بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

نظریه ایده ال در نیم حلقه های تعویض پذیر

از

سید یوسف حسنی‌زعفرانی

استاد راهنما:

دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی

تیرماه ۱۳۸۶

تقدیم به:

جده سادات حضرت فاطمه زهرا (س)

تقدیر وتشکر:

برخود لازم می دانم، نهایت سپاس و قدردانی خود راحضور استاد ارجمند جناب آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی آتانی که درکلیه مراحل تحقیق این رساله راهنمای من بودند، ابراز نمایم. از جناب آقای دکتر حبیب الله انصاری که زحمت داوری رساله این حقیر را قبول فرموده اند، تشکر وقدر دانی می کنم. همچنین از جناب آقای دکتر منصور هاشمی که زحمت مشاوراین رساله را قبول فرموده اند، تشکر و سپاس گذاری می کنم. همچنین ازتمامی اساتیدخود که افتخارشاگردی آنها را داشته ام واز مدیرمحترم گروه ریاضی جناب آقای دکتر فتحی تشکرو کمال احترام را دارم. از تمام دانشجویان ارشد ریاضی ۸۴ که در این دو سال خاطرات زیبایی ازآنها دارم، نیزتشکرمی کنم. درپایان ازخانواده،بخصوص از همسر گرامی خود که در تمامی راه مشوق من بودند، تقدیرو تشکر می کنم.

((فهرست مطالب))

چکیده

نظریه ایده ال در A-نیم حلقه های تعویض پذیر

سید یو سف حسنی زعفرانی

دراین رساله ما به تحقیق ومشخص کردن رده ای از A-نیم حلقه ها می پردازیم[۳]. مشخص سازی رادیکا ل تی ارین ازیک ایده ال سره دریک A-نیم حلقه داده شده است. بعلاوه وقتی که P یک Q-ایده ال دریک نیم حلقه R است، نشان می دهیم که P اولیه است اگرو تنها اگر $\frac{R}{P}$ پوچتوان باشد. همچنین یک تعداد نتایج از ایده الهای به طور ضعیف k-اولیه در یک نیم حلقه R آورده شده است[۶].

کلید واژه ها: A-نیم حلقه، Q-ایده ال، کاملا" اول، اول مینیما ل، اولیه، رادیکال تی ارین، T-عنصر، ایده ال به طور ضعیف k-اول و k-اولیه.

Abstract

Ideal theory in commutative A-semirings

Uosef hassani zaferani

In this thesis, we study investigate and characterize the class of A-semirings [۳]. A characterization of the Thierrin radical of a proper ideal of an A-semiring is given. moreover when p is a Q-ideal in the semiring R, it is shown that P is primary if and only if $\frac{R}{P}$ is nilpotent. Also, a Semiring are given[۶]. A number of results concerning k-weakly primary ideals over a semiring are given[۶].

Key words: A-semiring, Q-ideal , completely prime, minimal prime (primary), Thierrin radical, T-element, K-weakly prime (primary) ideal.

مقدمه

مفهوم نیم حلقه ها در سال ۱۹۳۵ توسط وندیور معرفی و مطالعه شده است . محققان زیادی در این زمینه کار نموده اند[۱۲]. امروزه استفاده اساسی از نیم حلقه در علوم کامپیوتر ی است. آلن مفهوم Q-ایده ال را در [۱] معرفی کرده و ساختار نیم حلقه های خارج قسمتی را بنا نموده و مورد مطالعه قرار داده است.

ما در این رساله نیز یک سری از مطالبی که اخیرا" اثبات شده اند ([۳] راملاحظه فر مایید) را مورد بررسی قرار می دهیم، که این تحقیق شامل چهارفصل می باشد.

در فصل اول یک سری از تعاریف، لم ها و قضیه هایی که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می گیرند را بیان کرده ایم.

در فصل دوم مفهوم ایده ال در نیم حلقه ها، رادیکال یک ایده ال و رادیکال تی ارین یک ایده ال را در نیم حلقه ها، مورد بررسی قرار داده ایم.

در فصل سوم بعضی مفاهیم نیم حلقه های خارج قسمتی و ایده ال اولیه در نیم حلقه ها را همراه با قضایای مربوط به آنها بیان و اثبات کرده ایم و همچنین به همریختی ماکزیمال در نیم حلقه با ذکر چند مثال اشاره کرده ایم.

در فصل چهارم به ایده الهای به طور ضعیف k-اول و k-اولیه پرداختیم و قضایایی در ارتباط با این مفاهیم بروی نیم حلقه ها را ثابت کرده ایم. [۶]

فصل اول : مقدمات و مطالب پیش نیاز

در این فصل برخی از مطالبی که در فصلهای آینده مورد استفاده قرار می گیرند، تحت عنوان تعریف لم و قضیه بیان می کنیم.

(۱-۱)تعریف. یک مجموعه R با دو عمل دوتایی شرکت پذیر که جمع و ضرب می نامیم (به ترتیب با + ، • نشان می دهیم) یک نیم حلقه نامیده می شود در صورتیکه :

۱) عمل جمع تعویض پذیر باشد

۲) $0 \in R$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in R$ داشته باشیم: $x+0=x$ و $x0 = 0x = 0$

۳) عمل ضرب نسبت به عمل جمع چه از راست وچه از چپ توزیع پذیر باشد یعنی

$$a(b+c) = ab + ac$$
$$(b+c)a = ba + ca$$

(۱-۲) تعریف. نیم حلقه R را یکدار گو ییم هر گاه $1 \in R$ باشد بقسمی که برای هر $a \in R$، $a.1 = 1.a = a$ ونیم حلقه R را تعویض پذیر گو ییم هر گاه برای هر a,b از R ,$ab=ba$.

(۱ -۳) تعریف. فرض کنید I یک زیر مجموعه غیر خالی نیم حلقه R باشد. I را یک زیر نیم حلقه R گوییم هر گاه با عملهای جمع و ضرب نیم حلقه R ، خود یک نیم حلقه باشد.

نماد گذاری . مجموعه اعداد طبیعی را با N ومجموعه اعداد صحیح را با Z ومجموعه اعداد حقیقی را با R نشان می دهیم.

از این به بعد فر ض می کنیم R یک نیم حلقه تعویض پذیر و یکدار است.

(۱-۴) مثال. مجموعه اعداد حقیقی مثبت یعنی R^+ ومجموعه اعداد صحیح مثبت یعنی Z^+ با عمل جمع و ضرب معمولی یک نیم حلقه است.

(۱-۵) تعریف. فرض کنید I یک زیر مجموعه غیر خالی از R باشد . I را یک ایده ال R می نا میم هر گاه برای هر a,b عضو I و r عضو R داشته باشیم:

۱) $a + b \in I$

۲) $ar \in I$

(۱-۶) تعریف. اگر R یک نیم حلقه باشد، مجموعه تمام ایده الهای R را با T_R نشان می دهیم .

نماد گذاری . اگر A زیرمجموعه محض B باشد، می نویسیم $A \subset B$.

(۱-۷) تعریف. ایده ال I در R را بدیهی گو ییم هر گاه $I = \{0\}$ یا $I = R$.

(۱-۸) تعریف. ایده ال I در R را ایده ال سره R گوییم هر گاه $I \neq R$.

(۱-۹) تعریف. ایده ال P در R را ایده ال اول گوییم در صورتی که $P \neq R$ و برای هر دوایده ال A و B در R اگر $AB \subseteq P$ آنگاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$ که $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$.

(۱-۱۰) تعریف. ایده ال P در R را کاملا"اول گوییم هر گاه برای هر a,b عضو R، اگر $ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

(۱-۱۱) تعریف. ایده ال P در R را نیم اول گوییم هر گاه به ازای هر عدد صحیح مثبت n، اگر $a^n \in P$ آنگاه $a \in P$.

(۱-۱۲) تعریف. ایده ال P در R را کاملا"نیم اول گوییم هر گاه برای $a \in R$، اگر $a^2 \in P$ آنگاه $a \in P$.

(۱-۱۳) تعریف. ایده ال P در R را به طور ضعیف اول گو ییم هرگاه برای a,b عضو R، اگر $0 \neq ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

(۱-۱۴) تعریف. ایده ال P در R فشرده است هر گاه برای هر عدد طبیعی n، اگر $a_1^2 a_2^2 .....a_n^2 \in P$ آنگاه $a_1 a_2 .....a_n \in P$.

(۱-۱۵) لم. هر ایده ال کاملا"آول فشرده است و هر ایده ال فشرده کاملا" نیم اول است.[۱۵]

(۱-۱۶) قضیه . اگر ایده ال P فشرده باشد آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت $l_n,...l_2,l_1$، اگر $a_1^{l_1} a_2^{l_2} ....a_n^{l_n} \in P$ آنگاه $a_1 a_2 ....a_n \in P$ وبر عکس.[۱۵]

(۱-۱۷) تعریف. ایده ال P در R را تحویل نا پذیر گوییم اگر وتنها اگر برای هردو ایده ال A,B در R داشته باشیم: $A \cap B = P \Rightarrow A = P$ یا $B = P$

(۱-۱۸) تعریف. ایده ال P در R را تحویل نا پذیر قوی گوییم اگر وتنها اگر برای هر دو ایده ال A,B در R داشته باشیم: $A \cap B \subseteq P \Rightarrow A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$

(۱-۱۹) تعریف. فرض کنید P یک ایده ال سره در R باشد . P را اولیه گوییم هر گاه به ازای هر $a,b \in R$ که $ab \in P$ و $a \notin P$ آنگاه عدد صحیح مثبت مانند n باشد بقسمی که $b^n \in P$.

(۱-۲۰) تعریف. اگر P یک ایده ال سره در R باشد آنگاه P را به طور ضعیف اولیه گوییم هر گاه به ازای هر a,b از R که $0 \neq ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا عدد صحیح مثبتی مانند n باشد بقسمی که $b^n \in P$.

(۱-۲۱) تعریف. ایده ال M در R را ماکزیمال گوییم هر گاه $M \neq R$ و اگر A یک ایده ال در R باشد بقسمی که $M \subset A \subseteq R$ آنگاه $A = R$.

(۱-۲۲) تعریف. ایده ال P در R را یک ایده ال اصلی یا تولید شده بوسیله a گوییم هر گاه داشته باشیم:

$$P = \langle a \rangle = \{ax \mid x \in R\}$$

(۱-۲۳) تعریف. اگر $X \subseteq R$ آنگاه ایده ال تو لید شده توسط X را به صورت $\langle X \rangle$ نشان می دهیم و می نویسیم:

$$\langle X \rangle = \{r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots\ldots + r_nx_n \mid r_i \in R, x_i \in X, n \in N\}$$

(۱-۲۴) تعریف. اگر $\{I_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از ایده الهای R باشد آنگاه $\bigcap_{i\in I} I_i$ یک ایده ال R است.

(۱-۲۵) تذکر. اگر $I_1, I_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, I_n$ ایده الهایی از R باشند آنگاه

$S = \sum_{i=1}^{n} I_i = \{a_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \mid a_i \in I_i, 1 \le i \le n\}$ نیز یک ایده ال R است.

(۱-۲۶) تعریف. مجموع $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$ از ایده الهای R را جمع مستقیم می نامیم هر گاه هر عضو $a \in I$ تنها به صورت منحصر به فرد به شکل $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $a_i \in I_i$, $1 \le i \le n,$ قابل بیان باشد. جمع مستقیم ایده الها را به صورت $I = \oplus \sum_{i=1}^{n} I_i$ نشان می دهیم.

(۱-۲۷) تعریف. فرض کنید I و J دو ایده ال در R باشند. اگر $U = \{ab \mid a \in I, b \in J\}$، در این صورت حاصل ضرب ایده الهای I و J را با IJ نشان می دهیم و می نو یسیم:

$$\langle U \rangle = IJ = \{r_1a_1b_1 + r_2a_2b_2 + \ldots\ldots\ldots + r_na_nb_n \mid r_i \in R, a_i \in I, b_j \in J, n \in N\} =$$

$$\left\{\sum c_ib_i \mid c_i \in I, b_i \in J, n \in N, c_i = r_ia_i\right\}$$

به طریق مشابه $I_1I_2I_3\ldots\ldots\ldots I_k$ تعریف می شود.

(۱-۲۸) تعریف. زیر مجموعه غیرخالی S از R را یک مجموعه بسته ضربی نامیم هر گاه $1 \in S$ و برای هر دو عضو s_1 و s_2 در S داشته باشیم: $s_1s_2 \in S$

(۱-۲۹) تعریف. اگر S یک مجموعه بسته ضربی باشد، آنگاه ایده ال P در R را نسبت به S ماکزیمال گوییم اگر $P \cap S = \phi$ وبرای ایده ال A از R در صورتیکه $P \subset A$ آنگاه $A \cap S \neq \phi$.

(۱-۳۰) تعریف. نیم حلقه R را یک A-نیم حلقه گو ییم، هر گاه R تعویض پذیر باشد و هر ایده ال سره در R مشمول در یک ایده ال اول از R باشد.

(۱-۳۱) تعریف. فرض کنید B یک ایده ال سره در یک A-نیم حلقه مانند R باشد. رادیکال ایده ال B را که با نماد $rad_R B = \sqrt{B}$ نشان می دهیم ، اشتراک تمام ایده الهای اول در R که شامل B می باشند، تعریف می کنیم.

(۱-۳۲) تعریف. ایده ال B در یک A- نیم حلقه را نیم اول گو ییم هر گاه $B = \sqrt{B}$. تعریف (۱-۱۱) و (۱-۳۲) با هم معادلند.

(۱-۳۳) تعریف. رادیکال جا کو بسون نیم حلقه R را با $J(R)$ نشان می دهیم و برابراست با اشتراک تمام ایده الهای ماکزیمال R.

(۱-۳۴) تعریف. فرض کنید I و J دو ایده ال در R باشند. ایده ال کسری R را به صورت $(I \underset{R}{:} J)$ نشان می دهیم و به شکل زیر تعریف می شود :

$$(I \underset{R}{:} J) = \{r \in R | rJ \subseteq I\} = \{r \in R | \forall x \in J \Rightarrow rx \in I\}$$

(۱-۳۵) تعریف. اگر $I = \{0_R\}$، در این صورت $(0_R : J)$ را پوچساز J می گو ییم و می نو یسیم :

$$(0_R : J) = \{r \in R | rJ = 0\} = \{r \in R | ra = 0 \ ; \quad \forall a \in J\}$$

(۱-۳۶) تعریف. فرض کنید B یک ایده ال نیم حلقه R باشد. ایده ال اول M را یک مقسوم علیه مینیمال اول B گو ییم هر گاه $B \subseteq M$ واگر C یک ایده ال اول در R بقسمی باشد که $B \subset C \subseteq M$ آنگاه $C = M$.

(۱-۳۷) تعریف. فرض کنید B یک ایده ال نیم حلقه R باشد. ایده ال اول M را یک مقسوم علیه مینیمال کاملا" اول B گو ییم هر گاه $B \subseteq M$ و اگر C یک ایده ال کاملا" اول R بقسمی باشد که $B \subset C \subseteq M$ آنگاه $C = M$.

(۱-۳۸) تعریف. عنصر x در R را پوچتوان گو ییم هر گاه عدد طبیعی n موجود باشد بطوریکه $x^n = 0$.

(۱- ۳۹) تعریف. عنصر $a \neq 0$ در R را یک مقسوم علیه صفر گو ییم هر گاه R عنصری چون $b \neq 0$ داشته باشد که $ab = 0$.

(۱-۴۰) تعریف. اگر A یک مجمو عه غیر خالی باشد ، رابطه $(\leq)$ را بر A انعکاسی گوییم اگر برای هرعضو a از A داشته باشیم: $a \leq a$

(۱-۴۱) تعریف. اگر A یک مجموعه غیر خالی باشد ، رابطه $(\leq)$ رابر A پاد متقارن گوییم هر گاه :

$$(a\leq b)\&(b\leq a)\Rightarrow a=b$$

(۱-۴۲) تعریف. اگر A یک مجموعه غیر خالی باشد ، رابطه $(\leq)$ را بر A تعدی گوییم اگر برای هر a و b و c از A داشته باشیم :

$$(a\leq b)\&(b\leq c)\Rightarrow(a\leq c)$$

(۱-۴۳) تعریف. فرض کنید A یک مجموعه غیر خالی باشد. مجموعه A را تحت رابطه $(\leq)$ یک مجموعه جزیی مرتب گو ییم هر گاه رابطه $(\leq)$ انعکاسی، تعدی و پاد متقارن باشد و می نویسیم $(A,\leq)$.

(۱-۴۴) تعریف. اگر A یک مجموعه غیر خالی باشد، عناصر a و b از A را مقایسه پذیر گوییم اگر $a\leq b$ یا $b\leq a$.

(۱-۴۵) تعریف. هر زیر مجموعه نا تهی B از مجموعه جزیی مرتب A را یک زنجیر در A گو ییم هر گاه عناصرش مقایسه پذیر باشند.

(۱-۴۶) تعریف. فرض کنیم A یک مجموعه جزیی مرتب تحت رابطه $(\leq)$ باشد و $\phi\neq B\subseteq A$. عنصر $d\in A$ را یک کران بالا برای B گوییم هر گاه به ازای هر $b\in B$ داشته باشیم $b\leq d$.

(۱-۴۷) لم زورن. هر گاه A یک مجموعه جزیی مرتب تحت رابطه $(\leq)$ باشد به طوریکه هر زنجیر غیر خالی در A کران بالا یی در A داشته باشد، آنگاه شامل عنصر ماکزیمال است.

(۱-۴۸) تعریف. فرض کنید B یک ایده ال نیم حلقه R باشد. عنصر $x\in R$ را T -عنصربرای B گویند هر گاه عدد طبیعی مانند n و عناصری از R چون $x_1, x_2, \ldots, x_n$ موجود باشند بقسمی که $x=x_1x_2\ldots x_n$، که در آن $x_1^2x_2^2\ldots x_n^2\in B$.

(۱-۴۹) تذکر. مجموعه تمام T -عنصر های ایده ال B را با $T^1(B)$ و ایده ال تولید شده توسط $T^1(B)$ را با $T_1(B)$ نشان می دهیم. اگر $m>1$ آنگاه $T_m(B)$ را به طور بازگشتی به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$T_m(B)=T_1(T_{m-1}(B))$$

(۱-۵۰) تذکر. برای هر عدد طبیعی m, $T_m(B)\subseteq T_{m+1}(B)$ زیرا: $T_0(B)=B$ تعریف می کنیم وبکمک استقراء داریم:

$$T_{m+1}(B)=T_1(T_m(B)\subseteq T_1(T_{m+1}(B))=T_{m+2}(B)$$

(۱-۵۱) تعریف. اگر B یک ایده ال نیم حلقه R باشد، آنگاه رادیکال تی ارین B را با نماد $T^*(B)$ نشان می دهیم وبه صورت $T^*(B)=\bigcup_{m=1}^{\infty}T_m(B)$ تعریف می شود.

(۱-۵۲) قضیه. اگر B یک ایده ال در نیم حلقه R باشد رادیکال تی ارین B برابر اشتراک تمام ایده الهای مقسوم علیه مینیمال کاملا" اول B است.[۱۵]

(۱-۵۳) تعریف. تابع f از R به توی R' را یک همریختی نیم حلقه ای می نامیم هر گاه داشته باشیم:

۱) برای هر a و b از R $\quad f(a+b)=f(a)+f(b)$

۲) برای هر a و b از R $\quad f(ab)=f(a)f(b)$

(۱-۵۴) تعریف. همریختی f را تکریختی گو ییم هر گاه یک به یک باشد. [۱۰]

(۱-۵۵) تعریف. همریختی f از R به R' را یکریختی گو ییم هر گاه یک به یک و پو شا باشد. در این حالت می گوییم که R با R' یکریخت است و می نو یسیم $R \cong R'$.

(۱-۵۶) تعریف. اگر تابع f از R به R' یک همریختی باشد، در این صورت هسته f را با نماد $\ker f$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود: $\quad \ker f=\{x\in R \mid f(x)=0_{R'}\}$

(۱-۵۷) تذکر. اگر f یک همریختی از R به R' باشد، آنگاه مجموعه $\ker f$ یک ایده ال در R است.

(۱-۵۸) تعریف. همریختی $f:R\to R'$ را ماکزیمال گو یند هر گاه به ازای هر $a\in R'$ ، $c_a\in f^{-1}(\{a\})$ موجود باشد بقسمی که به ازای هر $x\in f^{-1}(\{a\})$ داشته باشیم: $\quad x+\ker f\subseteq c_a+\ker f$

(۱-۵۹) تعریف. فرض کنید I یک ایده ال نیم حلقه R باشد. ایده ال I را یک Q-ایده ال گو ییم که در آن Q زیر مجمو عه ای از R است در صورتیکه $R=\bigcup_{q\in Q}(q+I)$ و اگربرای $q_1,q_2\in Q$، $(q_1+I)\cap(q_2+I)\neq\phi$ اگرو تنها اگر $q_1=q_2$.

(۱-۶۰) تعریف. ایده ال I از نیم حلقه R را یک k- ایده ال گو ییم هر گاه به ازای هر a و b از R اگر a و $a+b$ متعلق به I باشند، آنگاه b نیز متعلق به I باشد.[۱۲]

(۱-۶۱) مثال. اگر $I=\{0\}$ باشد، در این صورت I یک k- ایده ال نیم حلقه R است.

(۱-۶۲) تعریف. زیر مجموعه M از نیم حلقه R را یک m- دستگاه گو یند هر گاه به ازای هر $a,b\in M$ نتیجه دهد عنصری چون x از R موجود باشد بقسمی که $axb\in M$. [۱۲]

فصل دوم : ایده الها در نیم حلقه

۱)ایده الهای اول،کاملا" اول،ماکزیمال و تحویل نا پذیر

۲)رادیکال یک ایده ال در A -نیم حلقه

۳) رادیکال تی ارین یک ایده ال در A - نیم حلقه

در این فصل R یک نیم حلقه تعویض پذیر می باشد، مگر آنکه خلاف آن تصریح شود.

۱) ایده ال اول، کاملا" اول، ماکزیمال

با توجه به تعریف (۱-۹) و (۱-۱۰) قضیه زیرارتباط بین مفاهیم ایده ال اول وایده ال کاملا" اول را روشن می سازد.

(۲-۱-۱) قضیه. اگر P یک ایده ال سره نیم حلقه R باشد، آنگاه احکام زیر معادلند:

۱) P اول است

۲) P کاملا" اول است

۳) اگر A و B دو ایده ال در R بقسمی باشند که $P \subset A$ و $P \subset B$ آنگاه $AB \not\subset P$.

برهان. (۳) $\Rightarrow$ (۱) ، فرض کنیم که (۳) برقرار نباشد یعنی A و B دو ایده ال در R باشند بقسمی که $P \subset A$ و $P \subset B$ ولی $AB \subseteq P$. بنا به فرض چون P اول است ، پس نتیجه می شود که $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$. اما با توجه به فرض $P \subset A$ و $P \subset B$ داریم: $P = A$ و $P = B$ که این یک تنا قض است. پس $AB \not\subset P$.

(۲) $\Rightarrow$ (۳)، فرض کنیم که P کاملا" اول نباشد ، از این رو a و bی در R موجودند بقسمی که $ab \in P$ و $a \notin P$ و $b \notin P$.

فرض کنید $Na = \{na | n \in N\}$ که $na = a + ... + a$. فرض کنید C_a نشان دهنده اجتماع گردایه زیر اززیر مجموعه های R باشد:

$$\{P, Ra, Na, P + Ra, P + Na, Ra + Na, P + Ra + Na\}$$

به طور مشابه فرض کنید C_b نشان دهنده اجتماع گردایه زیر باشد:

$$\{P, Rb, Nb, P + Rb, P + Nb, P + Rb + Nb, Nb + Rb\}$$

به وضوح معلوم است که C_a و C_b دو ایده ال در هستند، زیرا به ازای هر $a, a' \in C_a$ و $b, b' \in C_b$، $a + a' \in C_a$ و $b + b' \in C_b$ و به ازای هر $r \in R$ ، $ra \in C_a$ و $rb \in C_b$. بعلاوه $P \subset C_a$ و $P \subset C_b$.

شرط (۳) ایجاب می کند که $C_a C_b \not\subset P$. از طرفی ساختار عناصر $C_a\, C_b$ نشان می دهد که $C_a C_b \subset P$ که این یک تناقض است.

(۱) $\Rightarrow$(۲)، فرض کنید P کاملا" اول و A و B دو ایده ال در نیم حلقه R بقسمی باشند که $AB \subseteq P$. نشان می دهیم که $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$. فرض کنیم $A \not\subset P$ و $B \not\subset P$ دراین صورت $a \in A - P$ و $b \in B - P$ موجودند که چون P کاملا" اول است، لذا $ab \notin P$ که این با $AB \subseteq P$ در تناقض است. پس P اول است.

(۲-۱-۲) قضیه. فرض کنید S یک زیر مجموعه بسته ضربی غیر خالی R باشد. اگر A یک ایده ال R باشد بقسمی که $A \cap S = \phi$، آنگاه ایده الی چون P از R موجود است طوری که $A \subseteq P$ و P نسبت به S ماکزیمال است.

برهان. فرض کنید F نشان دهنده مجموعه تمام ایده الهای R چون I باشد بقسمی که $A \subseteq I$ و $I \cap S = \phi$. واضح است که $A \in F$ و لذا F غیر خالی است. رابطه $(\leq)$ را بر F چنین تعریف می کنیم. به ازای هر $B_1, B_2 \in F$، $B_1 \leq B_2$ اگر و فقط اگر $B_1 \subseteq B_2$. مجموعه F با رابطه $(\leq)$ یک مجموعه جزیی مرتب است. اگر $\{B_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر غیر خالی در F باشد، به وضوح معلوم است که $\bigcup_{i \in I} B_i$ یک ایده ال در R است و یک کران بالا برای زنجیر فوق است. پس بنا به لم زورن F دارای عنصر ماکزیمال است و لذا این عنصر ماکزیمال همان P ی است که در قضیه به دنبال آن بو د یم.

(۲-۱-۳) قضیه. فرض کنید S یک زیر مجموعه بسته ضربی غیر خالی R و P یک ایده ال در R باشند. اگر P نسبت به S یک ایده ال ماکزیمال باشد ، آنگاه P اول است.

برهان. با استفاده از قضیه (۲-۱-۱) کافیست بگوییم اگر B و C دو ایده ال در R باشند بقسمی که $P \subset B$ و $P \subset C$ آنگاه $BC \not\subset P$. برای اثبات این مطلب ، چون P ماکزیمال نسبت به S است، پس $B \cap S \neq \phi$ و $C \cap S \neq \phi$. فرض کنیم که $b \in B \cap S$ و $c \in C \cap S$. چون S بسته ضربی است لذا $bc \in S$ و در نتیجه $bc \in BC \cap S$. از طرفی $P \cap S = \phi$ لذا $bc \notin P$ واین نتیجه می دهد که $BC \not\subset P$.

اگر نیم حلقه یکدار باشد، تعریف (۱-۲۹) وقضیه (۲-۱-۲) به شکل زیر به هم مرتبط می شوند.

(۲-۱-۴) قضیه. فرض کنید M یک ایده ال نیم حلقه یکدار R باشد. در این صورت احکام زیر معادلند:

۱) M ماکزیمال است

۲) M نسبت به $\{1\}$ ماکزیمال است

برهان. (۲) $\Leftarrow$(۱)، چون M ماکزیمال است لذا $M \neq R$ پس $1 \notin M$ و $M \cap \{1\} = \phi$. بنا به قضیه (۲-۱-۲) ایده ال P ی موجود است بقسمی که P نسبت به $\{1\}$ ماکزیمال است و $M \subseteq P$. چون P ماکزیمال نسبت به $\{1\}$ است ، لذا $P \cap \{1\} = \phi$، این نتیجه می دهد که $P \subset R$. چون M ماکزیمال است، لذا $M = P$. پس M نسبت به $\{1\}$ ماکزیمال است.

(۱) $\Leftarrow$(۲)، فرض کنید M ماکزیمال نباشد ، در این صورت ایده الی چون A در R هست که $M \subset A \subset R$. چون $A \subset R$ پس $1 \notin A$ و لذا $A \bigcap \{1\} = \phi$. این نشان می دهد که M نسبت به $\{1\}$ ماکزیمال نیست که یک تناقض است ولذا M ماکزیمال است.

قضیه زیر به سادگی از قضایای (۲-۱-۳) و (۲-۱-۴) حاصل می شود :

(۲-۱-۵) قضیه. فرض کنید R یک نیم حلقه یکدار باشد. اگر M ایده ال ماکزیمال در R باشد، آنگاه M اول است.

مثال زیر نشان می دهد که یک ایده ال ماکزیمال در R بدون یکدار ، ممکن است اول نباشد.

(۲-۱-۶) مثال. فرض کنید R نشان دهنده نیم حلقه ای از اعداد صحیح زوج مثبت با عمل جمع و ضرب معمو لی باشد. اگر $M = \{x \in R | x > 2\}$ آنگاه M ایده ال ماکزیمال R است.

واضح است که به ازای هر x و y متعلق به M ، $x+y$ نیز عضو M است و به ازای هر $r \in R$ ، rx عضو M است. از طرفی { ......۲،۴،۶ } = A تنها ایده ال R است که $M \subset A$ و $A = R$. پس M ماکزیمال است ولی M ایده ال اول نیست زیرا $2 \notin M$ ولی $2 \times 2 = 4 \in M$.

(۲-۱-۷) تذکر. هر ایده ال اول تحویل ناپذیر است.

برهان. باید ثابت کنیم که اگر $A \bigcap B = P$ آنگاه $A = P$ یا $B = P$. می دانیم که همواره $AB \subseteq A \bigcap B$ پس $AB \subseteq A \bigcap B = P$ لذا $AB \subseteq P$ وچون P اول است، بنا به (۱-۹) $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$. از طرفی $A \bigcap B \subseteq A$ و $A \bigcap B \subseteq B$ وچون $P = A \bigcap B$، لذا $P \subseteq A$ یا $P \subseteq B$ ودر نتیجه $A = P$ یا $B = P$، بنابر این P ایده ال تحویل ناپذیر است.

(۲-۱-۸) تذکر. باتوجه به (۲-۱-۷) هر ایده ال اول تحویل ناپذیر است وهمچنین هر ایده ال تحویل ناپذیر قوی، تحویل ناپذیر است.

برهان. باید نشان دهیم که اگر A و B دو ایده ال در R باشندآنگاه $A = P$ یا $B = P$. چون بنا به فرض ایده الی چون P تحویل ناپذیرقوی است لذا $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$. از طرفی $A \bigcap B = P$ لذا $P \subseteq A \bigcap B$ و $A \bigcap B \subseteq A$ و $A \bigcap B \subset B$، پس $P \subseteq A$ و $P \subseteq B$ درنتیجه $P = A$ یا $P = B$.

(۲-۱-۹) قضیه. اگر R یک نیم حلقه دلخواه و P یک ایده ال اول در آن باشد، آنگاه از $aRb \subseteq P$ نتیجه می شود که $a \in P$ یا $b \in P$ وبرعکس.

برهان. چون $aRb \subseteq P$ لذا برای $1 \in R$ داریم $ab \in P$. حال چون P اول است نتیجه می شود که $a \in P$ یا $b \in P$. برعکس آن نیز به آسانی ثابت می شود.

(۲-۱-۱۰) نتیجه. ایده ال P اول است اگرو تنها اگر متمم P در R یک m - دستگاه باشد.

برهان. فرض کنیم P ایده ال اول باشد و P' متمم P باشد، همچنین فرض کنیم که P' یک دستگاه نباشد یعنی برای a و b در P' وهر عنصر x از R، $axb \in P'$. بنا به قضیه (۲-۱-۹)، $a \in P'$ یا $b \in P'$ که این تناقض است لذا P' یک m - دستگاه است. بر عکس. فرض کنیم M یک m- دستگاه باشد وبرای هر عنصر x از R، $axb \in R-M$. فرض کنید a و b در M باشند، چون M یک m -دستگاه است لذا عنصر x از R هست بقسمی که $axb \in M$. از اینرو $a \in R-M$ یا $b \in R-M$.

۲) رادیکال یک ایده ال در نیم حلقه

(۲-۲-۱) قضیه. نیم حلقه تعویض پذیرو یکدار R یک A - نیم حلقه است اگرو تنها اگر متمم هر ایده ال سره، شامل یک مجموعه بسته ضربی غیر خالی باشد.

برهان. فرض کنیم R یک A - نیم حلقه و B یک ایده ال سره آن باشد. پس $1 \notin B$ ولذا $B \cap \{1\} = \phi$ و $R-B$ شامل $\{1\}$ است. پس $R-B \cap \{1\} \neq \phi$ و لذا شامل یک مجموعه بسته ضربی غیر خالی است.

برعکس. فرض کنید B یک ایده ال سره در R و S یک زیر مجموعه بسته ضربی غیر خالی $R-B$ باشد. بنا به قضیه (۲-۱-۲) ایده ال P ی در R هست که $B \subseteq P$ و P نسبت به S ماکزیمال است و چون بنا به قضیه (۲-۱-۳) P اول است، پس حکم تمام است یعنی R یک A - نیم حلقه است.

(۲-۲-۲) نتیجه. اگر R نیم حلقه ای تعویض پذیرو یکدار باشد، آنگاه R یک A - نیم حلقه است.[۴]

برهان. فرض کنید B یک ایده ال سره در R باشد در این صورت چون متمم ایده ال B، شامل مجموعه بسته ضربی غیر خالی $\{1\}$ است، لذا بنا به قضیه (۲-۲-۱)، R یک A -نیم حلقه است.

مثالهای زیر نشان می دهد که A - نیم حلقه هایی موجودند که یکدار نیستند.

(۲-۲-۳) مثال. فرض کنید R نیم حلقه اعداد صحیح نا منفی باشد که در آن $a+b=\max\{a,b\}$ و $ab=\min\{a,b\}$ تعریف شده اند، آنگاه R یکدار نیست و هر ایده ال سره در R اول است.