دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش جبر

موضوع:

TI-زیرگروههای گروههای متناهی

استاد راهنما:

دکتر هوشنگ بهروش

نام دانشجو:

سید کمال مصطفی پور

تیر ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم و دوستان گلم

سپاس‌گزاری...

خدای را سپاس که گویندگان به عرصه‌ی ستایش او نمی‌رسند، شماره‌گران از عهده‌ی شمردن نعمت‌هایش برنیایند و هوش‌های ژرف به حقیقتش دست نیابند.

سپاس و قدردانی از زحمات استاد ارزشمندم جناب آقای دکتر هوشنگ بهروش که مرا در به ثمربخشیدن این پایان‌نامه یاری رساندند. همچنین از داور داخلی جناب آقای دکتر علی سرباز جانفدا و داور خارجی جناب آقای دکتر رضا سزیده که زحمت داوری این پایان‌نامه بر عهده‌ی ایشان می‌باشد تشکر و قدردانی می‌نمایم. از جناب آقای دکتر قاسمی نیز به خاطر زحمات و تلاشی که برای بنده کشیدند کمال تشکر را دارم. همچنین از هم‌کلاسی‌های عزیزم و هم‌اتاقی‌های گلم نیز که همیشه مرا یاری نموده‌اند تشکر می‌نمایم.

نام دانشجو: سید کمال مصطفی پور
تاریخ: تیر ۱۳۹۲

چکیده

زیرگروه H از گروه متناهی G را TI-زیرگروه می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in G$ داشته باشیم، $H \cap H^x = 1$ یا $H \cap H^x = H$. گروه متناهی که تمام زیرگروههای غیرآبلی آن TI-زیرگروه هستند، NATI-گروه متناهی نام دارد. در این پایان‌نامه NATI-گروههای متناهی را در دو حالت پوچ‌توان و غیرپوچ‌توان رده‌بندی می‌کنیم.

واژگان کلیدی

TI-زیرگروهها، گروههای فروبنیوس، NATI-گروههای متناهی.

فهرست مطالب

پیشگفتار

یکی از مباحث مهم که ریاضیدانان در شاخه‌ی جبر روی آن کار می‌کنند، بسط و توسعه‌ی نظریه‌ی گروهها و شناخت گروههای متناهی بر اساس زیرگروههایشان می‌باشد. در این میان رده‌بندی گروههای متناهی با زیرگروههای خاصی که TI-زیرگروه نام دارند از اهمیت خاصی برخوردار است.

در سراسر این پایان‌نامه G به عنوان یک گروه متناهی فرض شده است. اگر H زیرگروهی از G باشد که به ازای هر $x \in G$، $H \cap H^x = ۱$ یا $H \cap H^x = H$، آنگاه H را TI-زیرگروه G می‌نامند(اشترک بدیهی). گروه متناهی G را که تمام زیرگروههای غیرآبلی آن TI-زیرگروه هستند، NATI-گروه متناهی نام دارد. برای نمونه والز[۱]در [۷] گروههای که همه زیرگروههایشان، TI-زیرگروه هستند را توصیف کرده است. هوشیم و تیمسفلد[۲]در [۲] گروههای با یک TI−۲-زیرگروه آبلی را بررسی کرده‌اند. اخیراً گئو[۳] و همکارانش در [۱] گروههای که همه زیرگروههای آبلی آنها TI-زیرگروه هستند را رده‌بندی کرده‌اند. با کمک گرفتن از یافته‌های بالا، هدف این پایان‌نامه مطالعه NATI-گروههای متناهی است. ما یک رده‌بندی از NATI-گروههای متناهی در حالت پوچ‌توان و غیرپوچ‌توان بدست می‌آوریم.

در فصل اول تعاریف و قضایایی مقدماتی آورده شده است. فصل دوم به بررسی گروههای پوچ‌توان و فروبنیوس پرداخته شده است. در فصل سوم NATI-گروههای متناهی را در حالت پوچ‌توان و غیرپوچ‌توان رده‌بندی می‌کنیم.

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تدوین گردیده است:

- Lu, J. and Pang, L. *A note on TI-subgroups of finite groups*. Proc. Indian Academy of Sciences, Vol. 122, No. 1, pp. 75-77. (2012)

---

[۱] Walls
[۲] Hochheim and Timmesfeld
[۳] Guo

فصل ۱

تعاریف وقضایایی مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف، لم‌ها وقضایایی مقدماتی آورده شده است. خواننده باید تا حدی با مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی گروه آشنایی داشته باشد. در سراسر این فصل G گروه متناهی فرض شده است.

۲.۱ مفاهیم بنیادی

تعریف ۱.۲.۱. می‌گوییم G بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل می‌کند (یا G ترتیب اعضای X را عوض می‌کند) اگر به هر $g \in G$ و هر $x \in X$ ؛ عضو یکتای $xg \in X$ ، طوری متناظر شود که به ازای هر $x \in X$ و $g_1, g_2 \in G$؛ داشته باشیم

$$(xg_1)g_2 = x(g_1g_2)$$

و

$$x1 = x.$$

بخواهیم روشنتر بیان کنیم، می‌گوییم تحت این شرطها G بر X از راست عمل می‌کند.

مثال ۲.۲.۱. فرض می‌کنیم X مجموعه‌ی ناتهی دلخواهی باشد و $G \leqslant S_X$. در این صورت G بر X عمل می‌کند. در این حالت هر $g \in G$ یک نگاشت $X \longrightarrow X$ است و به ازای $x \in X$، xg نگاره x تحت نگاشت g است. شرط $(xg_1)g_2 = x(g_1g_2)$ به موجب تعریف ترکیب نگاشتها و شرط $x1 = x$، بنابر تعریف عضو همانی ۱ از S_X برقرار است. این عمل را عمل طبیعی G بر X می‌نامند.

قضیه ۳.۲.۱. *فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. در این صورت به هر $g \in G$ نگاشت $\rho_g : X \longrightarrow X$ ، که با ضابطه‌ی $\rho_g : x \longmapsto xg$ تعریف شده، متناظر می‌شود و این نگاشت جایگشتی از X است. علاوه‌براین، نگاشت $\rho : G \longrightarrow S_X$ که با ضابطه‌ی $\rho : g \longmapsto \rho_g$ تعریف شده یک همریختی است. این همریختی را نمایش جایگشتی G متناظر با این عمل گروهی می‌نامند.*

برهان. فرض می‌کنیم $g \in G$، بنابر تعریف، ρ_g نگاشتی است از X به توی خودش. با استفاده از اصول موضوع تعریف ۱.۲.۱، به ازای $g_1, g_2 \in G$ و $x \in X$ داریم

$$x\rho_{g_1g_2} = x(g_1g_2) = (xg_1)g_2 = (x\rho_{g_1})\rho_{g_2} = x(\rho_{g_1}\rho_{g_2}),$$

بنابراین

(الف) $$\rho_{g_۱g_۲} = \rho_{g_۱}\rho_{g_۲}.$$

علاوه‌براین، با استفاده از اصول موضوع تعریف ۱.۲.۱ داریم

$$x\rho_۱ = x۱ = x,$$

بنابراین

(ب) $$\rho_۱ = ۱ \in S_X.$$

بنابر (الف) و (ب)؛

$$\rho_g\rho_{g^{-۱}} = ۱ = \rho_{g^{-۱}}\rho_g.$$

لذا ρ_g یک نگاشت وارون‌پذیر از X به توی خودش است، یعنی، یک جایگشت از X. سپس (الف) نشان می‌دهد که ρ یک همریختی از G به توی S_X است. □

تعریف ۴.۲.۱. فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. این عمل را عمل صادق[۱] گوییم، اگر نمایش جایگشتی متناظر G یک به یک باشد.

قضیه ۵.۲.۱. *فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند و داشته باشیم $x \in X$. قرار می‌دهیم: $\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G : xg = x\}$. در این صورت $\mathrm{Stab}_G(x)$ زیرگروهی از G است؛ که پایدارساز x در G نامیده می‌شود.*

برهان. به موجب تعریف ۱.۲.۱، $۱ \in \mathrm{Stab}_G(x)$، بنابراین $\mathrm{Stab}_G(x) \neq \varnothing$. فرض می‌کنیم $g_۱, g_۲ \in \mathrm{Stab}_G(x)$. در این صورت $xg_۱ = x = xg_۲$، از این‌رو

$$x(g_۱g_۲^{-۱}) = (xg_۱)g_۲^{-۱} = (xg_۲)g_۲^{-۱} = x۱ = x,$$

و در نتیجه $g_۱g_۲^{-۱} \in \mathrm{Stab}_G(x)$. از این رو $\mathrm{Stab}_G(x) \leqslant G$. □

لم ۶.۲.۱. *فرض می‌کنیم G بر X عمل کند، و ρ نمایش جایگشتی متناظر G باشد. در این صورت*

$$\mathrm{Ker}\,\rho = \bigcap_{x\in X} \mathrm{Stab}_G(x).$$

برهان. به [[۱۰]، لم ۹.۴] رجوع شود. □

لم ۷.۲.۱. *فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند، و همچنین $x \in X$. در این صورت*

[۱] faithful

$$| G : \mathrm{Stab}_G(x) | = | x \text{ مدار } |.$$

برهان. فرض می‌کنیم X_1 معرف مدار x باشد، قرار می‌دهیم $H = \mathrm{Stab}_G(x)$ و فرض می‌کنیم Y معرف مجموعه‌ی همه‌ی همدسته‌های راست H در G باشد. در این صورت

$$X_1 = \{xg : g \in G\}.$$

نگاشت

$$\mu : X_1 \longrightarrow Y$$

را با ضابطه‌ی

$$\mu : xg \longmapsto Hg \qquad (\text{به ازای هر } g \in G)$$

تعریف می‌کنیم. باید تحقیق کنیم که این نگاشت خوش‌تعریف است. فرض می‌کنیم $g_1, g_2 \in G$. لازم است مطمئن شویم که هرگاه $xg_1 = xg_2$، Hg_1 نیز مساوی Hg_2 می‌شود. با استفاده از اصول موضوع تعریف ۱.۲.۱؛ مشاهده می‌کنیم هرگاه $xg_1 = xg_2$ آنگاه

$$x(g_1g_2^{-1}) = (xg_1)g_2^{-1} = (xg_2)g_2^{-1} = x1 = x,$$

بنابراین

$$g_1g_2^{-1} \in \mathrm{Stab}_G(x) = H,$$

در نتیجه $Hg_1 = Hg_2$، آنچه مطلوب بود.

به‌علاوه؛ به عکس ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $Hg_1 = Hg_2$ آنگاه $g_1g_2^{-1} \in H$، از این رو

$$x(g_1g_2^{-1}) = x,$$

بنابراین

$$xg_1 = x((g_1g_2^{-1})g_2) = xg_2$$

این نشان می‌دهد که μ نگاشتی یک به یک است. به موجب تعریف واضح است که μ پوشاست، بنابراین در واقع μ نگاشتی دوسویی است. از این‌رو

$$| X_1 | = | Y |,$$

آنچه ادعا شده بود. $\square$

تعریف ۸.۲.۱. فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. این عمل ترایا[1] خوانده می‌شود اگر دارای تنها یک مدار باشد. عملی را که ترایا(انتقالی) نباشد ناترایا می‌نامند.

تعریف ۹.۲.۱. فرض می‌کنیم G گروهی دلخواه باشد. به ازای هر $x \in G$، تعریف می‌کنیم:

$$C_G(x) = \{g \in G : gx = xg\}.$$

به آسانی تحقیق می‌شود که $C_G(x)$ یک زیرگروه G است؛ این زیرگروه مرکزساز x در G نامیده می‌شود.

لم ۱۰.۲.۱. *فرض می‌کنیم G متناهی و p کوچکترین مقسوم‌علیه اول $| G |$ باشد. اگر H زیرگروهی از شاخص p در G باشد، $H \trianglelefteq G$.*

برهان. به [[۱۰]، لم ۱۸.۴] رجوع شود. $\square$

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد، تعریف می‌کنیم

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x) = \{g \in G : gx = xg, \forall\, x \in G\},$$

که یک زیرگروه G است، آن را مرکز G می‌نامیم و با $Z(G)$ نمایش می‌دهیم. در نتیجه داریم اگر $x \in G$ و $H = C_G(x)$ آنگاه $x \in Z(H)$، که

$$Z(H) = \{h \in H : hx = xh, \forall\, x \in H\}.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض می‌کنیم $H \leq G$ و تعریف می‌کنیم

$$H_G = \bigcap_{x \in G} (g^{-1} H g).$$

در این صورت $H_G \trianglelefteq G$ و هرگاه $K \leq H \leq G$ که $K \trianglelefteq G$، آنگاه $K \leq H_G$. لذا H_G بزرگترین زیرگروه نرمال یکتای G است که در H قرار دارد: H_G مغز[2] (نرمال درونی) H در G نامیده می‌شود.

قضیه ۱۳.۲.۱. *هرگاه $H \trianglelefteq G, K \trianglelefteq G$ آنگاه $H \cap K \trianglelefteq G$. به طور کلی اگر $\{H_i : i \in I\}$ مجموعه‌ی دلخواهی از زیرگروههای نرمال G باشد آنگاه $\bigcap_{i \in I} H_i \trianglelefteq G$.*

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۸.۳] رجوع شود. $\square$

[1] transitive
[2] core

لم ۱.۲.۱۴. *هرگاه $H \leq G$ و ۲ $=| G : H |$ آنگاه $H \trianglelefteq G$.*

برهان. فرض می‌کنیم اندیس H در G برابر ۲ باشد و $g \in G$. اگر $g \in H$، آنگاه $g^{-1}Hg = H$. اگر $g \in G - H$، آنگاه H و Hg دو هم‌دسته‌ی راست H در G هستند. همچنین H و gH دو هم‌دسته‌ی چپ H در G هستند. بنابراین $Hg = gH$. لذا باز هم $g^{-1}Hg = H$. از این‌رو $H \trianglelefteq G$. □

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض می‌کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه H از گروه G را مشخصه در G گوییم اگر به ازای هر $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$ داشته باشیم $H^\alpha \leq H$. که در آن داریم: $H^\alpha = \{h^\alpha : h \in H\}$. اگر H زیرگروه مشخصه G باشد، آنگاه به ازای هر خودریختی مانند α، $H^\alpha = H$. هر گاه H زیرگروه مشخصه G باشد، می‌نویسیم $H \text{ char } G$.

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنیم G یک گروه باشد. گروه G را ساده می‌گوییم اگر ۱ $G \neq$ و G, ۱ تنها زیرگروههای نرمال G باشند.

قضیه ۱.۲.۱۷. *هر گاه $K \trianglelefteq G$ و G یک گروه متناهی باشد آنگاه $| G/K |=| G | / | K |$.*

برهان. به [[۱۰]، لم ۲۲.۳] رجوع شود. □

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنید G یک گروه باشد. به ازای $H \leq G$ ، مرکزساز H در G را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$C_G(H) = \{g \in G : gh = hg, \forall\, h \in H\}.$$

در این صورت $Z(H) \leq C_G(H) \leq G$.

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض می‌کنیم G گروهی نابدیهی باشد. زیرگروه حقیقی M از G را زیرگروه ماکسیمال G می‌نامیم، اگر زیرگروهی مانند L وجود نداشته باشد که $M \lneqq L \lneqq G$.

قضیه ۱.۲.۲۰. *هر گاه $H \leq G$ و $K \trianglelefteq G$، آنگاه $HK \leq G$.*

برهان. به [[۱۰]، لم ۳۸.۳] رجوع شود. □

لم ۱.۲.۲۱. *فرض می‌کنیم $K \leqslant M < G$، به طوری که $K \trianglelefteq G$. در این صورت M/K زیرگروه ماکسیمالی از G/K است اگر و تنها اگر M زیرگروه ماکسیمالی از G باشد.*

برهان. فرض می‌کنیم M/K زیرگروهی ماکسیمال از G/K باشد. اگر $M < L \leqslant G$، آنگاه $M/K < L/K < G/K$. که بنابر فرض $L/K = G/K$، لذا $L = G$. حال اگر M زیرگروهی ماکسیمال از G باشد و $M/K < L/K < G/K$، آنگاه $M < L \leqslant G$. لذا $L = G$. □

قضیه ۲۲.۲.۱. *هرگاه $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$ آنگاه $HK \trianglelefteq G$.*

برهان. به [[۱۰]، لم ۳۹.۳] رجوع شود. □

قضیه ۲۳.۲.۱ (قضیه‌ی سوم یکریختی)**.** *فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. در این صورت هر زیرگروه G/K به شکل H/K است که $K \leqslant H \leqslant G$. علاوه‌براین $H/K \trianglelefteq G/K$ اگر و تنها اگر $H \trianglelefteq G$ و در این صورت،*

$$(G/K)/(H/K) \simeq G/H.$$

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۳۰.۳] رجوع شود. □

تعریف ۲۴.۲.۱. جابه‌جاگر یک زوج مرتب $g_۱$ و $g_۲$ از اعضای G، عبارت است از عضو $[g_۱, g_۲] = g_۱{}^{-۱}g_۲{}^{-۱}g_۱g_۲ \in G$.

قضیه ۲۵.۲.۱. *فرض می‌کنیم $g_۱, g_۲ \in G$. در این صورت*

(الف) *$[g_۱, g_۲] = [g_۱, g_۲]^{-۱}$، و*

(ب) *$[g_۱, g_۲] = ۱$ اگر وتنها اگر $g_۱$ و $g_۲$ جابه‌جایی‌پذیر باشند.*

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۴۷.۳] رجوع شود. □

تعریف ۲۶.۲.۱. فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$. در این صورت جابه‌جاگر متناظر با H و K عبارت است از

$$[H, K] = \langle [h, k] : h \in H, k \in K \rangle \leqslant G.$$

تأکید می‌کنیم که $[H, K]$ زیرگروهی است که به وسیله‌ی جابه‌جاگرهای $[h, k]$ تولید شده است، که $h \in H$ و $k \in K$.

تعریف ۲۷.۲.۱. زیرگروه خاص $[G, G]$ را که به وسیله‌ی تمام جابه‌جاگرهای G تولید می‌شود، معمولاً با G' نمایش می‌دهند و گروه مشتق G نام دارد.

قضیه ۲۸.۲.۱. *فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$. در این صورت $[H, K] = [K, H]$.*

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۴۹.۳] رجوع شود. □

تعریف ۲۹.۲.۱. اگر G یک زیرگروه مانند K داشته باشد که K کوچکترین زیرگروه نرمال یکتای G باشد، در این صورت G/K مانده‌یی[۱] G نام دارد.

قضیه ۳۰.۲.۱. *برای هر گروه G، گروه مشتق G' کوچکترین زیرگروه نرمال یکتای K از G است، به طوری که G/K آبلی است. لذا G/G' مانده‌یی آبلی G است.*

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۵۲.۳] رجوع شود. □

قضیه ۳۱.۲.۱. *فرض می‌کنیم $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت $[H, K] \leqslant H \cap K$. به‌ویژه، اگر $H \cap K = ۱$ آنگاه هر عضو H با هر عضو K جابه‌جایی‌پذیر است.*

برهان. به [[۱۰]، لم ۵۳.۳] رجوع شود. □

قضیه ۳۲.۲.۱. *فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و تعریف می‌کنیم $N_G(H) = \{g \in G : g^{-۱}Hg = H\}$. در این صورت $H \trianglelefteq N_G(H) \leqslant G$، و هرگاه $H \trianglelefteq J \leqslant G$، آنگاه $J \leqslant N_G(H)$. $N_G(H)$ را نرمالساز H در G می‌نامیم. از این رو $N_G(H)$ بزرگترین زیرگروه یکتای G است که H در آن نرمال است.*

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۵۵.۳] رجوع شود. □

قضیه ۳۳.۲.۱ (قضیه دوم یکریختی)**.** *فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت $H \cap K \trianglelefteq H$ و*

$$H/H \cap K \simeq HK/K.$$

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۴۰.۳] رجوع شود. □

قضیه ۳۴.۲.۱. *فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این صورت $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر $N_G(H) = G$.*

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۵۶.۳] رجوع شود. □

تعریف ۳۵.۲.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه باشد و $H \leqslant G$. زیرگروه H را خودنرمال‌ساز گوییم هرگاه $N_G(H) = H$.

---
[۱] residual

نکته ۳۶.۲.۱. فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$. در این صورت $H \cup K \leqslant G$ اگر و تنها اگر $H \leqslant K$ یا $K \leqslant H$ (در هر حالت $H \cup K$ یا H است یا K). به ویژه G نمی تواند اجتماعی از دو زیرگروه حقیقی خود باشد.

تعریف ۳۷.۲.۱. (الف) فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$. در این صورت $\langle H \cup K \rangle$ معمولاً به صورت $\langle H, K \rangle$ نمایش داده شده و الحاق H و K نامیده می شود .

(ب) هر عضو $\langle H, K \rangle$ (غالباً به راههای مختلف) به شکل $h_1k_1h_2k_2 \dots h_rk_r$ قابل نمایش است که در آن r یک عدد صحیح مثبت است و $h_1, \dots, h_r \in H$ و $k_1, \dots, k_r \in K$.

لم ۳۸.۲.۱. *هرگاه $H \leqslant G$ و $K \trianglelefteq G$، آنگاه $HK \leqslant G$ و در این صورت بدیهی است که $HK = \langle H, K \rangle$.*

برهان. به [[۱۰]، لم ۳۸.۳] رجوع شود. □

تعریف ۳۹.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت هر یکریختی مانند $f : G \longmapsto G$ را یک خودریختی می‌نامند. مجموعه‌ی همه خودریختی‌های G با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهند: این گروه را با $\mathrm{Aut}\ G$ نمایش می‌دهند و گروه خودریختی‌های G می‌نامند.

تعریف ۴۰.۲.۱. فرض کنید $\alpha \in \mathrm{Aut}\ G$ و

$$H = \{g \in G : g^\alpha = g\}.$$

در این صورت H را زیرگروه نقطه ثابت G تحت α می‌نامند.

قضیه ۴۱.۲.۱. *فرض کنیم G یک گروه، K, H دو زیرگروه از آن باشند به طوری که $H \trianglelefteq G, K \operatorname{char} H$. در این صورت $K \trianglelefteq G$.*

برهان. به [[۱۰]، لم ۱۵.۳] رجوع شود. □

تعریف ۴۲.۲.۱. فرض کنید $\alpha \in \mathrm{Aut}\ G$. در این صورت α آزاد از نقطه ثابت[1]خوانده می‌شود اگر زیرگروه نقطه ثابت G تحت α بدیهی باشد. یعنی هرگاه $1 \neq g \in G$ آنگاه $g^\alpha \neq g$. اصطلاح «آزاد از نقطه ثابت» اصطلاحی رایج است. شاید تا حدی استفاده‌ی نادرست از زبان باشد، زیرا طبیعی است که هر خودریختی یک گروه، عضو همانی را ثابت نگه می‌دارد. وقتی می‌گوییم یک خودریختی آزاد از نقطه ثابت است، منظور این است که آن خودریختی هیچ نقطه‌ی از گروه را به جز عضو همانی، ثابت نگه نمی‌دارد.

[1] fixed-point-free

تعریف ۴۳.۲.۱. فرض می کنیم H و K گروههای دلخواهی باشند، مجموعه‌ی $H \times K$ ساختار یک گروه را به خود می‌گیرد مشروط بر آنکه به ازای هر $h, h' \in H$ و $k, k' \in K$ تعریف کنیم

$$(h,k)(h',k') = (hh', kk').$$

عضو همانی $H \times K$ ، $(۱,۱)$ است و

$$(h,k)^{-۱} = (h^{-۱}, k^{-۱}).$$

پس $H \times K$ معرف این چنین گروهی است: این گروه را حاصلضرب مستقیم H, K می‌نامیم.

تعریف ۴۴.۲.۱. فرض می‌کنیم H و K دو گروه دلخواه و $\varphi : H \longmapsto \operatorname{Aut} K$ یک همریختی باشد (به ازای هر h از H، تصویر h تحت φ را با φ_h نشان می‌دهیم.) حاصلضرب دکارتی $H \times K$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(h_۱, k_۱)(h_۲, k_۲) = (h_۱ h_۲, k_{۱\varphi_{h_۲}} k_۲).$$

مجموعه‌ی $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را حاصلضرب نیم مستقیم H و K تحت عمل φ می‌نامیم و آن را با علامت $H \ltimes K$ نشان می‌دهیم و اصطلاحاً می‌گوییم گروه H برگروه K تحت φ عمل می‌کند.

قضیه ۴۵.۲.۱. *فرض می‌کنیم H مثلاً با عمل φ بر K عمل کند؛ قرار می‌دهیم $G = H_\varphi \times K$. در این صورت*

$$H \leqslant G \,,\, K \trianglelefteq G \,,\, G/K \simeq H \,,\, G = HK \text{ و } H \cap K = ۱ \,.$$

علاوه بر این، عمل H بر K تحدید عمل تزویج G بر K ، به H است.

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۹.۹] رجوع شود. □

تعریف ۴۶.۲.۱. یکی از مهمترین ۲-گروههای که وجود دارند گروه کواترنیون تعمیم‌یافته[۱] می‌باشد که نمایش آن به شکل زیر می‌باشد:

$$Q_{۲^n} =< x, y : x^{۲^{n-۱}} = ۱, y^۲ = x^{۲^{n-۲}}, x^y = x^{-۱} >.$$

[۱] generalized quaternion

شناخته‌ترین گروه کواترنیون به ازای $n = ۳$ می‌باشد، که مرتبه آن ۸ می‌باشد یعنی $Q_۸$.که هر زیرگروه آن در آن نرمال می‌باشد.

$$Q_۸ =< a, b : a^۴ = ۱, b^۲ = a^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱} >.$$

قضیه ۴۷.۲.۱. *فرض می‌کنیم G به طور ترایا بر مجموعه‌ی X عمل کند. فرض می‌کنیم $x \in X$ و قرار می‌دهیم $H = \mathrm{Stab}_G(x)$. در این صورت عمل G بر X با عمل ضرب از راست G در مجموعه‌ی هم‌دسته‌های راست H در G هم‌ارز است.*

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۲۰.۴] رجوع شود. □

تعریف ۴۸.۲.۱. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و $g \in G$. در این صورت

$$H^g = \{g^{-۱}hg : h \in H\}$$

زیرگروهی از G است که مزدوج H در G نامیده می‌شود.

تعریف ۴۹.۲.۱. عمل G بر مجموعه‌ی X را منظم می‌خوانیم اگر این عمل ترایا باشد و به ازای هر $x \in X$ ، $\mathrm{Stab}_G(x) = ۱$.

از این تعریف نتیجه می‌شود که یک عمل منظم، صادق است.

تعریف ۵۰.۲.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p- گروه می‌نامیم در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو G توان مثبتی از p باشد. زیرگروه H از G را یک p-زیرگروه گوییم در صورتی که H خود یک p- گروه باشد.

قضیه ۵۱.۲.۱. *هرگاه $\mid G \mid = p^n$ ، که n عدد صحیح مثبتی است، آنگاه $Z(G) \neq ۱$.*

برهان. به [[۱۰]، قضیه ۲۸.۴] رجوع شود. □

قضیه ۵۲.۲.۱. *هرگروه مرتبه‌ی $p^۲$ آبلی است.*

برهان. به [[۱۰]، لم ۳۰.۴] رجوع شود. □

قضیه ۵۳.۲.۱. *فرض می‌کنیم G یک گروه ناآبلی مرتبه‌ی $p^۳$ باشد. آنگاه $Z(G)$ مرتبه‌ی p دارد، $G/Z(G)$ آبلی مقدماتی و $Z(G) = G'$ است.*

برهان. چون G یک p-گروه است، پس $|Z(G)| \neq 1$. لذا مرتبه‌ی $Z(G)$ برابر p، p^2 یا p^3 خواهد بود. اگر $|Z(G)| = p^3$، آنگاه $G = Z(G)$. لذا G گروهی آبلی خواهد بود که یک تناقض است. اگر $|Z(G)| = p^2$، آنگاه $|G/Z(G)| = p$، در نتیجه $G/Z(G)$ دوری است. پس G آبلی می‌باشد و این نیز تناقض می‌باشد. لذا باید داشته باشیم $|Z(G)| = p$. در این صورت $|G/Z(G)| = p^2$. لذا $G/Z(G)$ آبلی است و در نتیجه $G' \leqslant Z(G)$. چون $|Z(G)| = p$ و تنها زیرگروههای $Z(G)$، ۱ و $Z(G)$ می‌باشند، در این صورت اگر $G' = 1$، آنگاه G آبلی است و این تناقض است. بنابراین $G' = Z(G)$ و حکم ثابت شد. $\square$

قضیه ۵۴.۲.۱ (نرمال‌ساز-مرکزساز). *فرض می‌کنیم G یک گروه باشد و $H \leqslant G$. در این صورت*

(الف) $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$

(ب) *گروه خارج‌قسمتی $N_G(H)/C_G(H)$ را می‌توان در $\operatorname{Aut} H$ نشاند.*[1]

برهان. چون (بنابر قضیه ۳۲.۲.۱) $H \trianglelefteq N_G(H)$، به ازای هر $h \in H$، $g \in N_G(H)$ داریم $h^g \in H$. پس واضح است که $N_G(H)$ بر H از راه تزویج عمل می‌کند. فرض می‌کنیم σ نمایش جایگشتی متناظر $N_G(H)$ باشد، بنابراین به ازای هر $g \in N_G(H)$،

$$g\sigma : h \longmapsto h^g \qquad \text{به ازای هر } h \in H$$

از این‌رو

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} \sigma &= \{g \in N_G(H) : h^g = h,\ \forall\, h \in H\}\\ &= \{g \in N_G(H) : hg = gh,\ \forall\, h \in H\}\\ &= C_G(H) \qquad \text{زیرا } C_G(H) \leqslant N_G(H),\end{aligned}$$

از این‌رو بنابر قضیه‌ی بنیادی همریختیها،

$$C_G(H) \trianglelefteq N_G(H) \quad \text{و} \quad \operatorname{Im} \sigma \cong N_G(H)/C_G(H).$$

به ازای هر $g \in N_G(H)$، $g\sigma$ جایگشتی است از H. در واقع $g\sigma$ یک خودریختی از H است، زیرا اگر $h_1, h_2 \in H$ آنگاه

$$(h_1h_2)^g = g^{-1}h_1h_2g = g^{-1}h_1gg^{-1}h_2g = h_1^g h_2^g.$$

از این‌رو $\operatorname{Im}\,\sigma$ زیرگروهی است از $\operatorname{Aut} H$ و در نتیجه $N_G(H)/C_G(H)$ را می‌توان در $\operatorname{Aut}\, H$ نشاند. $\square$

[1] embedded

لم ۵۵.۲.۱. *(الف) به ازای هرگروه دوری G ، $\mathrm{Aut}\ G$ آبلی است.*
(ب) هرگاه $|\ G\ |= p$ آنگاه $|\ \mathrm{Aut}\, G\ |= p-۱$.

برهان. قرار می‌دهیم $G =< g >$. در این صورت هرخودریختی α از G به‌وسیله‌ی اثرش بر g مشخص می‌شود. فرض می‌کنیم $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}\ G$ با، مثلاً، $g^\alpha = g^r$ و $g^\beta = g^s$ که در آن $r, s \in Z$. در این صورت

$$g^{\alpha\beta} = (g^r)^\beta = g^{rs} = g^{sr} = (g^s)^\alpha = g^{\beta\alpha}.$$

چون خودریختی‌های $\alpha\beta$ و $\beta\alpha$ از G اثر واحدی بر g دارند، نتیجه می‌شود که $\alpha\beta = \beta\alpha$. لذا $\mathrm{Aut}\ G$ آبلی است. و (الف) به اثبات رسید.

اینک فرض می‌کنیم که G متناهی باشد. در این صورت به ازای هر عدد صحیح خاص r، یک خودریختی α از G وجود خواهد داشت به‌قسمی‌که $g^\alpha = g^r$ ، فقط مشروط بر آنکه داشته باشیم $o(g^r) = o(g)$. هرگاه $o(g) = p$ آنگاه $p-۱$ انتخاب برای g^r وجود خواهد داشت، بنابراین $|\ \mathrm{Aut}\, G\ |= p-۱$. □

لم ۵۶.۲.۱. *(الف) هرگاه G گروهی باشد که بر گروه مشتق خود منطبق باشد(گروه تام)، و K یک زیرگروه نرمال دوری G باشد آنگاه $K \leqslant Z(G)$.*
(ب) هرگاه G یک گروه متناهی، p کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|\ G\ |$ و K یک زیرگروه نرمال G از مرتبه‌ی p باشد، آنگاه $K \leqslant Z(G)$.

برهان. به [[۱۰]، لم ۳۹.۴] رجوع شود. □

تعریف ۵۷.۲.۱. فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. در این صورت زیرمجموعه‌ی ثابت نقطه‌ی X[۱] به صورت

$$\mathrm{Fix}_X(G) = \{x \in X : xg = x, \forall\ g \in G\} = \{x \in X : \mathrm{Stab}_G(x) = G\},$$

تعریف می‌شود.

لم ۵۸.۲.۱. *فرض می‌کنیم G یک p-گروه متناهی باشد که بر مجموعه‌ی متناهی X عمل کند. در این صورت*

$$|\ \mathrm{Fix}_X(G)\ | \equiv |\ X\ |\ (\text{پیمانه}\ p).$$

[۱] fixed point subset