بسم الله الرحمن الرحيم

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

حل عددی معادلات انتگرال و انتگرال - دیفرانسیل با استفاده از روش تاو

نگارش:

لیلا سعیدی داشبلاغی

استاد راهنما:

دکتر ابوالفضل تاری مرزآباد

استاد مشاور:

دکتر سید حجت اله مومنی ماسوله

آذر ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر عزیزم،

مادر دلسوز

و

همسر مهربانم

قدردانی

سپاس خدایی که نعمت دانش و بینش را از برکت اخلاص و توحید بر ما ارزانی داشت.

وظیفه خویش می دانم که از زحمات بی دریغ استاد گرانقدر جناب آقای دکتر تاری که با راهنمایی های ایشان توانستم این پایان نامه را به اتمام برسانم، تشکر کنم. همچنین از استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر مومنی به خاطر مشاوره و راهنمایی های ارزشمند ایشان صمیمانه سپاسگزارم.

از خانواده ی عزیزم که راهنمایی هایشان همواره روشنی بخش راه زندگیم بود کمال تشکر و قدردانی را دارم و از خداوند متعال برای تمامی این عزیزان آرزوی سلامتی و موفقیت را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه نمایش روش ماتریسی تاو را برای معادلات خطی انتگرال- دیفرانسیل فردهلم- ولترا بر اساس مرجع [۲۷] تعمیم می‌دهیم. همچنین تعمیمی از فرمولبندی جبری روش تاو را برای جواب عددی معادلات انتگرال غیر خطی ولترا- همرشتاین بر اساس مرجع [۵۱] ارائه می‌کنیم. این تعمیم بر اساس روش عملیاتی تاو با توابع پایه چند جمله‌ای دلخواه برای ساختن نمایش معادل جبری مسئله می‌باشد. این نمایش یک دستگاه شبه پایین مثلثی خاص است که جواب آن مولفه‌های بردار جواب را می‌دهد.

در این پایان نامه حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرال غیر خطی ولترای نوع اول با استفاده از روش تاو نیز مورد بررسی قرار گرفته است به این صورت که معادله انتگرال غیر خطی ولترای نوع اول را به معادله انتگرال خطی ولترای نوع دوم تبدیل کرده، سپس روش تاو را برای آن به کار می‌بریم.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال، معادلات انتگرال- دیفرانسیل، معادلات ولترا- همرشتاین، معادلات انتگرال نوع اول، روش تاو.

فهرست مطالب

لیست جداول

پیشگفتار

یکی از شاخه‌های علم ریاضی که کاربردهای فراوانی در مسائل مهندسی و فیزیک دارد، معادلات انتگرال است. معادلات انتگرال در خیلی از مباحث فیزیک، زیست شناسی، شیمی و مهندسی ظاهر می‌شوند. مراجع [۱، ۲] منابع خوبی برای پی بردن به منشأ ظهور این گونه معادلات می‌باشند.
معادلات انتگرال ابتدا در اوایل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا[۱] معرفی شدند [۳، ۴، ۵]. ولترا در حال مطالعه پدیده رشد جمعیت و تأثیر وراثت بود که با اینگونه معادلات مواجه شد ونام مذکور را برای آنها انتخاب کرد. از آن زمان به بعد دانشمندان و محققین در پژوهش‌های کاربردی زیادی نظیر انتقال گرما، پدیده انتشار، پخش نوترون و غیره به حل این معادلات نیاز پیدا کردند.
از طرف دیگر در سال ۱۹۳۸ لانسوز[۲] روش جدیدی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معرفی کرد که از خانواده روشهای اسپکترال[۳] بود و به دلیل وجود پارامتر τ[۴] در آن، به روش تاو معروف گردید. در این روش مانند سایر روشهای اسپکترال جواب تقریبی به صورت بسط بر حسب توابع پایه‌ای نوشته می‌شود.
اولین بار در سال ۱۹۸۱ نسخه‌ای از روش تاو به نام روش تاو عملیاتی توسط اورتیز [۵] و سمرا [۶] برای حل عددی معادلات دیفرانسیل به کار گرفته شد [۲۷].

[۱] $Volterra$
[۲] $Lanczos$
[۳] $Spectral$
[۴] Tau
[۵] $Ortiz$
[۶] $Samara$

اورتیز و سمرا تحقیقات زیادی در مورد استفاده از روش تاو برای حل عددی معادلات از انواع مختلف و مقادیر آنها انجام داده‌اند، اما در مورد استفاده از این روش برای حل معادلات انتگرال، اولین بار در سال ۱۹۹۷ خواجه [۷] و ال–دائو [۸] [۴۴] از روش تاو بازگشتی برای حل نوع ساده‌ای از معادلات انتگرال استفاده کردند اما از سال ۱۹۹۹ حسینی وشهمراد این روش را برای حل عددی معادلات انتگرال و انتگرال- دیفرانسیل فردهلم و ولترا تعمیم دادند [۲۷، ۳۸، ۳۹] و از آن زمان تحقیقات زیادی در مورد بکارگیری روش تاو برای حل معادلات انتگرال خطی وغیر خطی از نوع دوم و نیز دستگاه معادلات انتگرال چه از نوع فردهلم و چه از نوع ولترا انجام گرفته است از جمله هادیزاده وقریشی در سال ۲۰۰۹ [۵۱] به صورت جالبی از این روش برای حل عددی معادلات انتگرال غیرخطی از نوع دوم استفاده کردند که در این پایان نامه به آن خواهیم پرداخت. همچنین در سال‌های اخیر روش تاو برای حل معادلات انتگرال و انتگرال- دیفرانسیل دو بعدی توسعه داده شده است [۵۲، ۵۳].

ساختار این پایان نامه به این صورت است که در فصل ۱ با انواع معادلات انتگرال آشنا شده و روش تاو را برای معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم- ولترا تعمیم می‌دهیم[۲۷]. حل عددی معادلات غیر خطی از نوع دوم ولترا- همرشتاین در فصل ۲ ارائه شده است [۵۱]. در فصل ۳ به حل عددی معادلات انتگرال غیر خطی نوع اول پرداخته شده است. به این صورت که ابتدا معادله انتگرال ولترای غیرخطی نوع اول را به معادله خطی نوع دوم تبدیل کرده و سپس با استفاده از روش تاو آن را حل می‌کنیم که حاصل آن در مقاله‌ای خلاصه شده و برای چاپ ارسال شده است. در پایان هر فصل نتایج عددی حاصل از روش آورده شده است. برنامه‌های کامپیوتری به کار رفته برای حل معادلات این پایان نامه به صورت پیوست آورده شده است.

---

[۷] $Khajah$

[۸] $El - Daou$

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ معرفی معادلات انتگرال

۱.۱.۱ مقدمه

یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $y(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد.
یک نمونه از یک معادله انتگرال که در آن $y(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود به صورت زیر است.

$$y(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt, \tag{۱.۱}$$

که در آن $K(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. باید توجه کرد که هسته معادله یعنی $K(x,t)$ وتابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند. هدف از بررسی معادلات انتگرال تعیین تابع مجهول یعنی $y(x)$ است که در رابطه (۱.۱) صدق کند.

۲.۱.۱ انواع معادلات انتگرال

تعریف ۱.۱.۱. *به معادلاتی نظیر (۱.۱) که تابع مجهول $y(x)$ و مشتق‌هایش به صورت خطی حضور پیدا کرده‌اند، معادلات انتگرال خطی می‌گویند. اما اگر تابع $y(x)$ با توابعی غیر خطی نظیر $y^2(x)$ یا $cos(y(x))$ وغیره تعویض شود، آنگاه معادله انتگرال را غیر خطی می‌گویند.*

متداول ترین معادلات انتگرال خطی را می توان در چهار گروه دسته بندی نمود.

۱. معادلات انتگرال فردهلم
۲. معادلات انتگرال ولترا
۳. معادلات انتگرال-دیفرانسیل

۴. معادلات انتگرال منفرد
همچنین معادلات انتگرال را با توجه به تعداد متغیرهای تابع مجهول به معادلات انتگرال یک یا چند متغیره تقسیم می‌کنند.
اکنون تعاریف وخواص عمده هر نوع را بررسی می‌کنیم.

معادلات انتگرال خطی فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرال گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{۲.۱}$$

که درآن هسته معادله انتگرال یعنی $K(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند و λ هم یک پارامتر معلوم است.
بر حسب اینکه $\phi(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادلات انتگرال فردهلم خطی به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند:
الف) اگر $\phi(x) = 0$ باشد، معادله (۲.۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود.

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = 0. \tag{۳.۱}$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.
ب) اگر $\phi(x) = 1$ باشد، معادله (۲.۱) به شکل زیر در خواهد آمد.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \qquad x \in [a,b]. \tag{۴.۱}$$

به این معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می‌گویند.
قابل توجه است که اگر $\phi(x) \neq 0, \ \forall x \in [a,b]$، بدون اینکه خللی در کلیت وارد شود می‌توان فرض کرد که $\phi(x) = 1$.

چند روش تحلیلی ساده که قادرند معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم را به نحو مطلوبی حل کنند عبارتند از:
الف. روش تجزیه ادومیان
ب. روش محاسبه مستقیم
ج. روش تقریب‌های متوالی
د. روش جایگذاری‌های متوالی
برای اطلاع از جزئیات بیشتر این روش‌ها می‌توان به مراجع [۶، ۷] مراجعه کرد.

معادلات انتگرال خطی ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا، یعنی معادلاتی که در آنها حد بالای انتگرال گیری به جای اینکه یک عدد ثابتی باشد تابعی از x است، به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \qquad (۵.۱)$$

که در آن تابع مجهول یعنی $y(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد.
معادلات انتگرال ولترا را نیز می‌توان با توجه به مقدار $\phi(x)$ به دو گروه دسته‌بندی نمود:
الف) در حالتیکه $\phi(x) = 0$ است، معادله (۵.۱) به صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = 0. \qquad (۶.۱)$$

به این معادله انتگرال ولترای نوع اول می‌گویند.
ب) در حالتیکه $\phi(x) = 1$ است، آنگاه معادله (۵.۱) به شکل زیر در خواهد

آمد.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \quad (۷.۱)$$

این را معادله انتگرال ولترای نوع دوم می‌نامند.
چند روش تحلیلی ساده که قادرند معادلات انتگرال ولترای نوع دوم را به نحو مطلوبی حل کنند عبارتند از:
الف. روش تجزیه ادومیان
ب. روش جواب سری
ج. روش تقریب‌های متوالی
د. روش جایگذاری‌های متوالی
جزئیات بیشتر این روش‌ها را می‌توان در مراجع [۶، ۷] دید.

تذکر ۲.۱.۱. *اگر در معادله انتگرال فردهلم نوع دوم (۴.۱) و معادله انتگرال ولترای نوع دوم (۷.۱)، شرط $f(x) = 0$ برقرار باشد، آنگاه معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن می‌نامند. در غیر این صورت معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال غیر همگن می‌گویند.*

معادلات انتگرال غیر خطی

اگر در معادلات انتگرال

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t,y(t))dt, \quad (۸.۱)$$

و

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t,y(t))dt, \quad (۹.۱)$$

تابع K نسبت به y غیرخطی باشد آنگاه معادلات فوق غیرخطی نامیده می‌شوند به طوری که معادله (۸.۱) معادله انتگرال غیرخطی فردهلم و معادله (۹.۱) یک معادله انتگرال غیرخطی ولترا گفته می‌شود.
معادلات زیر مثال‌هایی از معادلات انتگرال غیر خطی هستند.

$$y(x) = x + \int_0^1 xty^3(t)dt, \tag{۱۰.۱}$$

$$y(x) = x - \frac{1}{4}x^4 + \int_0^x ty^2(t)dt, \tag{۱۱.۱}$$

در مثال‌های بالا معادله (۱۰.۱) معادله انتگرال غیر خطی فردهلم ومعادله (۱۱.۱) معادله انتگرال غیر خطی ولترا هستند.
چند روش که قادرند برخی معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی را به نحو مطلوبی حل کنند عبارتند از:
الف. روش تجزیه مستقیم
ب. روش تجزیه ادومیان
وچند روش که قادرند برخی معادلات انتگرال ولترای غیر خطی را حل کنند عبارتند از:
الف. روش جواب سری
ب. روش تجزیه ادومیان
برای جزئیات بیشتر در مورد روش های فوق می‌توان به مراجع [۶، ۸، ۹] مراجعه نمود.

معادلات انتگرال- دیفرانسیل

در این گونه معادلات تابع مجهول $y(x)$ و حداقل یکی از مشتق‌هایش نظیر $y'(x)$ یا $y''(x)$ یا ... در معادله دیده می‌شوند.

جزئیات بیشتر درباره مواردی که این گونه معادلات ظاهر می‌شوند ونیزکاربردهای اینگونه معادلات در علوم دیگر مانند فیزیک، زیست شناسی، مهندسی مکانیک و غیره را می‌توان در مراجع [۲، ۲۴، ۲۵، ۲۶] پیدا کرد.
در زیر چند مثال از معادلات انتگرال- دیفرانسیل آورده شده است.

$$y'(x) = x - \int_0^1 e^{x-t} y(t)dt, \qquad y(0) = 0, \tag{۱۲.۱}$$

$$y''(x) = e^x - x + \int_0^1 xty'(t)dt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \tag{۱۳.۱}$$

$$y'(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t)dt, \qquad y(0) = 0, \tag{۱۴.۱}$$

$$y''(x) = -x + \int_0^x (x-t)y(t)dt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1. \tag{۱۵.۱}$$

با توجه به حدود انتگرال گیری، معادلات (۱۲.۱) و (۱۳.۱) معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم و معادلات (۱۴.۱) و (۱۵.۱) معادلات انتگرال- دیفرانسیل ولترا هستند. به علاوه معادلات (۱۵.۱)- (۱۲.۱) معادلات انتگرال- دیفرانسیل خطی نام دارند واین به آن دلیل است که تابع مجهول یعنی $y(x)$ ومشتق های آن در معادلهٔ مذکور به طور خطی حضور پیدا کرده‌اند. البته معادلات انتگرال- دیفرانسیل غیر خطی هم در خیلی از مسائل علوم مهندسی به کار برده می‌شوند.
چند روش تحلیلی که قادرند بعضی از معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم را حل کنند عبارتند از:

الف. روش تجزیه مستقیم

ب. روش تجزیه ادومیان

وچند روش که قادرند بعضی از معادلات انتگرال - دیفرانسیل ولترا را حل کنند عبارتند از:

الف. روش جواب سری

ب. روش تجزیه ادومیان

معادلات انتگرال منفرد

معادله انتگرال نوع اول

$$f(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt, \tag{۱۶.۱}$$

یا نوع دوم

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt, \tag{۱۷.۱}$$

را که در آنها حد پایین، حد بالا یا هر دو حدود انتگرال‌گیری نامتناهی باشند، معادله انتگرال منفرد می‌نامند. به علاوه اگر هسته معادلات انتگرال (۱۶.۱) و (۱۷.۱) در یک یا چند نقطه از بازه انتگرال‌گیری پیوسته نباشد، باز هم این گونه معادلات را معادلات انتگرال منفرد می‌نامند.

معادلات انتگرال یک بعدی و چند بعدی

تقسیم بندی دیگری که در معادلات انتگرال وجود دارد مربوط به تابع مجهول معادله انتگرال است به طوری که اگر تابع مجهول معادله، تابعی یک متغیره باشد معادله را معادله انتگرال یک بعدی گویند ولی اگر تابع مجهول معادله، تابعی چند متغیره باشد معادله را یک معادله انتگرال چند بعدی می‌نامند. مثال های زیر را در نظر بگیرید.

$$y(x) = 2\sqrt{x} - \int_0^x (x+t)y(t)dt, \tag{۱۸.۱}$$

$$u(x,t) - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xsin(y) + tsin(z))u(y,z)dydz \tag{۱۹.۱}$$

$$= xcos(t) + t + 4(xsin(1) - t)(cos(1) - sin(1))$$

$$u(x,t) - \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(e^{xt} + sin(y) - z)u^3(y,z)dydz = xe^{xt} - \frac{1}{6}sin(xt)$$
(۲۰.۱)

معادله (۱۸.۱) معادله انتگرال یک بعدی خطی، معادله (۱۹.۱) معادله انتگرال دو بعدی خطی و معادله (۲۰.۱) از [۱۰] معادله انتگرال دو بعدی غیر خطی هستند.

۲.۱ تعاریف مقدماتی

در این بخش به بعضی از مفاهیم به کار رفته در این پایان نامه می‌پردازیم.

۱.۲.۱ قضیه نقطه ثابت باناخ

قضیه نقطه ثابت باناخ[۱] یک قضیه مهم در فضاهای متریک است. این قضیه برای اثبات وجود و یکتایی جواب معین معادلات دیفرانسیل معمولی کاربرد دارد. جواب معادله دیفرانسیل به صورت یک نقطه ثابت از عملگر انتگرال مناسب بیان می‌شود که یک تابع پیوسته را به یک تابع پیوسته تبدیل می‌کند. قضیه نقطه ثابت باناخ برای نشان دادن اینکه عملگر انتگرال، نقطه ثابت منحصر به فرد دارد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیه نقطه ثابت باناخ: *فرض می‌کنیم (Y,d) یک فضای متریک کامل غیر تهی باشد. فرض می‌کنیم $Z : Y \to Y$ یک نگاشت انقباضی روی Y باشد یعنی یک عدد حقیقی نامنفی $q < 1$ وجود دارد به طوریکه برای هر $y, x \in Y$ داریم*

$$d(Z(y), Z(x)) \leq q.d(y,x)$$

[۱] $Banach\ fixed\ point\ theorem$

آنگاه نگاشت Z یک و فقط یک نقطه ثابت y^* در Y دارد (یعنی $Z(y^*) = y^*$).
به علاوه این نقطه ثابت را می‌توان به صورت زیر یافت:
با یک عنصر دلخواه $y_0 \in Y$ شروع می‌کنیم و یک دنباله تکراری به صورت $y_n = Z(x_{n-1})$ تعریف می‌کنیم. این دنباله همگراست و حد آن y^* است. نابرابری زیر سرعت همگرایی را نشان می‌دهد

$$d(y^*, y_n) \leq \frac{q^n}{1-q}.d(y_1, y_0)$$

که معادل است با

$$d(y^*, y_{n+1}) \leq \frac{q}{1-q}.d(y_{n+1}, y_n)$$

و

$$d(y^*, y_{n+1}) \leq q.d(y^*, x_n).$$

مقدار q شرط لیپ شیتز برای Z نامیده می‌شود.
برای توضیحات بیشتر در این خصوص می‌توان به [۱۱، ۱۲] مراجعه نمود.

۲.۲.۱ تابع تحلیلی

یک تابع تحلیلی[۲]، تابعی حقیقی روی یک مجموعه باز D در خط حقیقی است اگر برای هر $x_0 \in D$ بتوان نوشت

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

[۲] $Analytic\ function$