نمادگذاری ۱۱.۱.۱ (مشخصه میدان). مشخصه میدان F را با نماد $char(F)$ نشان می‌دهیم. همچنین میدان متناهی n عضوی را با نماد F_n مشخص می‌کنیم.

نمادگذاری ۱۲.۱.۱. حلقه‌ی ماتریس‌های $k \times k$ با درایه‌های متعلق به میدان متناهی F را با $M_k(F)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ (لم برائر). فرض کنیم m ایده‌آل مینیمال حلقه‌ی R باشد. دراین صورت یا $m^{\text{۲}} = \text{۰}$ یا $m = Re$ که e عنصرخودتوان و متعلق به m است.

لم ۱۴.۱.۱ (لم ناکامایا). فرض کنیم M یک R-مدول متناهی‌مولد و I ایده‌آل حلقه‌ی R باشد که $I \subseteq J(R)$. در این‌صورت $IM = M$ $(MI = M)$ نتیجه می‌دهد $M = \text{۰}$.

قضیه ۱۵.۱.۱ (قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اول). فرض کنیم $P_{\text{۱}}, \ldots, P_n$ ایده‌آل‌هایی اول از حلقه‌ی جابجایی R بوده و I ایده‌آلی دلخواه از R باشد به‌طوری‌که $I \subseteq \bigcup_{i=\text{۱}}^{n} P_i$، در این صورت اندیسی مانند i، $\text{۱} \leqslant i \leqslant n$ موجود است به‌قسمی که $I \subseteq P_i$.

قضیه ۱۶.۱.۱ (قضیه‌ی باقیمانده چینی). فرض کنیم $I_{\text{۱}}, I_{\text{۲}}, \ldots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی جابجایی R باشند به‌طوری‌که به‌ازای هر $(\text{۱} \leq s, t \leq n)$ $s \neq t$ داشته باشیم $I_s + I_t = R$، در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{R}{\bigcap_{i=\text{۱}}^{n} I_i} \cong \frac{R}{I_{\text{۱}}} \oplus \ldots \oplus \frac{R}{I_n}.$$

قضیه ۱۷.۱.۱ (قضیه‌ی ودربرن-آرتین). فرض کنیم R حلقه‌ی نیم‌ساده باشد، در این صورت حلقه‌های تقسیم مانند $D_{\text{۱}}, D_{\text{۲}}, \ldots, D_k$ و اعداد صحیح مثبت مانند $n_{\text{۱}}, n_{\text{۲}}, \ldots, n_k, k$ موجودند به‌قسمی که

$$R \cong M_{n_{\text{۱}}}(D_{\text{۱}}) \times \ldots \times M_{n_k}(D_k).$$

قضیه ۱۸.۱.۱ (قضیه‌ی کوچک ودربرن). هر حلقه‌ی تقسیم متناهی یک میدان است.

تعریف ۱۹.۱.۱ (گراف). یک گراف G یک سه‌تایی نامیده می‌شود که شامل مجموعه‌ای از رئوس $V(G)$، مجموعه‌ی یال‌های $E(G)$ و یک رابطه است که به هر دو رأس (نه لزوماً مجزا) یک یال نسبت می‌دهد و با $G = (V, E)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۰.۱.۱ (گراف هم‌بیشین). گراف وابسته به عناصر حلقه‌ی R یاگراف وابسته به ایده‌آل‌های حلقه‌ی R که دو رأس گراف درصورتی مجاورند که جمع ایده‌آل‌های حلقه برابر حلقه‌ی R شود.

تعریف ۲۱.۱.۱ (زیرگراف). گراف $G' = (V', E')$ از گراف $G = (V, E)$ را زیرگراف گویند که $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$ است و با $\langle G' \rangle$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۲.۱.۱ (رنگ‌آمیزی رأسی گراف). یک رنگ‌آمیزی رأسی از یک گراف G یک نسبت‌دهی از رنگ‌ها (عناصر هر مجموعه) برای رئوس G است به طوری که اگر رنگی برای رأسی در نظرگرفته شود به رئوس مجاور رنگ‌های مجزا تخصیص داده شوند.

تعریف ۲۳.۱.۱ (n-رنگ‌آمیزی گراف G). اگر برای رنگ‌آمیزی گراف G از n رنگ مجزا استفاده شود، رنگ‌آمیزی به‌عنوان یک n-رنگ‌آمیزی تلقی می‌شود.

تعریف ۲۴.۱.۱ (n-رنگ‌پذیری گراف G). اگر یک n-رنگ‌آمیزی از گراف G وجود داشته باشد گراف G را n-رنگ‌پذیر گویند.

تعریف ۲۵.۱.۱ (عدد رنگی گراف G). به کمترین عدد طبیعی n که به‌ازای آن گراف G یک گراف n-رنگ‌پذیر باشد، عدد رنگی گراف G گویند و با $\chi(G)$ نمایش می‌دهند. $\chi(G)$-رنگ‌آمیزی را رنگ‌آمیزی سره گویند.

تعریف ۲۶.۱.۱ (درجه رأس گراف). برای گراف G درجه رأس v تعداد یال‌های واقع بر v است که با نماد $\deg_G v$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲۷.۱.۱ (مسیر گراف). به دنباله‌ی متناهی از رئوس متمایز و مجاور یک گراف مسیر گفته می‌شود. مسیر بین دو رأس u و v از گراف G را با (u, v) نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۸.۱.۱ (گراف همبند). گراف G را همبند گویند هرگاه برای هر جفت از رئوس متمایز u و v دنباله‌ی متناهی از رئوس متمایز $\{u_۱ = u, u_۲, ..., u_n = v\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر جفت $(۱ \leq i \leq n - ۱)$ $\{u_i, u_{i+۱}\}$ مجاور باشند.

تعریف ۲۹.۱.۱ (همبندی رئوس). رئوس u, v در گراف G را همبند نامند هرگاه مسیر (u, v) در G موجود باشد. اگر تمام رئوس گراف G همبند باشند در این صورت گراف G را همبند گویند.

تعریف ۳۰.۱.۱ (طول مسیر). تعداد یال‌های مسیر (u,v) را طول آن مسیر گویند.

تعریف ۳۱.۱.۱ (فاصله‌ی رئوس گراف). فاصله‌ی بین رئوس همبند $\{u,v\}$ کوتاهترین طول مسیری است که رئوس را به‌هم وصل می‌کند و با $d(u,v)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳۲.۱.۱ (قطر گراف). بیشترین فاصله‌ی بین رئوس یک گراف همبند را قطر گراف گویند. قطر گراف G با $\mathrm{diam}(G)$ نمایش می‌دهند. یک گراف قطر صفر دارد اگر تنها شامل یک رأس باشد.

تعریف ۳۳.۱.۱ (دور). به مسیری با حداقل طول ۳ که رأس ابتدا و انتهای آن یکی باشد دور گفته می‌شود.

تعریف ۳۴.۱.۱ (جنگل). گراف فاقد دور را جنگل گویند.

تعریف ۳۵.۱.۱ (درخت). گراف همبند فاقد دور را درخت گویند.

تعریف ۳۶.۱.۱ (کمر گراف). طول کوتاه‌ترین دور گراف G کمر گراف G نامیده می‌شود و با $gr(G)$ نشان می‌دهند. درصورتی که G جنگل باشد دراین صورت:

$$gr(G) := \infty.$$

تعریف ۳۷.۱.۱ (گراف کامل). اگر هر جفت از رئوس متمایز یک گراف مجاور باشند، گراف حاصل را گراف کامل گویند. اگر گراف کامل متشکل از n رأس باشد با نماد K_n نشان می‌دهند.

تعریف ۳۸.۱.۱ (گراف r-بخشی G). یک گراف r-بخشی گرافی است که مجموعه رئوس آن را بتوان به r زیرمجموعه افراز کرد که هیچ دو انتهای یالی در یک زیرمجموعه نباشد.

تعریف ۳۹.۱.۱ (گراف r-بخشی کامل G). یک گراف r-بخشی کامل گرافی r-بخشی است که در آن هر رأس از بخش دلخواه به هر رأس از بخش‌های دیگر گراف وصل می‌شود.

نمادگذاری ۴۰.۱.۱. در گراف دوبخشی کامل اگر m و n تعداد اعضای هر بخش باشد گراف را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴۱.۱.۱ (خوشه‌ی گراف). گرافی از مجموعه‌ی V' که زیرمجموعه‌ای از رئوس گراف است به‌طوری که همه‌ی جفت رئوس V' مجاور باشند، خوشه‌ی گراف نامیده می‌شود.

تعریف ۴۲.۱.۱ (عدد خوشه‌ای). تعداد رئوس در بزرگ‌ترین خوشه‌ی گراف G عدد خوشه‌ای آن گراف گفته می‌شود و با $\omega(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴۳.۱.۱ (مجموعه‌ی غالب گراف $\Gamma_+(R)$). در گراف $\Gamma_+(R)$ مجموعه‌ی غالب زیرمجموعه‌ی A از مجموعه‌ی رئوس گراف $\Gamma_+(R)$ است به‌طوری‌که هر رأس خارج از مجموعه‌ی A مجاور با حداقل یک رأس در مجموعه‌ی A باشد.

تعریف ۴۴.۱.۱ (عدد غالب). عدد غالب گراف $\Gamma_+(R)$ اندازه‌ی کوچک‌ترین مجموعه‌ی غالب در گراف $\Gamma_+(R)$ است که با $\gamma(\Gamma_+(R))$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴۵.۱.۱ (پیوند دو گراف). اگر $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$ دو گراف با مجموعه‌ی رئوس مجزای V_i و مجموعه‌ی یال‌های E_i باشند، گراف با مجموعه‌ی رئوس $V = V_۱ \cup V_۲$ و مجموعه‌ی یال‌های $E_۱ \cup E_۲ \cup \{xy|x \in V_۱, y \in V_۲\}$ پیوند دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ را تشکیل می‌دهد که با $G_۱ \bigvee G_۲$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۴۶.۱.۱ (قضیه‌ی کراتسفکی). یک گراف مسطح است اگر و تنهااگر گراف‌های $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ زیرگراف‌هایش نباشند.

فصل ۲

گراف هم‌بیشین وابسته به عناصر یک حلقه‌ی جابجایی

۱.۲ گراف‌های دو بخشی

در سراسر این فصل R حلقه‌ی جابجایی یکدار بوده و $U(R)$ گروه یکه‌های حلقه‌ی R، $J(R)$ رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R و $I(R)$ مجموعه خودتوان‌های حلقه‌ی R هستند.

تعریف ۱.۱.۲ (حلقه‌ی موضعی). حلقه‌ی R موضعی گفته می‌شود اگر یک ایده‌آل ماکسیمال منحصربفرد داشته باشد. اگر m ایده‌آل ماکسیمال منحصربفرد حلقه‌ی R باشد، اغلب حلقه‌ی موضعی R را با (R, m) خواهیم نوشت.

در ادامه فرض می‌کنیم $\Gamma(R)$ گرافی باشد که توسط شرما و باتوادکار تعریف شده است و به آن گراف هم‌بیشین نیز گوییم. [۱۲]

تعریف ۲.۱.۲ (گراف $\Gamma(R)$). فرض کنیم $\Gamma_۱(R) = \langle U(R)\rangle$ و $\Gamma_۲(R) = \langle R\backslash U(R)\rangle$ زیرگراف‌هایی از $\Gamma(R)$ باشند، در این صورت $\Gamma(R)$ پیوند بین دو زیرگراف $\Gamma_۱(R)$ و $\Gamma_۲(R)$ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر:

$$\Gamma(R) = \Gamma_۱(R) \vee \Gamma_۲(R).$$

لم ۳.۱.۲. موارد ذیل برقرارند:

(i) $\Gamma_۱(R)$ گرافی کامل است.