دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی و کاربردها

فضای متقارن توسعه یافته و هندسه خمینه‌های فینسلری دارای ساختار متقارن

اساتید راهنما

دکتر داریوش لطیفی

دکتر رضا چاوش خاتمی

توسط

زهره کتابچی

تابستان ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

مادرم

که محبتش امید بخش راهم بود

و **همسرم**

که سایه‌اش سایبان راهم بود

و **پسرم**

که تحمل دوری مادر را کشید

و روح پر فتوح

پدرم

به پاس زحمات بی‌دریغش.

سپاسگزاری

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

سپاس خدائی را که اول است و پیش از او اولی نبوده و آخر است و پس از او آخری نباشد. و سپاس خدای را بهر چه که او را نزدیکترین فرشتگانش و گرامی‌ترین آفریدگانش و پسندیده‌ترین ستایش کنندگانش ستوده‌اند. گرچه من نتوانم به آن اندازه و به آن جور سپاسگذار باشم، ولی چنین می‌گویم تا شاید خدای تعالی به فضل و احسانش مرا در زمره ایشان داخل نماید. سپاسی که حد آن را انتها و عدد آن را شمارش و بپایان آن دسترسی و مدت آن را بریدنی نیست. سپاسی ابدی و همیشگی. از اساتید راهنما آقایان **دکتر داریوش لطیفی و دکتر رضا چاوش خاتمی** *بخاطر تمامی زحمات و راهنمایی هایشان در طول دوره‌ی پایان نامه ام، کمال تشکر را دارم و توفیقات روز افزون برای ایشان از خداوند منان خواهانم.*

همچنین از **سرکار خانم دکتر سمیه جنگجو** *که در پاره‌ای از لحظات با گشاده‌رویی پاسخگوی مشکلات من بودند، و با تجربیات گرانمایه‌ی خود، من را راهنمایی می‌نمودند، صمیمانه تشکر می‌کنم.*

زهره کتابچی

تابستان ۱۳۹۱

نام خانوادگی: کتابچی   نام: زهره

عنوان پایان‌نامه:
فضای متقارن توسعه یافته و هندسه خمینه‌های فینسلری دارای ساختار متقارن

اساتید راهنما: دکتر داریوش لطیفی و دکتر رضا چاوش خاتمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: هندسه
دانشگاه: محقق اردبیلی   دانشکده: علوم ریاضی   تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۹۱/۶/۲۱
تعداد صفحه ۷۰

کلید واژه‌ها :
متریک‌های فینسلری، خمینه‌های متقارن، خمینه‌های متقارن توسعه یافته

چکیده:
در این پایان نامه فضاهای فینسلری تعمیم یافته را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برخی از قضایای وجودی و خواص هندسی این فضاها را بررسی کرده و نشان می‌دهیم که هر چنین فضایی می‌تواند بصورت یک فضای هم‌مجموعه از یک گروه لی با یک متریک فینسلری پایا نوشته شود. نشان می‌دهیم که هر فضای فینسلری متقارن توسعه یافته از مرتبه متناهی بوده و اگر از مرتبه زوج باشد آنگاه از نوع بروالدی است. فضاهای بروالدی متقارن توسعه یافته نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

درک و شناخت زیباییها اساساً برای هر انسانی هیجان‌انگیز و لذت بخش است. از سوی دیگر، این درک و شناخت اگر به یک نفع و بهره‌ی عملی نیز منجر شود، هیجان‌انگیزتر و لذت بخش‌تر خواهد شد. به‌عبارت دیگر انسان به لحاظ حس زیبایی طلب خود از دانستن، به خودی خود، لذت می‌برد و به لحاظ سرشت منفعت طلب‌اش از دانستن برای نفعش مسرور می‌شود. **هنر** نتیجه آن حس زیبایی طلب انسان است و علم و تکنولوژی ماحصل این سرشت منفعت طلب. با دقت بیشتر می‌توان گفت که هنر علاوه بر ارضای حس زیبایی طلبی، دارای منافع و بهره‌های عملی فراوانی نیز هست و علم و تکنولوژی ، علاوه بر منافع و بهره‌های عملی، زیباییها و دلنوازیهایی نیز در بردارد. آنچه ماحصل نگاه زیبایی خواه بشر است یک حقیقت علمی یا تکنولوژیک است و نه هنری. حال در مورد حقایق ریاضیات چگونه باید داوری کرد؟ کدام مسئله ریاضی اصالتاً زیبا و پرفایده نیست؟

به نظر می‌رسد زیبایی اصیل حقایق ریاضی، هرگز مورد تردید واقع نشده است. اما تا قرن ۱۹ ، گمان می‌رفت که برخی از حقایق ریاضی فقط زیباست. لکن به زودی معلوم شد که آنچه علم جوان در آیینه نمی‌بیند پیر ریاضی در خشت خام می‌بیند.

این تردید امروزه به حدی رسیده که می‌توان به حکم عقل ادعا کرد که **ریاضی هم زیباست و هم نافع**. در این پایان‌نامه ابتدا به تعاریف و قضایای مهم که در کل فصل‌ها از آن‌ها استفاده می‌شود اشاره‌ای شده که قسمتی از این سر فصل درباره فضاهای فینسلری می باشد. در این بخش ما به طور خلاصه برخی واقعیات را درباره فضاهای فینسلری مرور می‌کنیم که این فضا کاربردهای

زیادی در فیزیک دارد. اخیراً دی. باو [۱]، سی. روبلس [۲] و زد. شن [۳] از معیارهای راندرز در هندسه فینسلر استفاده کردند تا اساس کار زرملو [۴] خمینه‌های ریمان را مورد بررسی قرار دهند.
فرض کنید (M,F) یک فضای فینسلری باشد که F همگن مثبت است و لزوماً همگن مطلق نباشد. ما ایزومتریک‌های (M,F) را معرفی می‌کنیم که یک گروه تبدیل لی را روی M تشکیل می‌دهد و علاوه براین برای هر نقطه $X \in M$ زیرگروه ایزوتروپیک $I_x(M,F)$ یک زیرگروه پیوسته از $I(M,F)$ می‌باشد. گروه ایزومتریک‌ها جهت بررسی فضاهای فینسلری همگن متقارن مورد استفاده قرار می گیرد، سپس به فضاهای متقارن پرداخته می‌شود، ابتدا ای. کارتان [۵] تعریف و طبقه‌بندی کرد و سپس و توسط اس. هلگسون [۶] و اُ. لوز [۷] نوشته شد. تعریف فضای فینسلری متقارن تعمیم یافته طبیعی ای.کارتان از فضاهای متقارن ریمان می‌باشد اگر ویژگی توانی در تعریف فضای فینسلری را کنار بگذاریم به کلاس بزرگتری از خمینه‌های فینسلری به صورت فضاهای فینسلری متقارن می‌رسیم.
هدف این پایان‌نامه بررسی فضاهای فینسلری تعمیم یافته است که ابتدا تعمیم فضاهای متقارن می‌باشد. نشان می‌دهیم که یک معیار g وجود دارد بطوریکه (M,g) یک فضای k–متقارن ریمان است. ما نشان می‌دهیم هر فضای فینسلری متقارن توسعه یافته از مرتبه متناهی است و بنابراین به عنوان یک مورد خاص مرتبه‌های زوج از نوع بروالد می‌باشد.

---

[۱] D. Bao
[۲] C. Robeles
[۳] Z.Shen
[۴] Zermelo
[۵] E.Cartan
[۶] S.Helgason
[۷] O.Looz

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل تعاریف و قضایای پیش‌نیازی را می‌آوریم که در فصل‌های بعد به آنها ارجاع می‌دهیم. بیشتر این تعریف‌ها و قضایا از مرجع [۱] و [۲] و [۵] می‌باشد.

۱.۱ خمینه

یک خمینه[۱]، کلیتی از منحنی ها و سطوح به ابعاد بالاتر است. موضعاً اقلیدسی است که در هر نقطه دارای یک همسایگی، بنام کارت، است که همیومورف با زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}^n$ است. مختصات کارت به انجام محاسبات به عنوان فضای اقلیدسی اجازه می دهد، بطوریکه بسیاری از مفاهیم واقعی را از جمله دیفرانسیل پذیری، مشتقات نقطه ای، فضاهای مماس و فرم های دیفرانسیلی را به خمینه انتقال دهد.

۲.۱ خمینه‌های ریمانی

به طور شهودی می‌توان گفت که هندسه ریمانی با پیوند زدن هندسه اقلیدسی با نظریه خمینه‌های هموار ونگاشت‌های هموار بدست می‌آید. در این بخش مقدماتی از هندسه ریمانی را بیان خواهیم کرد و در این راستا به معرفی التصاق، انحنا و ژئودزیک خواهیم پرداخت.

---

[۱] Manifold

تعریف ۱.۲.۱ خمینه هموار n−بعدی، خمینه توپولوژیکی M همراه با گردایه زوج‌های (U,φ) که $\varphi : U \to V$ است به‌طوریکه:

۱. $\cup U = M$

۲. برای هر β, تابع تغییر مختصات $\varphi_\beta = \varphi_\beta o\ \psi^{-۱} \ : \varphi(U \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U \cap U_\beta)$ هموار است به عبارت دیگر (U,φ) و (U_β,φ_β) سازگار نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید M یک خمینه هموار با بعد n باشد در این صورت یک متریک ریمانی یا ساختار ریمانی روی M عبارت است از نسبت دادن یک ضرب داخلی $\langle,\rangle_p$ (یک نرم دو خطی متقارن، مثبت معین) روی فضای مماس T_PM برای هر نقطه $p \in M$ به طوری که هموار باشد یعنی اگر (u,φ) یک چارت حول نقطه p باشد قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \langle\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_i}\rangle \qquad (۱) \\ &= g_{ji} \\ g_{ii} &= \langle\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_i}\rangle > ۰ \qquad (۲) \end{aligned}$$

تعریف ۳.۲.۱ (متریک ریمانی). فرض کنیدM یک خمینه هموارn−بعدی باشد. $g : (TM)^۲ \longrightarrow R$ یک متریک ریمانی هموار روی M نامیده می‌شود هرگاه برای هر$p \in M$، یک ضرب داخلی به فرم $\langle,\rangle_p$ (یعنی یک فرم دو خطی متقارن مثبت) روی T_PM باشد.

هموار بودن متریک ریمانی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیدM یک خمینه‌ی هموارn−بعدی باشد. به ازای هر $x,y \in M$ تعریف می‌کنیم $f = \langle x,y\rangle$ لذا $f(p) = \langle x(p),y(p)\rangle_p$. متریک را هموار گوییم هرگاه f هموار باشد.

توجه کنید که اگر (U,x) یک دستگاه مختصات موضعی حول نقطه $p \in M$ باشد، دراین‌صورت تحدید g به U نمایش موضعی $g|_U = \sum g_{ij} dx_i \otimes dx_j$ را دارا است که در آن $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$.

تعریف ۵.۲.۱ (خمینه ریمانی) خمینه هموار M همراه با متر ریمانی g یک خمینه ریمانی نامیده می‌شود و با نماد (M,g) نمایش داده می‌شود.

قضیه ۶.۲.۱ هر خمینه هموار M دارای متریک ریمانی است.

برهان. به منبع [۵] رجوع شود. ■

تذکر ۷.۲.۱ فرض کنید g یک متریک ریمانی روی خمینه M باشد طبق فرمول طول خم در فضای اقلیدسی، می‌توان طول خم C^1 مانند $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ نسبت به g را به صورت زیر تعریف کرد

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt.$$

نماد $\chi(M)$ را مجموعه همه میدان های برداری C^∞ را حلقه تمام توابع C^∞ روی M در نظر میگیریم.

تعریف ۸.۲.۱ التصاق آفین روی یک خمینه M، نگاشت $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ است که زوج (X,Y) را به میدان برداری $\nabla_X Y$ نظیر می‌کند $(\nabla(X,Y) = \nabla_X Y)$، به نحوی که به ازای هر $X,Y,Z \in \chi(M)$ وبه ازای هر $f,g \in C^\infty(M)$ در خواص زیر صدق می‌کند

۱) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$،

۲) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_x Z$،

۳) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

التصاق آفین التصاق خطی یا التصاق کازول نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید $\gamma : I \longrightarrow M$ یک خم در M باشد نگاشت $Y : I \longrightarrow TM$ رایک میدان برداری در راستای خم γ گویند هرگاه برای هر $t \in I$، $Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنید M خمینه ی هموار با التصاق آفین باشد، تناظر منحصربفردی وجود دارد که به هر میدان برداری هموار V در امتداد خم هموار $c : I \longrightarrow M$ میدان برداری منحصر به فرد $\frac{DV}{dt}$ را در امتداد خم c متناظر می‌کند. اگر V میدان برداری باشد که به وسیله‌ی تحدید میدان $Y \in \chi(M)$ روی c بدست آمده باشد داریم

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dC}{dt}} Y.$$

$\frac{DV}{dt}$ را مشتق کواریان میدان برداری V در امتداد خم C گویند.

برهان. به منبع [۴] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنید M یک خمینه هموار، $\langle , \rangle$ یک متریک ریمانی باشد، التصاق آفین روی M با متریک ریمانی سازگار نامیده می‌شود هرگاه برای هر جفت میدان برداری متوازی P' و P در امتداد یک خم هموار دلخواه داشته باشیم، $\langle P, P' \rangle =$ ثابت.

قضیه ۱۲.۲.۱

۱) بر یک خمینه ریمانی، التصاق آفین و متر ریمانی $\langle , \rangle$ سازگارند اگر و تنها اگر برای هر دو میدان برداری W و V بر خم C داشته باشیم

$$\frac{D}{dt}\langle V, W \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle$$

۲) اگر ∇ یک التصاق آفین بر خمینه ریمانی M باشد، ∇ با متریک ریمانی بر M سازگار است اگر و تنها اگر برای هر $X, Y, Z \in \chi(M)$ داشته باشیم

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

برهان. به منبع [۱] مراجعه شود. ∎

تعریف ۱۳.۲.۱ التصاق آفین بر خمینه هموار M متقارن نامیده می‌شود هرگاه

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

تعریف ۱۴.۲.۱ (التصاق لویی–چویتا یا التصاق ریمانی) فرض کنید (M, g) یک خمینه ریمانی از بعد n با التصاق خطی ∇ باشد. آنگاه التصاق خطی ∇ روی M التصاق لویی–چویتا یا التصاق ریمانی نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند

۱) ∇ متقارن یا تاب آزاد است،

۲) ∇ با متریک ریمانی سازگار است.

تذکر ۱۵.۲.۱ تاب آزاد $T(X, Y) = \nabla_X^Y - \nabla_Y^X = [X, Y]$ باشد پس $\nabla_X^Y - \nabla_Y^X = [X, Y]$.

قضیه ۱۶.۲.۱ اگر∇ التصاق لویی–چویتا روی خمینه ریمانی (M, g) باشد آنگاه به ازای میدانهای برداری$X, Y, Z \in \chi(M)$ داریم

۱) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = \circ$،

۲) $(\nabla_X R)(Y, Z) + \nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = \circ$.

برهان. به مرجع [۷] رجوع شود. ■

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنید فضای برداری V داده شده است. برای هر دو بردار دلخواه $X,Y \in V$ نماد $|X \wedge Y|$ را به‌صورت زیر تعریف می کنیم

$$\sqrt{|X|^{۲}|Y|^{۲} - \langle X,Y\rangle^{۲}}$$

که مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده از بردارهای $X,Y \in V$ است.

قضیه ۱۸.۲.۱ فرض کنید $\sigma \subset T_PM$ یک زیر فضای دوبعدی از فضای مماس T_PM است و $X,Y \in \sigma$ دو بردار مستقل خطی در σ است. در این‌صورت

$$K(X,Y) = \frac{(X,Y,X,Y)}{|X \wedge Y|^{۲}},$$

وابسته به انتخاب بردارهای مستقل خطی $X,Y \in \sigma$ نیست.

برهان. به منبع [۱] مراجعه شود. ■

تذکر ۱۹.۲.۱ می‌دانیم: $\langle e(X,Y)X,Y\rangle = (X,Y,X,Y)$.

تعریف ۲۰.۲.۱ (انحنای مقطعی) نقطه $p \in M$ و زیر فضای دو بعدی $\sigma \subset T_PM$ داده شده است. اگر X,Y را پایه‌ای دلخواه برای σ در نظر بگیریم در این صورت $K(X,Y) = K(\sigma)$ انحنای مقطعی در نقطه p نامیده می‌شود.

$$k(\sigma) = \frac{(X,Y,X,Y)}{|X \wedge Y|} = \frac{\langle R(X,Y)X,Y}{|X \wedge Y|} = k(X,Y)$$

تعریف ۲۱.۲.۱ (انحنای ریچی) فرض کنید M یک خمینه ریمانی $n-$بعدی و$X = z_n$ یک بردار یکه در T_PM باشد. روی ابر صفحه عمود بر X در T_PM یک پایه متعامد یکه $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ اختیارمی کنیم و قرار می‌دهیم:

$$Ric_p(X) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} < R(X, z_i)X, z_i > .$$

نگاشت دو خطی Ric روی T_PM را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که برای $X, Y \in T_PM$،

$$Ric(X, Y) = trac\{z \longrightarrow R(X, z)Y\}.$$

از طرفی $Ric(X, Y) = Ric(Y, X)$ بنابراین Ric_p متقارن است و داریم:

$$R(X, Y) = (n-1)Ric_p(X).$$

تعریف ۲۲.۲.۱ $Ric_p(X)$ انحنای ریچی (در جهت X) و نگاشت دوخطی Ric تانسور ریچی نامیده می‌شود.

تعریف ۲۳.۲.۱ (ژئودزیک) فرض کنید M خمینه ریمانی باالتصاق ریمانی ∇ باشد. خم پارامتری: γ $I \longrightarrow M$ را ژئودزیک گوئیم، هرگاه

$$\forall t_0 \in I, \quad \frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0.$$

چنانچه $\forall t \in I$، γ یک ژئودزیک باشد، γ یک خم ژئودزیک نامیده می‌شود. اگر $\gamma : I \longrightarrow M$ خم ژئودزیک باشد، $\frac{d}{dt}\langle\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle = 0$ و در نتیجه $|\frac{d\gamma}{dt}| = c$ (c مقداری ثابت است). اگر$c = 1$ در این‌صورت γ را یک ژئودزیک نرمال شده گویند.

تعریف ۲۴.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{U} \in TM$ که $\mathcal{U} = \{(q,v)|q \in V, v \in T_PM, |v| < \epsilon\}$ آنگاه نگاشت $exp : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ رابه صورت زیر تعریف می کنیم

$$exp(q,v) := \gamma(1,q,v).$$

نگاشت مذکور، نگاشت نمایی نامیده می‌شود. که به لحاظ هندسی $\exp(q,v)$ یعنی نقطه‌ای روی ژپودزیک گذرنده از q با سرعت v در لحظه $t = 1$.

۳.۱ گروه های لی

مهم‌ترین رده از خمینه های هموار، گروه‌های لی هستند. این گروه‌ها اولین بار توسط ریاضیدان نروژی بنام سافوس لی به عنوان ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل و مطالعه توابع خاصی که ازاین معادلات تعیین می‌شوند، معرفی شدند.

تعریف ۱.۳.۱ یک گروه لی عبارت است از خمینه هموار G که دارای ساختار گروهی نیز می‌باشد و در آن عمل گروه و عمل معکوس گروه یعنی هر دو نگاشت زیر هموارند:

$$\varphi : G \times G \longrightarrow G, \quad \varphi(a,b) = ab$$
$$i : G \longrightarrow G, \quad i(a) = a^{-1}$$

دراینجا عمل گروه را با ضرب نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۳.۱ اگر $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$ به ترتیب نشان دهنده اعداد حقیقی و اعداد مختلط باشند. آنگاه$(\mathbb{R},+)$ و $(\mathbb{C},+)$ گروهای لی هستند. زیرا$\varphi(z,z') = z - z'$ نگاشت خطی و درنتیجه C^∞ است.

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنیدY و X دو میدان برداری روی خمینه هموار M باشند، آنگاه میدان برداری منحصر بفرد $[X,Y]$ بنام کروشه لی X,Y موجود است به طوری که به ازای هر عضو f از $\mathbb{R}$، $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$.

تعریف ۴.۳.۱ یک جبر لی حقیقی عبارتست از فضای برداری حقیقی V همراه بانگاشت دو خطی $[.,.] : V \times V \longrightarrow V$ بنام براکت لی، که در شرایط زیرصدق کند:

۱) پادمتقارن باشد. یعنی

$$[X,Y] = -[Y,X] \quad , \quad \forall X,Y \in V$$

۲) برای سه عنصر $X,Y,Z \in V$، اتحاد ژاکوپی برقرارباشد، یعنی

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = \circ.$$

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنید G یک گروه لی باشد. برای هرعضو $a \in G$ انتقال چپ بوسیله a و انتقال راست بوسیله a، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$L_a : G \longrightarrow G, \qquad L_a(g) = ag$$ (انتقال چپ)

$$R_a : G \longrightarrow G, \qquad R_a(g) = ga$$ (انتقال راست)

میدان برداری G چپ پایا(راست پایا) نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a \in G$، $(L_a)_*X = X$ $((R_a)_*X = X)$ شود.

تعریف ۶.۳.۱ فرض کنید (M, g_M) و (N, g_N) دو خمینه هموار باشند. دیفیومورفیسم $f : M \longrightarrow N$ یک ایزومتری نامیده می‌شود هرگاه $g_M = f^*(g_N)$. یا به عبارتی برای هر $P \in M$ و هر $U,V \in T_PM$ داشته باشیم:

$$\langle U,V \rangle_P = \langle df_pU, df_pV \rangle_{f(p)}.$$

تعریف ۷.۳.۱ متریک ریمانی g روی یک گروه لی G چپ پایا نامیده می‌شود هرگاه برای هر $p \in G$، l_P یک ایزومتری باشد.

تعریف ۸.۳.۱ یک متریک روی G دو پایا نامیده می‌شود هرگاه هم چپ پایا و هم راست پایا باشد.

قضیه ۹.۳.۱ فرض کنید G یک گروه لی با متریک دو پایا باشد در این‌صورت برای هر $X, Y, Z \in g$ رابطه

الف) تانسور انحناء آن برابر است با

$$R(X,Y)Z = \frac{۱}{۴}[[X,Y],Z].$$

ب) انحناء مقطعی آن از رابطه زیر بدست می آید

$$K(X,Y) = \frac{۱}{۴}\frac{\langle [X,Y],[X,Y]\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^{۲}}.$$

پ) انحنای ریچی از رابطه

$$Ric(X,Y) = \frac{۱}{۴}\sum_i \langle [X,E_i],[Y,E_i]\rangle,$$

بدست می آید که در آن E_i یک پایه متعامد یکه برای g است.

برهان.

الف) بااستفاده از قسمت الف قضیه و اتحاد ژاکوبی داریم:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{۱}{۲}[[X,Y],Z] - \frac{۱}{۴}[X,[Y,Z]] + \frac{۱}{۴}[Y,[X,Z]] \\ &= \frac{۱}{۲}[[X,Y],Z] - \frac{۱}{۴}[[X,Y],Z] \\ &= \frac{۱}{۴}[[X,Y],Z]. \end{aligned}$$

ب) بااستفاده از رابطه بیان شده در اثبات الف همین قضیه داریم:

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)X,Y\rangle &= \frac{۱}{۴}\langle[[X,Y]X],Y\rangle \\ &= \frac{۱}{۴}\langle[X,Y],[X,Y]\rangle. \end{aligned}$$

پ) با استفاده از قسمت الف داریم:

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_i \langle R(X,E_{i)}Y,E_i\rangle \\ &= \frac{۱}{۴}\sum_i \langle[[X,E_i],Y],E_i\rangle \\ &= \frac{۱}{۴}\sum_i \langle[X,E_i],[Y,E_i]\rangle. \end{aligned}$$

□

۴.۱ فضای فینسلری

درسال ۱۹۱۸ ریاضیدان آلمانی بنام پل فینسلر برای اولین بار فضاهای با متریک تعمیم یافته را مورد بررسی قرارداد. بعدها کاربردهای هندسه دیفرانسیل چنین فضاهایی در مکانیک کوانتومی