بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

حل عددی دستگاه‌های معادلات انتگرال خطی و غیرخطی نوع دوم با استفاده از توابع پایه دلتا

استاد راهنما:

دکتر مهدی قاسمی

استاد مشاور:

دکتر سعید وحدتی

پژوهشگر:

الهه احمدی باصیری

مهر ۱۳۹۱

خدا عظیم نیست، او عظمت است. خدا مهربان نیست، او مهربانی است. خدا عاشق نیست، او عشق است.

-خدایا! اکنون نشانم ده که چگونه علم و دانشم را خردمندانه به کارگیرم و راهی بیابم که در هر ذره ای که می نگرم جز جمال تو چیزی نبینم.

-پروردگارا! به من ایمان و جراتی ده که آن چه را که حق می دانم به خاطر آن چه بد می دانند، کتمان نکنم.

-پروردگارا! از این که توانی دادی تا از پایگاه دانش خویش دفاع کنم بسیار خرسندم و چشم به راه آن دمم که سرافرازانه در پیشگاه تو از تز آدمیت دفاع کنم.

-خدایا! مرا آن ده که آن به.

تقدیم به مقدس ترینم در زندگی: پیامبرم حضرت محمد (ص)

تقدیم به آفریدگارانم: پدر و مادرم

تقدیم به پدر مهربانم: او که آغوش گرمش را گشود تا فرصت پرواز یابم. هرچه داشت به پایم ریخت و هرچه آرزو کردم برایم خواست. او که تمام امروزهای من تجسم دیروزهای از دست رفته اش است. او که لبخندهای امروزم را به بهای سیاهی موها و طراوت زندگیش برایم به ارمغان آورده است.

تقدیم به مادر عزیزم: آرام جانم و مهربان تر از من به من. او که در نیایش های دیروزش، امروزم را از خدا خواست. او که گذشت، از هر آن چه نمی توان گذشت. مادر، اگر امروز جز راست نمی گویم بهر آن است جز راست از تو نشنیده ام. اگر تو راست گو، راست پو، راست بین و راست دین نبودی من از راستی براستی که چیزی نمی دانستم.

تقدیم به زیباترینم در زندگی: خواهر عزیزم شهناز، فرشته ای از جنس مهر که همواره از پرتو محبت های بی دریغش بهره مند بوده ام. او که نیکبختی و سعادتش بزرگترین آرزوی قلبی من است.

و تقدیم به همه کسانی که دوستشان دارم.

پروردگار بزرگ را که موهبت اندیشیدن و لذت آموختن را به بندگانش عطا فرمود، شاکر و سپاسگزارم. هم او که دستانم را توان، اندیشه‌ام را گشایش و دلم را صبر و تحمل بخشید تا کاری را که با نام و یاد او آغاز کرده بودم در سایه الطاف خداوندی‌اش به پایان برم.

اکنون که به این مرحله از راه رسیده‌ام لازم می‌دانم از عزیزانی که در این راه یاریم نموده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

نه تنها تحصیلاتم که تمام زندگیم را مدیون **مادر دلسوز و پدر بزرگوارم** هستم و پروردگارم را شاکرم که این دو موهبت را به من ارزانی داشت تا در دامان پرمهرشان پرورش یابم. موفقیت‌هایم را در تمام مراحل زندگی مرهون زحمات و فداکاری **خانواده‌ام** می‌دانم.

بالاترین مراتب قدردانی و سپاس را تقدیم استاد راهنمای گرامیم **جناب آقای دکتر مهدی قاسمی** و استاد مشاور ارجمندم **جناب آقای دکتر سعید وحدتی**، می‌نمایم که در دوران تحصیلم، اوقات ارزشمندشان را بی‌هیچ مضایقه‌ای در اختیارم نهادند و بی‌تردید دانسته‌های خود را مدیون زحمات بی‌دریغشان می‌دانم.

الهه احمدی باصیری

مهر ۱۳۹۱

چکیده

این پایان‌نامه در پنج فصل تدوین شده‌است و با استفاده از توابع پایه‌ای دلتا (DFs)، یک روش عددی برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال خطی و غیر خطی ارایه می‌دهد.

در ابتدا، تعاریف و قضایای اولیه‌ای از آنالیز حقیقی و تابعی خواهیم آورد. سپس به معرفی و بررسی ویژگی‌های مهم توابع دلتا پرداخته و با استفاده از DFs جواب دستگاه معادلات انتگرال ولترا، فردهلم و ولترا-فردهلم را تقریب می‌زنیم. این روش تنها با نمونه‌گیری از توابع، جمع و ضرب ماتریس‌ها، دستگاه معادلات انتگرال را به یک دستگاه معادلات جبری خطی یا غیرخطی معادل، تبدیل می‌کند. ما هم‌چنین، به بحث سرعت همگرایی و تحلیل خطا پرداخته و نشان می‌دهیم که مرتبه همگرایی روش $O(h^۲)$ است. در نهایت، چند مثال عددی آورده و نتایج عددی به‌دست آمده برای آن‌ها را با نتایج عددی چند روش دیگر، مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی : دستگاه معادلات انتگرال فردهلم، دستگاه معادلات انتگرال ولترا، دستگاه معادلات انتگرال ولترا-فردهلم، توابع دلتا، تحلیل خطا و همگرایی، دستگاه معادلات جبری خطی و غیرخطی .

لیست تصاویر

۱.۲ توابع مولفه‌ای دلتا برای $n = ۳$ ۲۳
۲.۲ توابع مولفه‌ای دلتا برای $n = ۴$ ۲۳

۱.۳ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۱.۳.۳ . . . . ۵۵
۲.۳ نمودار خطا برای مثال ۲.۳.۳ . . . . ۵۸
۳.۳ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۳.۳.۳ . . . . ۶۰

۱.۴ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی حاصل از روش توابع دلتا ($n = ۱۰$) ۷۲
۲.۴ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی حاصل از روش تجزیه آدومین ۷۲
۳.۴ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی حاصل از روش آدومین اصلاح یافته ۷۲
۴.۴ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی حاصل از روش توابع دلتا ($n = ۱۰$) ۷۳
۵.۴ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی حاصل از روش تجزیه آدومین ۷۳
۶.۴ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی حاصل از روش آدومین اصلاح یافته ۷۳
۷.۴ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۲.۳.۴ . . . . ۷۵
۸.۴ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۳.۳.۴ . . . . ۷۷
۹.۴ نمودار جواب‌های تقریبی مثال ۴.۳.۴ . . . . ۷۸

۱.۵ نمودار خطا برای مثال ۲.۲.۵ . . . . ۸۶

لیست جداول

۱.۳ نتایج عددی برای مثال ۱.۳.۳ . . . . ۵۶
۲.۳ کوچک ترین کران بالای قدرمطلق خطا برای مثال ۱.۳.۳ . . . . ۵۷
۳.۳ نتایج عددی برای مثال ۲.۳.۳ . . . . ۵۹
۴.۳ نتایج عددی برای مثال ۳.۳.۳ . . . . ۶۱
۵.۳ کوچک‌ترین کران بالای قدرمطلق خطا برای مثال ۳.۳.۳ . . . . ۶۲

۱.۴ نتایج عددی برای مثال ۱.۳.۴ . . . . ۷۱
۲.۴ نتایج عددی برای مثال ۲.۳.۴ . . . . ۷۴
۳.۴ نتایج عددی برای مثال ۲.۳.۴ . . . . ۷۶

۱.۵ کوچک‌ترین کران بالای قدرمطلق خطا برای مثال ۱.۲.۵ . . . . ۸۴
۲.۵ نتایج عددی برای مثال ۱.۲.۵ . . . . ۸۵
۳.۵ نتایج عددی برای مثال ۲.۲.۵ . . . . ۸۷

فهرست مطالب

لیست تصاویر ۱

لیست جداول ۲

پیشگفتار ۵

فهرست نمادها ۷

۱ مقدمات ۸

۱.۱ مفاهیم و قضایای پایه ۸

۲.۱ تاریخچه معادلات انتگرال ۱۶

۳.۱ مقدمه‌ای بر معادلات انتگرال ۱۷

۴.۱ دسته بندی معادلات انتگرال ۱۸

۱.۴.۱ معادلات انتگرال فردهلم خطی ۱۸

۲.۴.۱ معادلات انتگرال ولترای خطی ۱۹

۳.۴.۱ معادلات انتگرال – دیفرانسیل ۲۰

۴.۴.۱ معادلات انتگرال منفرد ۲۰

۵.۱ انواع هسته‌ها ۲۰

۲ توابع دلتا ۲۲

۱.۲ معرفی توابع دلتا ۲۲

۲.۲ ویژگی‌های توابع دلتا ۲۴

۳.۲ ویژگی‌های بردارهای توابع دلتا ۲۸

۴.۲ بسط توابع برحسب توابع دلتا ۲۹

۱.۴.۲ بسط توابع یک متغیره برحسب توابع دلتا ۲۹

۲.۴.۲ بسط توابع دو متغیره برحسب توابع دلتا ۳۱

۳ حل عددی دستگاه‌های معادلات انتگرال خطی نوع دوم، همگرایی و تحلیل خطا ۳۴
۱.۳ حل عددی دستگاه‌های معادلات انتگرال خطی نوع دوم ۳۴
۱.۱.۳ حل عددی دستگاه معادلات انتگرال فردهلم خطی نوع دوم ۳۴
۲.۱.۳ حل عددی دستگاه معادلات انتگرال ولترای خطی نوع دوم ۳۷
۲.۳ همگرایی و تحلیل خطا ۳۸
۳.۳ مثال‌های عددی ۵۴
۴.۳ تفسیر نتایج عددی ۶۲

۴ حل عددی دستگاه‌های معادلات انتگرال ولترا و فردهلم غیرخطی ۶۴
۱.۴ حل عددی دستگاه معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی ۶۴
۲.۴ حل عددی دستگاه معادلات انتگرال ولترای غیرخطی ۶۹
۳.۴ مثال‌های عددی ۶۹
۴.۴ تفسیر نتایج عددی ۷۹

۵ حل عددی دستگاه معادلات انتگرال ولترا-فردهلم ۸۰
۱.۵ حل عددی دستگاه معادلات انتگرال ولترا-فردهلم خطی ۸۰
۲.۵ مثال‌های عددی ۸۴

مراجع ۸۸

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۹۰

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۲

پیشگفتار

بسیاری از مسایل در رشته‌های فیزیک، شیمی، مهندسی و ... به حل یک دستگاه معادلات انتگرال منجر می‌شود. تاکنون چندین روش عددی برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال ارایه شده است. بابلیان [۱] برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال فردهلم [۲]، ولترا [۳] و ولترا-فردهلم از روش های تجزیه [۵، ۶]، آدومین [۸] و شروع مجدد آدومین [۳۳] استفاده کرده است. مالک‌نژاد [۴] از روش‌های بسط [۲۲، ۲۸]، توابع گویا شده‌ی هار [۲۳]، ماتریس‌های عملیاتی [۲۵]، تصویری و نیستروم [۲۵]، رونگ-کوتا [۲۶] و روش توابع بلاک-پالس [۲۷] برای حل عددی چنین دستگاه‌هایی استفاده کرده و در [۲۴] به مقایسه‌ی روش‌های تصویری و آدومین برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال پرداخته‌است. روش های هم‌محلی اسپلاینی [۱۲]، نیوتون [۵]- تاو [۶] [۱۸]، اختلال هموتوپی [۱۹، ۳۷]، سینک- هم‌محلی [۲۹، ۳۰] و تجزیه [۳۵]، نیز از جمله روش‌هایی هستند که در سال‌های اخیر برای حل دستگاه‌های معادلات انتگرال ولترا، فردهلم و ولترا-فردهلم استفاده شده‌اند. در [۱۶]، یک روش ساده برای حل دستگاه معادلات انتگرال فردهلم ارایه شده‌است. در اکثر روش‌های عددی برای حل دستگاه معادلات انتگرال، یک مجموعه از توابع پایه برای بسط جملات مجهول (و در صورت امکان معلوم) دستگاه معادلات انتگرال و یک روش تصویری مناسب یا یک روش مستقیم استفاده می‌شود، که در نتیجه‌ی آن دستگاه معادلات انتگرال به دستگاه معادلات جبری خطی یا غیرخطی معادل تبدیل می‌شود.

در این پایان نامه که شامل پنج فصل است، با استفاده از توابع پایه دلتا به حل عددی دستگاه‌های معادلات انتگرال می‌پردازیم. در فصل اول، به معرفی و بررسی تاریخچه معادلات انتگرال پرداخته و تعاریف و قضایای اولیه‌ای از آنالیز حقیقی خواهیم آورد. در فصل دوم به معرفی توابع دلتا و بررسی ویژگی‌های این توابع و کاربرد این توابع در بسط توابع یک و دو متغیره و خطای ناشی از این بسط، می‌پردازیم. در فصل سوم با استفاده از توابع دلتا، به حل دستگاه‌های معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی، بحث همگرایی، تحلیل خطا و مرتبه همگرایی روش ارایه شده، می‌پردازیم. هم‌چنین برای روشن شدن دقت و مرتبه همگرایی روش، نتایج این فصل را روی چند مثال عددی پیاده سازی می‌کنیم. در فصل چهارم، به حل عددی دستگاه‌های

[۱] Babolian
[۲] Fredholm
[۳] Volterra
[۴] Maleknejad
[۵] Newton
[۶] Tau

معادلات انتگرال ولترا و فردهلم غیرخطی نوع دوم و ارایه‌ی چند مثال عددی می‌پردازیم. در فصل پنجم، روش عددی جدیدی برای حل دستگاه معادلات انتگرال ولترا-فردهلم ارایه داده و با استفاده از این روش، به حل عددی مثال‌هایی می‌پردازیم.

فهرست نمادها

$\boldsymbol{\Delta}(.)$ بردار توابع دلتا ۲۸

$\beta(.,.)$ تابع بتا ۱۴

$\Gamma(.)$ تابع گاما ۱۴

DFs توابع دلتا ج

$[...]^T$ ترانهاده ۲۸

$\lim$ حد ۹

$\mathbb{R}^n$ فضای برداری اقلیدسی n بعدی ۸

$\Re(z)$ قسمت حقیقی عدد مختلط z ۱۶

$\sup$ کوچک‌ترین کران بالا ۹

$\sum$ مجموع ۸

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی ۸

$\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی ۴۷

$L^۲$ مجموعه توابع مربعی انتگرال‌پذیر ۲۱

$O(.)$ مرتبه‌ی همگرایی ۱۴

g^* مزدوج تابع مختلط g ۱۱

$\Delta_i(.)$ مولفه‌ی i ام بردار توابع دلتا ۲۲

$\|.\|$ نرم ۱۱

$\|.\|_۲$ نرم $L_۲$ ۲۱

$\|.\|_\infty$ نرم یکنواخت ۱۵

فصل ۱

مقدمات

در این فصل به بیان تعاریف، قضایا و مقدمات مورد نیاز برای فصل‌های بعدی می‌پردازیم. در بخش اول برخی مفاهیم ابتدایی از آنالیز حقیقی، آنالیز عددی و ریاضیات پایه را یادآور می‌شویم. عمده مطالب این فصل از منابع [۱، ۲، ۳، ۱۱، ۱۷، ۲۰، ۲۱، ۳۲، ۳۶] گردآوری شده است.

۱.۱ مفاهیم و قضایای پایه

تعریف ۱.۱.۱. یک متر بر مجموعه ناتهی X تابعی است مانند $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ که از سه خاصیت زیر برخوردار است :

(۱) به ازای هر $x,\ y \in X$، $d\,(x,\ y) \geq 0$ و $x = y$ اگر و فقط اگر $d\,(x,\ y) = 0$،

(۲) به ازای هر $x,\ y \in X$، $d\,(x,\ y) = d\,(y,\ x)$،

(۳) به ازای هر $x,\ y,\ z \in X$، $d\,(x,\ y) \leq d\,(x,\ z) + d\,(z,\ y)$ (نامساوی مثلثی).

در این صورت جفت $(X,\ d)$ یک فضای متری نام دارد. به عنوان مثال فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ همراه با فاصله $d\,(x,\ y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ به ازای $x = (x_1,\ \dots,\ x_n)$ و $y = (y_1,\ \dots,\ y_n)$ در $\mathbb{R}^n$ یک فضای متری است. فاصله‌ی d بر $\mathbb{R}^n$ فاصله اقلیدسی نام دارد.

قضیه ۲.۱.۱. *فضاهای متری X و Y و مجموعه‌ی E را چنان در نظر می‌گیریم که $E \subset Y \subset X$. در این صورت، E نسبت به X فشرده است اگر و فقط اگر E نسبت به Y فشرده باشد.*

برهان. به [۳۲] مراجعه شود. □

تعریف ۳.۱.۱. دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از فضای متری $(X,\ d)$ یک دنباله کشی [1] نام دارد اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی مانند $n_0(\epsilon)$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $n,\ m > n_0(\epsilon)$، داشته باشیم $d\,(x_n, x_m) < \epsilon$.

---
[1] Cauchy

قضیه ۴.۱.۱. *در هر فضای متری X، هر دنباله‌ی همگرا یک دنباله‌ی کشی است.*

برهان. به [۳۲] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۱.۱. یک فضای متری که در آن هر دنباله‌ی کشی همگرا باشد، تام نام دارد. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ همراه با فاصله اقلیدسی، فضای متری تام است.

تعریف ۶.۱.۱. گوییم دنباله‌ی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ از توابع حقیقی به‌طور نقطه به نقطه به تابعی مانند f بر مجموعه‌ی E همگراست هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ و هر $x \in E$ عدد صحیح مثبتی مانند $n_0(\epsilon, x)$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $n \geq n_0(\epsilon, x)$، داشته باشیم $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

تعریف ۷.۱.۱. گوییم دنباله‌ی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ از توابع حقیقی به‌طور یکنواخت به تابعی مانند f بر مجموعه‌ی E همگراست هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیح مثبتی مانند $n_0(\epsilon)$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $n \geq n_0(\epsilon)$ و هر $x \in E$، داشته باشیم $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. واضح است که همگرایی یکنواخت، همگرایی نقطه به نقطه را ایجاب می‌کند.

قضیه ۸.۱.۱. (*محک کشی برای همگرایی یکنواخت*) *دنباله‌ی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ از توابع حقیقی تعریف شده بر مجموعه‌ی E به‌طور یکنواخت بر E همگراست اگر و فقط اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیحی مانند $n_0(\epsilon)$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $n, m \geq n_0(\epsilon)$ و هر $x \in E$، داشته باشیم $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$.*

برهان. به [۳۲] مراجعه شود. □

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنیم:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

برای هر x در مجموعه‌ی E برقرار باشد. قرار می‌دهیم:

$$M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|,$$

در این صورت $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ به طور یکنواخت به f بر E همگرا است اگر و فقط اگر:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0.$$

برهان. به [۳۲] مراجعه شود. □

قضیه ۱۰.۱.۱. *هرگاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته بر مجموعه E باشد و به‌طور یکنواخت به f همگرا باشد، آن‌گاه f بر E پیوسته خواهد بود.*

برهان. به [۱] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر مجموعه E تعریف شده‌اند. گوییم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر E نقطه به نقطه کران‌دار است هرگاه دنباله‌ی $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ به ازای هر $x \in E$ کران‌دار باشد، یعنی تابعی با مقادیر متناهی چون ϕ، که بر E تعریف شده، موجود باشد به‌طوری‌که:

$$|f_n(x)| < \phi(x), \qquad (x \in E,\ n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

گوییم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر E به‌طور یکنواخت کران‌دار است هرگاه عدد مثبتی مانند M موجود باشد به‌طوری‌که:

$$|f_n(x)| < M, \qquad (x \in E,\ n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

تعریف ۱.۱.۱۲. خانواده F از توابعی که بر مجموعه‌ی E از فضای متری X تعریف شده‌اند را بر E هم‌پیوسته گوییم، هرگاه به ازی هر $\epsilon > 0$، δ ی مثبتی باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x,\ y \in E$ هر وقت $d(x,\ y) < \delta$، آن‌گاه به ازای هر $f \in F$ داشته باشیم:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

در این‌جا d نشان دهنده‌ی متر X است. واضح است که هر عضو یک خانواده هم‌پیوسته، به‌طور یکنواخت پیوسته است.

قضیه ۱.۱.۱۳. *فرض کنید K مجموعه‌ای فشرده و F خانواده‌ای از توابع باشد که در K پیوسته‌اند. در این صورت گزاره‌های زیر هم ارزند:*

(۱) *خانواده F در K کران‌دار یکنواخت و هم‌پیوسته است.*

(۲) *هر دنباله از F دارای یک زیر دنباله‌ی همگرای یکنواخت در K است.*

برهان. به [۳۲] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۱.۱۴. مجموعه‌ی ناتهی $X \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک فضای برداری نامند هرگاه به ازای هر $x,\ y \in X$، و هر اسکالر c، داشته باشیم:

$$x + y \in X, \quad cx \in X.$$

تعریف ۱.۱.۱۵. اگر $x_1,\ \ldots,\ x_k \in \mathbb{R}^n$ و $c_1,\ \ldots,\ c_k$ اسکالرهایی باشند، بردار $c_1x_1 + \cdots + c_kx_k$ یک ترکیب خطی از $x_1,\ \ldots,\ x_k$ است. اگر $S \subseteq \mathbb{R}^n$ و E مجموعه تمام ترکیبات خطی عناصر S باشد، می‌گوییم S، E را می‌پیماید یا E پیمای S است.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم $x_1,\ \ldots,\ x_k \in \mathbb{R}^n$. مجموعه‌ی $\{x_1,\ \ldots,\ x_k\}$ را مستقل خطی می‌نامند هرگاه رابطه‌ی $c_1x_1 + \cdots + c_kx_k = 0$ ایجاب کند که $c_1 = \cdots = c_k = 0$. در غیر این صورت، $\{x_1,\ \ldots,\ x_k\}$ را وابسته خطی می‌نامند.

تعریف ۱.۱.۱۷. هر زیر مجموعه‌ی مستقل خطی فضای برداری X که X را بپیماید، یک پایه نام خواهد داشت.

تعریف ۱.۱.۱۸. ضرب داخلی توابع مختلط f و g در فضای برداری X را به صورت:

$$(f,\ g) = \int_a^b f\left(t\right) g^*\left(t\right)\ dt,$$

تعریف می‌کنند. هرگاه توابع f و g حقیقی باشند علامت مزدوج مختلط بر روی g باید حذف گردد.

تعریف ۱.۱.۱۹. تابع حقیقی $\|.\|$ تعریف شده بر فضای برداری X را یک نرم نامند هرگاه در سه خاصیت زیر صدق کند:

(۱) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$،

(۲) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$،

(۳) به ازای هر $x,\ y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی).

فضای برداری X مجهز به نرم $\|.\|$ را یک فضای برداری نرم‌دار یا فقط یک فضای نرم‌دار می‌نامند. بر فضای برداری نرم‌دار X یک متر برحسب نرم $\|.\|$ به صورت $d\left(x,\ y\right) = \|x - y\|$ تعریف می‌کنیم. از خواص نرم معلوم می‌شود که $d\left(x,\ y\right)$ یک متر بر X است.

تعریف ۱.۱.۲۰. گوییم دنباله‌ی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ در X همگرا در نرم به x است اگر $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$، یعنی اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نسبت به نرم القا شده به وسیله نرم همگرا به x باشد.

تعریف ۱.۱.۲۱. فضای نرم‌دار X که نسبت به متر القا شده به وسیله‌ی نرم‌اش تام است، یک فضای باناخ [۲] نام دارد. یعنی X یک فضای باناخ است اگر به ازای هر دنباله‌ی کشی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از X عنصری مانند $x \in X$ باشد به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$. لذا فضاهای باناخ نمونه‌های خاصی از فضاهای متری تام هستند.

تعریف ۱.۱.۲۲. نگاشت $\mathcal{T}$ از فضای برداری X به‌توی فضای برداری Y را یک عمل‌گر خطی (یا فقط عمل‌گر) می‌نامند هرگاه به ازای هر $x_1,\ x_2 \in X$ و هر $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{T}\left(c_1 x_1 + c_2 x_2\right) = c_1 \mathcal{T}\left(x_1\right) + c_2 \mathcal{T}\left(x_2\right).$$

توجه کنید که هر عمل‌گر خطی در $\mathcal{T}(0) = 0$ صدق می‌کند. اغلب در صورت خطی بودن $\mathcal{T}$، به‌جای $\mathcal{T}(x)$ می‌نویسند $\mathcal{T}x$. هرگاه X و Y دو فضای نرم‌دار باشند از علامت $\|.\|$ برای نرم هر دو استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱.۱.۲۳. فرض کنیم $\mathcal{T} : X \longrightarrow Y$ یک عمل‌گر خطی بین دو فضای نرم دار باشد. در این صورت نرم $\mathcal{T}$ با:

$$\|\mathcal{T}\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|\mathcal{T}x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leq 1}} \|\mathcal{T}x\|. \qquad (۱.۱)$$

[۲] Banach

تعریف می‌شود.
هرگاه $\|\mathcal{T}\|$ متناهی باشد، آن‌گاه $\mathcal{T}$ یک عمل‌گر کران‌دار نام دارد (البته اگر $\|\mathcal{T}\| = \infty$، $\mathcal{T}$ یک عمل‌گر بی‌کران نامیده می‌شود).
ملاحظه می‌کنیم که:

$$\|\mathcal{T}x\| \leq \|\mathcal{T}\| . \|x\| , \tag{۲.۱}$$

به ازای هر $x \in X$ برقرار است. برای مشاهده‌ی این امر، توجه می‌کنیم که اگر $x \neq ۰$ آن‌گاه:

$$\|\mathcal{T}\| = \sup_{x \in X} \frac{\|\mathcal{T}x\|}{\|x\|},$$

در نتیجه:

$$\frac{\|\mathcal{T}x\|}{\|x\|} \leq \|\mathcal{T}\| ,$$

و از آن‌جا که $\|x\| > ۰$ با ضرب دو طرف رابطه‌ی بالا در $\|x\|$ رابطه‌ی (۲.۱) به دست می‌آید.

لم ۲۴.۱.۱. *هرگاه $\mathcal{S}$ و $\mathcal{T}$ دو عمل‌گر خطی روی فضای برداری X باشند آن‌گاه:*

$$\|\mathcal{T}\mathcal{S}\| \leq \|\mathcal{T}\| \, \|\mathcal{S}\| . \tag{۳.۱}$$

برهان. با استفاده از رابطه (۲.۱) داریم:

$$\|\mathcal{T}\mathcal{S}x\| = \|\mathcal{T}(\mathcal{S}x)\| \leq \|\mathcal{T}\| \, \|\mathcal{S}x\| ,$$

$$\|\mathcal{S}x\| \leq \|\mathcal{S}\| \, \|x\| .$$

از ترکیب دو رابطه‌ی بالا داریم:

$$\|\mathcal{T}\mathcal{S}x\| \leq \|\mathcal{T}\| \, \|\mathcal{S}x\| \leq \|\mathcal{T}\| \, \|\mathcal{S}\| \, \|x\| ,$$

حال از آن‌جا که $x \in X$ و $x \neq ۰$:

$$\frac{\|\mathcal{T}\mathcal{S}x\|}{\|x\|} \leq \|\mathcal{T}\| \, \|\mathcal{S}\| ,$$

با سوپریمم گیری از رابطه‌ی بالا و استفاده از (۱.۱) داریم:

$$\|\mathcal{T}\mathcal{S}\| \leq \|\mathcal{T}\| \, \|\mathcal{S}\| .$$

□

قضیه ۲۵.۱.۱. *(اصل کران‌داری یکنواخت) فرض کنید $\{\mathcal{A}_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از عمل‌گرهای کران‌دار از فضای باناخ $\mathcal{X}$ به توی فضای نرم‌دار $\mathcal{Y}$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n x$ برای هر $x \in X$ موجود باشد، در این صورت عمل‌گرهای $\{\mathcal{A}_n\}_{n=۱}^{\infty}$ کران‌دار یکنواخت هستند و $\sup_{n\geq ۱} \|\mathcal{A}_n\| < \infty$.*

برهان. به [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۲۶.۱.۱. *(قضیه‌ی سری هندسی) فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ باشد و I عمل‌گر همانی روی $\mathcal{X}$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $\mathcal{A}$ یک عمل‌گر کران‌دار از $\mathcal{X}$ به توی $\mathcal{X}$ باشد که:*

$$\|\mathcal{A}\| < ۱,$$

در این صورت عمل‌گر $I - \mathcal{A}$ از $\mathcal{X}$ به توی $\mathcal{X}$ یک‌به‌یک و بروست و $(I - \mathcal{A})^{-۱}$ یک عمل‌گر خطی کران‌دار است و

$$\|(I - \mathcal{A})^{-۱}\| \leq \frac{۱}{۱ - \|\mathcal{A}\|}.$$

برهان. به [۲۰] مراجعه شود. □

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای برداری نرم‌دار باشند و عمل‌گر $\mathcal{K} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ خطی باشد. $\mathcal{K}$ را یک عمل‌گر فشرده می‌نامند هرگاه بستار مجموعه‌ی $\{\mathcal{K}x : \|x\|_{\mathcal{X}} \leq ۱\}$، در $\mathcal{Y}$ فشرده باشد، یا به طور معادل برای هر دنباله کران‌دار $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty} \subseteq \mathcal{X}$، دنباله $\{\mathcal{K}x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دارای یک زیردنباله همگرا در $\mathcal{Y}$ باشد.

لم ۲۸.۱.۱. *فرض کنید $\mathcal{X}$، $\mathcal{Y}$ و $\mathcal{Z}$ فضاهای باناخ و $\mathcal{K} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ و $\mathcal{L} : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$ عمل‌گرهای خطی باشند. هم‌چنین فرض کنید $\mathcal{K}$ یا $\mathcal{L}$ (یا هر دو) فشرده باشند. در این صورت عمل‌گر $\mathcal{LK}$ از $\mathcal{X}$ به توی $\mathcal{Z}$ فشرده است.*

برهان. به [۳] مراجعه شود. □

تعریف ۲۹.۱.۱. عمل‌گر $\mathcal{P} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ را یک عمل‌گر تصویری (یا تصویرگر) می‌نامند، هرگاه:

$$\mathcal{P}^۲ = \mathcal{P}. \tag{۴.۱}$$

لم ۳۰.۱.۱. *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای برداری باشند که $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$. هم‌چنین فرض کنید $\mathcal{P} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ یک عمل‌گر تصویری باشد. در این صورت برای هر $x \in \mathcal{Y}$ داریم:*

$$\mathcal{P}x = x. \tag{۵.۱}$$

برهان. فرض کنیم $x \in \mathcal{Y}$ دلخواه باشد. در این صورت:

$$\mathcal{P}v = x, \tag{۶.۱}$$

برای برخی $v \in \mathcal{X}$. پس:

$$\mathcal{P}x = \mathcal{P}(\mathcal{P}v) = \mathcal{P}^۲ v,$$

چون $\mathcal{P}$ یک عمل‌گر تصویری است از رابطه (۴.۱) نتیجه می‌شود که:

$$\mathcal{P}x = \mathcal{P}^۲ v = \mathcal{P}v,$$

از ترکیب رابطه بالا با رابطه (۶.۱) رابطه (۵.۱) به دست می‌آید. □