بسم الله الرحمن الرحیم

آ

دانشگاه حکیم سبزواری

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در ریاضی محض

عنوان

شناسایی دوگان های غیر کانونی قابهای گابور

استاد راهنما

علی اکبر عارفی جمال

استاد مشاور

قدیر صادقی

نگارش

مجید شایان

تابستان ۱۳۹۱

فرم ۱۱۴ –ت

شماره :

تاریخ :

دانشگاه حکیم سبزواری
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی
مدیریت تحصیلات تکمیلی

بسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد/دکتری

با تلاوت آیاتی چند ازکلام ا... مجید جلسه دفاع از پایان نامه آقای مجید شایان دانشجوی رشته ریاضی محض با عنوان «شناسایی دوگان های غیر کانونی قاب های گابور » در ساعت ۱۰ روز یکشنبه مورخ ۹۱/۳/۲۸ در محل دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر تشکیل گردید .

پس از استماع گزارش ارائه شده توسط دانشجو و استاد راهنما هیات داوران و حاضران سئوالاتی را مطرح و آقای مجید شایان به دفاع از موضوع پرداخت و به سئوالات آنها پاسخ گفت .

سپس پایان نامه توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و نمره ۱۸٫۷۵ برابر درجه بسیار خوب برای آن تعیین گردید .

به این ترتیب ضمن تصویب پایان نامه مزبور از این تاریخ آقای مجید شایان به عنوان کارشناس ارشد در رشته ریاضی محض شناخته می شود .

ردیف	نام ونام خانوادگی	سمت	امضاء
۱	دکتر علی اکبر عارفی جمال	استاد راهنما	
۲	دکتر قدیر صادقی	استاد مشاور	
۳	دکتر محمد جانفدا	استاد داور	
۴	دکتر غلامرضا مقدسی	نماینده تحصیلات تکمیلی	

نام و نام خانوادگی وامضای مدیر گروه

ازوری

رونوشت

۱- معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه جهت اطلاع

۲- معاونت پژوهشی دانشگاه جهت اطلاع

۳- آموزش دانشکده جهت درج در پرونده دانشجو

۴- دانشجو

تقدیم به پدر، مادر و همسر عزیزم

قدردانی

به نام خداوندی آغاز می‌کنم که سر آغاز همه آغازها اوست. آسان کننده هر دشواری، زیبا کننده هر خواسته و سرچشمه هر خوبی است. با سپاس به درگاه ایزد لایزال و بی‌همتا که همواره نور امید را در دلم زنده نگه داشت و این قدرت را به من ارزانی داشت تا این مهم به انجام رسد. حال که با فضل و عنایت او موفق به تنظیم و تدوین این پایان نامه شدم، بر خود واجب می‌دانم از تمامی بزرگوارانی که در به فرجام رسانیدن آن از سرچشمه بذل و معرفتشان بهره برده‌ام، کمال تشکر و قدردانی را نمایم. با این که می‌دانم فراتر از توان بیان من است ولی امیدوارم مراتب امتنان و احترام مرا برساند.

در این جا وظیفه خود می‌دانم از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر علی اکبر عارفی جمال که با راهنمایی های خود راهگشای اینجانب بوده و با صبر و حوصله فراوان گره از مشکلاتم گشودند، کمال تشکر و قدردانی را نمایم. هم چنین از آقای دکتر قدیر صادقی که زحمت مشاوره این پایان نامه را تقبل کردند، سپاسگذارم. از استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمد جانفدا که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند صمیمانه قدردانی می‌کنم.

دانشگاه حکیم سبزواری

فرم چکیده پایان نامه دوره ی تحصیلات تکمیلی
دفتر مدیریت تحصیلات تکمیلی

نام خانوادگی دانشجو: شایان	**نام:** مجید	**ش دانشجویی:** ۸۹۱۳۱۲۲۰۵۳
استاد راهنما: آقای دکتر علی اکبر عارفی جمال	**استاد مشاور:** آقای دکتر قدیر صادقی	
دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** آنالیز
مقطع: کارشناسی ارشد	**تاریخ دفاع:** ۱۳۹۱/۳/۲۸	**تعداد صفحات:** ۱۰۳

عنوان پایان‌نامه: **شناسایی دوگان های غیر کانونی قاب های گابور**

کلیدواژه ها: قاب گابور، قاب دوگان، فرمول بازسازی، مولد دوگان، B- اسپلاین.

چکیده:

فرض کنید $g \in L^2(R)$ تابعی تکیه گاه فشرده باشد به طوری که انتقال های صحیح آن یعنی $\{T_k g\}_{k\in Z}$ افرازی واحد تشکیل دهند. ثابت می کنیم به ازای پارامترهای انتقال و مدولاسیون مناسبی، تابع g مولد یک قاب گابور است و مولد دوگان غیر کانونی مانند h دارد که h از ترکیبات خطی متناهی توابع $\{T_k g\}_{k\in Z}$ تشکیل شده است و ضرایب این ترکیبات خطی به طور صریح داده شده اند.

در ادامه به معرفی ساختاری صریح برای زوج های مولد دوگان قاب های گابور می پردازیم و ثابت می کنیم چند جمله های دلخواهی که روی بازه های به اندازه کافی بزرگ، تحدید شده باشند، به ازای پارامتر مدولاسیون به اندازه کافی کوچک، قاب های گابور تولید می کنند. متاسفانه هیچ تابع مشابهی نمی تواند مولد دوگان چنین قاب هایی باشد اما ثابت می کنیم که مولد قاب دوگان این قاب ها یک B- اسپلاین است. در پایان برای قاب های گابور تولید شده توسط تابع تکیه گاه فشرده دلخواه g که انتقال های صحیح آن، افرازی واحد تشکیل می دهند(مانند B- اسپلاین)، رده ای از مولد قاب های دوگان معرفی می کنیم که از ترکیبات خطی انتقال های صحیح تابع g تشکیل می شوند.

امضای استاد راهنما

فهرست مطالب

پیشگفتار

مفهوم قاب برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین [1] و شافر[2] ارائه شد. بعد ها یانگ [3]کتابی کامل در مورد قاب ها منتشر کرد. نظریه قاب ها در بسیاری از شاخه های علوم نظیر پردازش سیگنال و آنالیز داده ها به کار می روند. در این میان، قاب های گابور و موجک بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته اند. این قاب ها در سال ۱۹۴۶ میلادی توسط گابور [4] معرفی شد ولی پیش از آن، با عنوان ویل - هایزنبرگ[5] شناخته می شدند و امروزه به دلیل کاربرد زیاد در علوم مختلف مورد توجه محققان قرار گرفته است. ایده به کار بردن قاب ها در فضای هیلبرت، جهت باز سازی عناصر $L^2(\mathbb{R})$ توسط گراسمن [6] مطرح شد و اغلب نتایج این بخش نیز توسط دبیشی[7] و گراسمن و میر [8] ارائه شده اند که می توانیم آن ها را در مراجع [۱۵] و [۱۴] بیابیم. از لحاظ کارایی، خارج فضای $L^2(\mathbb{R})$ محدودیت

[1] Duffin

[2] Schaeffer

[3] Young

[4] D. Gabor

[5] Weyl-Heisenberg

[6] A. Grossmann

[7] Daubechies

[8] Meyer

هایی وجود دارد. عمومیت بخشیدن و نتایج جدیدی که از تلفیق روش های به کار برده شده روی $L^2(\mathbb{R})$ و فچینگر[۹]- گروچنیگ [۱۰]حاصل شد، منسوب به والنت است که در مرجع [۳۹] آمده است. یکی از مشکلات اساسی، محاسبه عملگر قاب گابور بود که توسط والنت[۱۱] مورد بررسی قرار گرفت. وی سری هایی را معرفی کرد که تحت شرایطی خاص، به سرعت به تابع مولد قاب همگرا شود. نمایش والنت برای عملگر قاب اغلب اوقات محاسبات را ساده می کرد و کار با آن آسان تر بود. اخیرا کاسازا[۱۲] و کریستنسن[۱۳] شرایط ضعیف تری برای تابع مولد قاب ارائه نموده اند که ایجاب می کند سیستم ویل- هایزنبرگ متناظر از بالا کران دار باشد. اگر یک قطعه موسیقی را به عنوان یک سیگنال تصور کنیم، این طیف شامل فرکانس های مختلفی است که در طول زمان جریان دارد. تصور ما چنین است که گوش در هر لحظه ترکیبی از فرکانس های مختلف را می شنود. از نظر تئوری می توان یک سیگنال را توسط تبدیل فوریه [۱۴] نظیرش، باز سازی کرد. تجزیه و تحلیل فرکانس نسبت به زمان توسط تبدیل گابور و موجک انجام می شود به این ترتیب که با تقسیم یک فرکانس به قطعات متوالی و کوتاه تر می توان ضرایب فوریه ی هر قطعه را محاسبه کرد. اگر $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$یک قاب گابور باشد می توان با انتخاب یک دوگان مناسب مانند $\{E_{mb}T_{na}h\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ فرمول بازسازی را برای $f \in L^2(\mathbb{R})$ به صورت زیر نوشت

$$f = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \langle f, E_{mb}T_{na}h\rangle E_{mb}T_{na}g, \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

در این پایان نامه نمی خواهیم وارد بحث تبدیل موجک و گابور شویم و تنها به معرفی دوگان های قاب های گابور می پردازیم. فصل اول شامل هفت بخش می باشد که در بخش اول قاب ها رو به طور عام معرفی می کنیم و در بخش های بعدی عملگر و دوگان قاب، انواع قاب و ویژگی آشفتگی و پایداری قاب را رو فضای هیلبرت معرفی می کنیم. فصل دوم مشتمل بر چهار بخش می باشد که در بخش اول قاب گابور را معرفی و در بخش دوم عملگر قاب

---

[۹] Feichtinger

[۱۰] Grochenig

[۱۱] Walnut

[۱۲] Casazza

[۱۳] Christensen

[۱۴] Fourier Transform

گابور معرفی می شود. دو بخش آخر را نیز به تبدیل زاک و دوگان قاب گابور اختصاص داده ایم. آخرین فصل هم به شناسایی دوگان قاب های گابور می پردازد و شامل چهار بخش است. دربخش اول قاب دوگان هایی را معرفی می کنیم مولد آن ها تکیه گاه فشرده دارند. بخش دوم در مورد قاب دوگان هایی است که مولد صریح دارند و در دو بخش پایانی، دوگان هایی معرفی می شوند که مولد آن ها یک چند جمله ای یا B- اسپلاین باشد. البته تحقیق هنوز هم ادامه دارد و هنوز هم شاهد ارائه کارهای تازه ای در این حیطه از آنالیز هارمونیک هستیم. این پایان نامه بر گرفته از مقالات زیر است:

1. O. Christensen., R. Young Kim, *On dual Gabor frame pairs generated by polynomials.* J. Fourier Anal. Appl., 16 (2010), 1-16.

2. O. Christensen, *Pairs of dual Gabor frames with compact support and desired frequency localization.* Appl. Comput. Harmon. Anal., 20 (2006), 403–410.

3. J. Lemvig, *Wavelet frames and their duals.* Ph.D thesis. Technical University of Denmark, 2005.

4. C.E. Heil and D.F. Walnut, *Continuous and discrete wavelet transforms.* SIAM Rev., 31(4) (1989), 628–666.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل به بررسی مفهوم قاب در فضای هیلبرت می پردازیم. قاب ها را می توان حالت عمومی تری از پایه ریس و پایه متعامد یکه در نظر گرفت. به ویژه هر پایه ریس و پایه متعامد یکه یک قاب است. در بخش اول عملگر قاب را معرفی می کنیم سپس تجزیه قاب را از طریق دوگان کانونی بررسی کرده و در ادامه شرایط قاب و خواص قاب دوگان را بررسی می کنیم. در انتها ارتباط بین قاب و پایه شودر [۱]را در فضای هیلبرت مطرح می کنیم. برای مباحث تکمیلی و اثبات اکثر قضایا به یکی از مراجع [۹]یا [۱۸]رجوع کنید.

۱.۱ معرفی قاب ها

در این بخش به معرفی قاب ها درفضاهای هیلبرت $\mathcal{H}$ و برخی از ویژگی های آن ها را می پردازیم. در سر تا سر این فصل $\mathcal{H}$ معرف یک فضای هیلبرت جدایی پذیر است.

تعریف ۱.۱. فرض کنید $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ یك عملگر كران دار و دوسویی باشد، تصویر هر پایه متعامد یکه تحت

[۱]Schauder basis

U را یك پایه ریس [۲] برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می نامیم.

تعریف ۲.۱. دنباله $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ از بردار ها در فضای باناخ X را در نظر بگیرید:

۱) دنباله $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ یك پایه (شودر) برای X است هرگاه برای هر $f \in X$ ضرایب عددی منحصر به فرد $\{c_i(f)\}_{i=1}^{\infty}$ موجود باشد به طوری که

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(f) e_i.$$

۲) پایه $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ از فضای باناخ X را یك پایه غیر شرطی یا نامشروط [۳] گوییم هرگاه هر سری به صورت $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ به طور غیر شرطی همگرا باشد. به عبارتی هر تجدید آرایش $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i(k)} e_{i(k)}$ از سری فوق همگرا باشد.

تعریف ۳.۱. اگر $\overline{span\{f_k\}_{k=1}^{\infty}} = \mathcal{H}$ آن گاه دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ کامل [۴]نام دارد.

لم ۴.۱. [۹] *اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد عبارات زیر معادل اند:*

الف) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ کامل است.

ب) اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$، $\langle f, f_k \rangle = 0$ آن گاه $f = 0$.

تعریف ۵.۱. دنباله $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$درفضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است، اگر مقادیر ثابت و مثبت B و A موجود باشند به طوری که

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{۱.۱}$$

در این تعریف A و B به ترتیب کران های پایین و بالای قاب نام دارند. ثابت های A و B یکتا نیستند. مثلا اگر B یك کران بالای قاب باشد هر عدد حقیقي بزرگتر از B مي تواند یك کران بالای قاب باشد.

---

[۲] Riesz basis

[۳] Unconditional basis

[۴] Complete

سوپریمم همه ی کران های پایین قاب نیز یك کران پایین است و کران پایین بهینه نام دارد. اینفیمم تمام کران های بالا هم یك کران بالا است که کران بالاي بهینه نام دارد. اگر در تعریف بالا $A = B$، آنگاه قاب را چسبان مي نامیم. در حالتی که $A = B = ۱$ قاب را چسبان نرمال می نامیم.

دنباله $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty} \in \mathcal{H}$ را دنباله بسل [۵] گوییم هرگاه حداقل نامساوی دوم قاب برقرار باشد و B را کران بسل برای $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ می‌گوییم. فرض کنید $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را یک دنباله قاب [۶] نامیم هرگاه $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب برای $\overline{span}\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ باشد. دو دنباله ی $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=۱}^{\infty}$ را هم متعامد [۷] نامیده می شوند هر گاه برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ داشته باشیم

$$\langle f_k, g_j \rangle = \delta_{kj}.$$

تعریف ۶.۱. اگر $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد و با حذف یک عضو دلخواه از آن، دنباله ی حاصل هم چنان یک قاب در $\mathcal{H}$ باشد، چنین قابی را قاب اضافی[۸]می نامیم و اگر با حذف یک عضو دلخواه از یک قاب، دنباله ی باقی مانده قاب نباشد، چنین قابی را یک قاب دقیق[۹] می نامیم.

در ادامه برخي از ویژگی هاي مفید قاب ها را معرفی مي کنیم.

قضیه ۷.۱. *دنباله $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ در $\mathcal{H}$ یک قاب است اگر و تنها اگر*

$$\{c_k\} \longrightarrow \sum_k c_k f_k \qquad , \ell^۲ \longrightarrow \mathcal{H}$$

نگاشتي خوشتعریف از $\ell^۲$ بروي $\mathcal{H}$ باشد.

---

[۵] Bessel sequence

[۶] Frame sequence

[۷] Biorthonormal

[۸] Overcomplete

[۹] Exact

اثبات. براي اثبات قضيه ۵.۴.۱ از مرجع[۹] راببینید. □

تعریف ۸.۱. قاب های $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ روی فضاهای هیلبرت $\mathcal{H}$و $\mathcal{K}$ معادل هستند اگر و تنها اگر عملگر وارون پذیر و کران داری چون $T:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{K}$موجود باشند به طوری که برای هر $k\in\mathbb{N}$، $Tf_k=g_k$.

در حالت کلی هر دو پایه ریس معادل یکدیگرند ولی ممکن است دو قاب چنین نباشند. به عنوان مثال، پایه نرمال استاندارد$\mathbb{R}^2$ را به صورت $\{e_1,e_2\}=\{(1,0),(0,1)\}$ در نظر بگیرید. قاب های چسبان نرمال $\{0,0,e_1,e_2\}$ و $\{e_1,e_2,0,0\}$ از لحاظ تعریف خواص یکسانی دارند اما معادل نیستند. واضح است که افزودن صفرها ساختگی بوده و نشان می دهد که شرایط معادل بودن قاب ها بسیار محدود است.

قضیه ۹.۱. *فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با کران های A و B باشد و $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ عملگری کران دار و پوشا باشد، آنگاه $\{Uf_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای$\mathcal{H}$ با کران های $A\|U\|^2$ و $B\|U^{\dagger}\|^{-2}$ می باشد که $U^{\dagger}:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ نگاشت شبه وارون [10] نظیر U است و*

$$UU^{\dagger}x=x,\quad \forall x\in R_U$$

که در آن R_U برد [11] عملگر U است.

اثبات. نتیجه ۵.۳.۲ از مرجع [۷] را ببینید. □

۲.۱ عملگر قاب و دوگان قاب کانونی

در این بخش عملگر قاب را روی فضای هیلبرت تعریف و ویژگی های آن را معرفی می کنیم سپس به کمک آن دوگان کانونی قاب را تعریف می کنیم.

[10] Pseudo inverse

[11] Range

تعریف ۱۰.۱. اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد عملگر Tبا ضابطه

$$T : \ell^2 \to \mathcal{H}, \quad T\{c_k\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k$$

را عملگر پیش قاب[۱۲] می نامیم. عملگر الحاقی T را به صورت

$$T^* : \mathcal{H} \to \ell^2, \quad T^*(f) = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=0}^{\infty}$$

نمایش می دهیم و عملگر تجزیه [۱۳] می نامیم. هم چنین عملگر

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad Sf = TT^*f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle f_k$$

را عملگر قاب[۱۴] می نامیم.

عملگر S خوشتعریف است، زیرا $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$یک دنباله بسل نیز هست. هم چنین شرط (۱.۱) را به صورت

$$A\|f\|^2 \leq \langle Sf, f\rangle \leq B\|f\|^2$$

نوشته می شود زیرا

$$\langle Sf, f\rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle f_k, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle \langle f_k, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, f_k\rangle \overline{\langle f, f_k\rangle} = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, f_k\rangle|^2.$$

واضح است که عملگر قاب کران دار و خود الحاق است، پس

$$AI \leq S \leq BI$$

که در آن $\leq$ یک ترتیب جزئی روی عملگرهای خودالحاق است. پس S مثبت و از پایین کران دار است و به طور معادل یک به یک و بردش بسته است. در لم بعدی خواهیم دید که S هم چنین معکوس پذیر است.

فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب و T عملگری کران دار و وارون پذیر روی $\mathcal{H}$ باشد. بنا به گزاره (۹.۱) دنباله

[۱۲] Pre-frame operator

[۱۳] Analysis operator

[۱۴] Frame operator

$\{Tf_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب است و بنا به تعریف ۸.۱ با قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ معادل است. هم چنین هر قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ با یک قاب چسبان نرمال معادل است، پس قاب $\{S^{-1/2}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را که در آن $S^{-1/2}$ ریشه دوم مثبت S^{-1} است با $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ معادل است و بنا به قضیه ۵.۳.۴ از مرجع [۷] این قاب یک قاب چسبان نرمال با کران ۱ است.

لم ۱۱.۱. [۱۱] *فرض $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب روی $\mathcal{H}$ با کران های بهینه A و B و نیز S عملگر قاب وابسته به آن باشد، آن گاه گزاره های زیر برقرارند:*

(۱) *عملگر S مثبت، وارون پذیر، کران دار و خودالحاق است و* $B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$.

(۲) $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *یک قاب با کران های بهینه A^{-1} و B^{-1} است و S^{-1} عملگر قاب نظیر* $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *است.*

اثبات. برای اثبات نتیجه ۲.۱.۴ از مرجع [۲۲] را ببینید. □

یکی از مهم ترین خواص قاب ها خاصیتی موسوم به خاصیت بازسازی [۱۵]است. فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب با عملگر قاب S باشد، آنگاه

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1}f_k\rangle f_k, \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{۲.۱}$$

سری اخیر به صورت نامشروط همگراست. در لم قبل دیدیم که $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$یک قاب است و با $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ معادل است. دنباله $\{S^{-1}f_k\}_{k=1}^{\infty}$ را دوگان کانونی [۱۶]قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ می نامیم.

---

[۱۵] Reconstruction

[۱۶] Canonical dual

۳.۱ دوگان قاب

یکی از اهداف اصلی نظریه قاب ها یافتن ضرایب مناسبی به جای ضرایب $\{\langle f, S^{-1} f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ در رابطه ی $f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, S^{-1} f_k\rangle f_k$ است. پاسخ نه چندان کاملی به این مبحث یافتن دوگان هایی برای یک قاب است. در این مبحث ضمن معرفی دوگان یک قاب به همراه مثال هایی شرایط وجود آن ها را نیز بررسی می کنیم.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دو دنباله بسل برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشند به طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$، داشته باشیم

$$f = \sum_{k} \langle f, g_k\rangle f_k, \tag{۳.۱}$$

آن گاه $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ را دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ می نامیم.

دوگان دارای خاصیت تقارنی است یعنی اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دوگان $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ باشد، $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ نیز دوگان $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ است. قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ حداقل یک دوگان کانونی به صورت $\{S^{-1} f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دارد اما در حالت کلی می تواند بیش از یک دوگان داشته باشد. چنین دوگان هایی را دوگان غیر کانونی (جایگزین[۱۷]) می نامند. فرمول (۳.۱) که فرمول باز سازی نیز خوانده می شود، یکی از مهم ترین ابزارها در کاربرد قاب ها است. متاسفانه در حالت دوگان کانونی با معکوس یک عملگر کران دار روی یک فضای هیلبرت عموما نامتناهی مواجه هستیم که این معکوس به آسانی به دست نمی آید. از طرف دیگر، هیچ تضمینی وجود ندارد که ویژگی های خاصی از قاب $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ به دوگان کانونی $\{S^{-1} f_k\}_{k=1}^{\infty}$ نیز منتقل گردد. لم بعد نشان می دهد که هر قاب اضافی دارای دوگانی به جز دوگان کانونی است.

لم ۱۳.۱. *فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب اضافی در $\mathcal{H}$ باشد، آن گاه قاب $\{g_k\} \neq \{S^{-1} f_k\}_{k=1}^{\infty}$ موجود است*

---

[۱۷] Alternate

به طوری که

$$x = \sum_k \langle x, g_k \rangle f_k \qquad x \in \mathcal{H}$$

اثبات. برای اثبات لم ۵.۶.۱ از مرجع [۷] را ببینید. □

لم ۱۴.۱. *فرض کنید $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ دو دنباله بسل در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ بوده و دوگان یکدیگر باشند، آن گاه اگر یکی از دنباله ها قاب باشند، دیگری نیز قاب است.*

اثبات. با توجه به تعریف دوگان واضح است. □

لم ۱۵.۱. *اگر T و S عملگرهای خطی و کران دار از $\mathcal{H}$ به ℓ^2 و $S^*T = I$، آن گاه برد S و T بسته بوده و عملگرهای الحاقی نظیر آن ها پوشا هستند.*

اثبات. اگر $S^*T = I$، آن گاه به سادگی می توان دید که S^* پوشاست. فرض کنیم $y \in \overline{R_T}$ و $Tx_n \to y$ آن گاه با اثر دادن S^* داریم

$$x_n = S^*Tx_n \to S^*y,$$

در نتیجه $Tx_n \to TS^*y$ پس $y = TS^*y$ عضوی از R_T است، در نتیجه برد T بسته است. حال ملاحظه می کنیم که $T^*S = (S^*T)^* = I^* = I$، بنابراین می توان دید که T^* پوشا و برد Sبسته است. □

لم ۱۶.۱. *اگر T و S عملگرهای خطی و کران دار از $\mathcal{H}$ به ℓ^2 باشند. $S^*T = I$ اگر و فقط اگر سه شرط زیر برقرار باشند:*

(۱) *S^* پوشاست.*

(۲) *T یک به یک است.*

(۳) *TS^* خود توان است.*

اثبات. نخست فرض می کنیم $S^*T = I$. چنان که در اثبات لم قبل دیدیم،S^* و T^* پوشا هستند. از طرفی می دانیم که $kerT = (R_{T^*})^{\perp} = \{۰\}$ بنا بر این Tیک به یک است. با یک محاسبه ساده، (۳) نیز نتیجه می شود. بالعکس فرض می کنیم هر سه شرط برقرار باشند. قرار می دهیم $P := S^*T$ و $Q := TS^*$. از (۱) نتیجه می شود $R_Q = R_T$. به ویژه بنا به (۳)، $T = QT$. از طرفی $QT = TS^*T = TP$، پس $T(I-P) = ۰$ و بنا به (۲) $I - P = ۰$ در نتیجه $P = I$ یعنی $S^*T = I$. □

لم ۱.۱۷. *فرض کنید $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ و $\{g_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دو قاب به ترتیب با عملگر های پیش قاب T و U باشند، آن گاه گزاره های زیر معادل اند:*

الف) $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ *یک دوگان برای* $\{g_k\}_{k=۱}^{\infty}$ *است،*

ب) $TU^* = I$،

ج) $UT^* = I$،

د) $(T^*U)^۲ = T^*U$.

اثبات. الف) $\Longleftarrow$ ب)

اگر $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$دوگان$\{g_k\}_{k=۱}^{\infty}$ باشد دراین صورت برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم

$$\begin{aligned} f &= \sum \langle f, g_i \rangle f_i \\ &= T\{\langle f, g_i \rangle\}_{i=۱}^{\infty} = TU^*f. \end{aligned}$$

یعنی $TU^* = I$.

اثبات های ب) $\Longleftarrow$ ج) و ج) $\Longleftarrow$ د) بدیهی است.

د) $\Longleftarrow$ ج)

فرض کنیم $(T^*U)^۲ = T^*U$. بنا به لم ۱.۱۶ کافی است ثابت کنیم شرایط (۱) و (۲) برقرار هستند. چون عملگر