دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

رساله دکتری (جهت اخذ درجه Ph.D)

ریاضی محض (آنالیزغیرخطی–معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی)

عنوان:

مطالعه و بررسی وجود حداقل سه جواب ضعیف برای برخی مسائل بیضوی غیر خطی در R^N $(1 \leq N)$

استاد راهنما:

پروفسور قاسم علیزاده افروزی

اساتید مشاور:

دکترحسین ترابی تهرانی

(University of Nevada state, Las vegas)

دکتر حسن حسین زاده

نگارش :

شاپور حیدرخانی

مرداد ۱۳۸۸

قدردانی و تشکر

قبل از هر چیز خدای منان را سپاس می‌گویم که مرا راهنمایی و یاری نموده و همواره یار و یاور بندگانش می‌باشد.
مراتب تشکر و سپاس خود را از استاد راهنمای فرزانه و عزیزم

جناب آقای پروفسور قاسم علیزاده افروزی

ابراز می‌دارم که با راهنمایی‌هاو هدایت گرانبهایشان مرا در تدوین این رساله یاری فرمودند.
همچنین از اساتید مشاورم

جناب آقای دکترحسین ترابی تهرانی و جناب آقای دکتر حسن حسین زاده

کمال سپاسگزاری را دارم. در ضمن از خانوادهٔ عزیزم که همواره موجبات دلگرمی‌ام را فراهم نمودند، تشکر می‌کنم.

چکیده

در این رساله، ابتدا وجود حداقل سه جواب برای رده‌ای از معادلات شبه خطی به صورت زیر بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} u'' + \lambda h(u')f(x,u) = 0, \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

وسپس وجود حداقل سه جواب برای رده‌ای ازمعادلات شامل عملگر p-لاپلاسین با تابع وزن مثبت به شکل زیر مطالعه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta_p u + \lambda f(x,u) = a(x)|u|^{p-2}u, & in\, \Omega, \\ u = 0 & on\, \partial\Omega. \end{cases}$$

و پس از آن همان نتایج برای رده‌ای از دستگاه‌های شامل عملگر p-لاپلاسین به صورت زیر بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta_{p_1} u_1 + \lambda F_{u_1}(x, u_1, u_2, ..., u_n) = 0 & in\, \Omega, \\ \Delta_{p_2} u_2 + \lambda F_{u_2}(x, u_1, u_2, ..., u_n) = 0 & in\, \Omega, \\ ... \\ \Delta_{p_n} u_n + \lambda F_{u_n}(x, u_1, u_2, ..., u_n) = 0 & in\, \Omega, \\ u_i = 0 & on\, \partial\Omega; \qquad i = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

برای اثبات وجود جواب برای مسائل فوق از روش تغییراتی و نظریه سه نقطه بحرانی استفاده می‌کنیم.

نهایتاً به بررسی ساختن نامساوی مینیماکس برای رده‌ای از تابعکها که نقش اساسی در نتایج بدست آمده دارد پرداخته و کاربردهایی از آن برای برخی مسائل مقدار مرزی ارائه می دهیم.

کلمات کلیدی: معادلات $p-$لاپلاسین، روش تغییراتی، نظریه سه نقطه‌بحرانی، شرط دیریکله، نامساوی مینیماکس.

فهرست مندرجات

مقدمه

در میان شاخه‌های مختلف علم ریاضی، آنالیز غیر خطی یکی از مهم‌ترین و شاخص ترین آن می‌باشد. موفقیت این رشته به دلیل کاربرد وسیعی است که در پدیده‌های مختلف فیزیکی، مهندسی مکانیک کوانتومی، فرایندهای شیمیایی و اقتصاد دارد. در واقع در مدل بندی بسیاری از پدیده‌های طبیعی، به نحوی به یک معادله دیفرانسیل جزیی برمی‌خوریم. در سالهای اخیر بسیاری از پژوهشگران و آنالیزدانان، به مطالعه رفتار جوابهای دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل جزیی از نوع بیضوی با شرط مرزی، به کمک آنالیز غیر خطی پرداخته‌اند. آنالیز غیرخطی و حساب تغییرات هم اکنون به عنوان یکی از شاخه های بسیار جذاب و پرکار در زمینه مطالعه معادلات بیضوی با شرط مرزی، تبدیل شده است.

در این رساله ابتدا وجود حداقل سه جواب را برای رده‌ای از معادلات شبه خطی بررسی می‌کنیم، سپس وجود حداقل سه جواب ضعیف برای رده‌ای ازمعادلات شامل عملگر p-لاپلاسین با تابع وزن مثبت بررسی کرده و پس از آن نتایج مشابه را برای رده‌ای از دستگاه معادلات شامل عملگر $p-$لاپلاسین مطالعه میکنیم. در آخر به بررسی ساختن نامساوی مینیماکس برای رده‌ای از تابعکهاکه نقش اساسی در نتایج بدست آمده دارد پرداخته و کاربردهایی از آن برای برخی مسائل مقدار مرزی ارائه می دهیم.

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل به معرفی مفاهیمی که در سراسر این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم. ابتدا معادلات دیفرانسیل جزیی و برخی کاربردهای آن را معرفی می‌کنیم، سپس عملگر بیضوی را تعریف نموده و مروری گذرا بر فضاهای باناخ، هیلبرت، L^p، سوبولوف و قضایای مرتبط با آنها خواهیم داشت. مفاهیم، تعاریف و قضایادر این فصل از منابع [1,32,34,37,40] گرفته شده‌اند.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم پایه‌ای

تعریف ۱.۱.۱ (معادله دیفرانسیل)

هر معادله شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادله دیفرانسیل گویند. معادلات دیفرانسیل کاربرد زیادی در ریاضیات، فیزیک، مهندسی، اقتصاد و بسیاری از زمینه های دیگر علوم دارند.

تعریف ۲.۱.۱ (معادله دیفرانسیل جزیی)

هر رابطه بین متغیرهای مستقل $x_۱, ..., x_n$ و متغیر تابع u و مشتقات متغیر تابع نسبت به متغیرهای مستقل را یک معادله دیفرانسیل جزیی گویند. اگر $u = f(x_۱, ..., x_n)$ یک تابع چند متغیره باشد، مشتق مرتبه kام u نسبت به مولفه x_i را به صورت $\frac{\partial^k u}{\partial x_i^k}$ نشان می‌دهیم، هرگاه بزرگترین مرتبه مشتق ظاهر شده k باشد، معادله دیفرانسیل از مرتبه k است.

تعریف ۳.۱.۱ (دامنه)

فرض کنیم R^n فضای اقلیدسی $n-$بعدی $(n \geq ۲)$ با نقاط $(x_۱, ..., x_n)$ که $x_i \in R$ و

$\|x\|^{2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2}$ باشد. در این صورت $\Omega \subset R^n$ را یک دامنه گوییم هرگاه باز و همبند باشد.

تعریف ۴.۱.۱ :

مجموعه همه توابع پیوسته روی Ω را با $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم . برای $k \in N$، $C^k(\Omega)$ نشاندهنده توابعی هستند که همه مشتقات تا مرتبه kـام آنها روی Ω پیوسته است. $C^\infty(\Omega)$ کلاس همه توابعی هستند که برای هر عدد طبیعی k متعلق به $C^k(\Omega)$ باشد.

تعریف ۵.۱.۱ :

محمل یک تابع پیوسته f روی R^n به صورت زیر تعریف می شود:

$$supp\, f = \overline{\{x \in R^n : \, f(x) \neq 0\}} = K$$

یعنی برای هر $x \in R^n$ اگر x عضو K نباشد آنگاه $f(x) = 0$. همان طور که می دانیم (طبق قضیه هاینه برل) مجموعه های بسته و کراندار در R^n فشرده می باشند بنابراین اگر محمل f کراندار باشد می گوییم f دارای محمل فشرده است. فضای همه توابع پیوسته f که محمل فشرده دارند را با $C_0(R^n)$ نمایش می دهیم. مشابهاً $C_0(\Omega)$ نشاندهنده توابع پیوسته روی Ω می باشد که محمل آنها یک زیرمجموعه فشرده از Ω است. همچنین $C_0^k(\Omega)$ نیز به طریق مشابه قابل تعریف است.

تعریف ۶.۱.۱ (تابع آزمون)

تابع f، تعریف شده روی مجموعه باز غیر تهی $\Omega \subset R^n$ را یک تابع آزمون نامند هرگاه $f \in C^\infty(\Omega)$ و یک مجموعه فشرده مانند $K \subset \Omega$ موجود باشد به طوری که محمل f در K قرار داشته باشد. مجموعه تمام این توابع را با $C_0^\infty(\Omega)$ نشان می دهند.

تعریف ۷.۱.۱ **(مجموعه های اندازه پذیر و توابع اندازه پذیر)**

فرض می کنیم Ω یک دامنه در R^n و μ اندازه لبگ در R^n باشد. مجموعه هایی که روی آنها μ خوش تعریف است را مجموعه های اندازه پذیر می نامیم. توابع f را که برای آنها مجموعه$\{x \in R^n : f(x) < \alpha\}$ برای هر α حقیقی یک مجموعه اندازه پذیر باشد توابع اندازه پذیر می نامیم.

تعریف ۸.۱.۱ **(فضای $L^p(\Omega)$)**

فرض کنید Ω یک دامنه کراندار در R^n و p یک عدد حقیقی مثبت باشد و همچنین u یک تابع اندازه پذیر و تعریف شده روی Ω باشد. تعریف می کنیم:

$$\|u\|_p = \{\int_\Omega |u(x)|^p dx\}^{\frac{1}{p}}$$

در این صورت $L^p(\Omega)$ را متشکل از همه u هایی می گوییم که برای آنها داشته باشیم:

$$\|u\|_p < \infty$$

$\|u\|_p$ را نرم L^p تابع u می نامیم. در $L^p(\Omega)$ توابعی را یکی می گیریم که به طور تقریباً همه جا با هم برابر باشند، یعنی اندازه نقاطی که با هم برابر نیستند برابر با صفر باشد. می گوییم $u = ۰$ در $L^p(\Omega)$ اگر $u(x) = ۰$ به طور تقریباً همه جا در Ω. $L^p(\Omega)$ یک فضای برداری است ([32]).

تعریف ۹.۱.۱ **(انتگرال پذیری موضعی تابع f روی دامنه Ω)**

مجموعه همه توابع تعریف شده روی قلمرو Ω که انتگرال شان تعریف شده و متناهی باشد را

توابع انتگرال پذیر می نامیم. اغلب اوقات با توابعی که به طور موضعی انتگرال پذیر هستند روبرو می شویم یعنی توابعی که روی هر زیر مجموعه فشرده از Ω انتگرال پذیر هستند و لزومی ندارد که روی خود Ω انتگرال پذیر باشند. مجموعه همه چنین توابعی را با $L_{loc}^{1}(\Omega)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ (سوپریمم اساسی)

فرض کنید u یک تابع اندازه پذیر روی Ω باشد. می گوییم u به طور اساسی کراندار است هر گاه یک ثابت $\alpha \in R$ وجود داشته باشد به طوری که رابطه $|u(x)| \leq \alpha$ به طور تقریباً همه جا در Ω برقرار باشد. به بزرگترین کران پایین (اینفیمم) چنین α هایی سوپریمم اساسی می گوییم و آن را با نماد زیر نشان می دهیم:

$$ess\ sup_{x\in D}|u(x)| = inf\{\alpha :\ \mu(\{x : |u(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

تعریف ۱۱.۱.۱ (فضای $L^{\infty}(\Omega)$)

$L^{\infty}(\Omega)$ فضای برداری متشکل از همه توابعی است که سوپریمم اساسی آنها متناهی باشد. نرم در این فضا به صورت زیر تعریف می شود:

$$||u||_{\infty} = ess\ sup_{x\in D}|u(x)|$$

تعریف ۱۲.۱.۱ (فضای $L^p_{loc}(\Omega)$)

برای $1 \leq p < \infty$، $L^p_{loc}(\Omega)$ عبارت است از توابع حقیقی مقدار و اندازه پذیر u روی Ω به طوری که برای هر زیر مجموعه فشرده K از Ω داشته باشیم:

$$\int_K |u(x)|^p dx < \infty$$

تعریف ۱۳.۱.۱ (تابع کاراتئودوری)

فرض کنید $\Omega \subset R^n$ یک یک دامنه باشد. تابع

$$\begin{cases} f : \Omega \times R^n \to R \\ (x,t) \to f(x,t) \end{cases}$$

را یک تابع کاراتئودوری نامند هرگاه

۱) نگاشت $t \to f(x,t)$ برای تقریباً همه x های در Ω پیوسته باشد.

۲) نگاشت $x \to f(x,t)$ برای هر t در R^n اندازه پذیر باشد. یعنی برای هر مجموعه باز A در R، $[f(x,t)]^{-1}(A)$ یک مجموعه اندازه پذیر باشد.

همچنین اگر برای هر $\varrho > 0$ یک تابع مانند $l_\varrho \in L^1(\Omega)$ با

$$\sup_{|t|\leq\varrho} |f(x,t)| \leq l_\varrho(x)$$

برای تقریباً همه x های در Ω موجود باشد، آنگاه تابع f را یک تابع L^1-کاراتئودوری گوییم .

۲.۱ فضاهای باناخ و هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱ (فضای خطی نرمدار و باناخ)

فضای برداری X را یک فضای خطی نرمدار نامیم هر گاه نرم روی X که با نگاشت

$$\begin{cases} P : X \to R \\ x \mapsto \|x\| \end{cases}$$

معرفی می شود دارای شرایط زیر باشد:

۱) $\|x\| \geq ۰$ برای هر $x \in X$ و $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$،

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ برای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in R$،

۳) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ برای هر $x, y \in X$.

یک فضای نرمدار خطی X، تحت متر تعریف شده در زیر یک فضای متریک می باشد:

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad ; \qquad \forall x, y \in X$$

در نتیجه یک دنباله $\{x_n\} \subset X$ همگرا به عنصر $x \in X$ است، هر گاه

$$\|x_n - x\| \to ۰$$

همچنین $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است هر گاه $\|x_m - x_n\| \to ۰$ وقتی که $m, n \to \infty$. هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام (کامل) باشد یعنی هر دنباله کوشی در X با متر تعریف شده به وسیله نرمش به نقطه ای از X همگرا باشد.

تعریف ۲.۲.۱ **(فضای ضرب داخلی و هیلبرت)**

فضای برداری (حقیقی) H را یک فضای ضرب داخلی نامیم هر گاه به هر زوج مرتب از بردارهای x,y در H یک عدد حقیقی مانند $<x,y>$ به نام حاصلضرب داخلی x,y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند:

۱) برای هر $x,y \in H$ ، $<x,y>=<y,x>$،

۲) برای هر $\lambda_۱,\lambda_۲ \in R$ و هر $x_۱,x_۲,y \in H$ داشته باشیم:

$$<\lambda_۱ x_۱ + \lambda_۲ x_۲, y> = \lambda_۱ <x_۱,y> + \lambda_۲ <x_۲,y>$$

۳) برای هر $x \in H$ ، $<x,x> \geq ۰$ ،

۴) $x=۰$ اگر و تنها اگر $<x,x>=۰$.

بنابر خاصیت (۳) می توان $\|x\|$ یعنی نرم بردار $x \in H$ را ریشه دوم نامنفی $<x,x>$ تعریف کرد. یعنی:

$$\|x\| = <x,x>^{\frac{۱}{۲}} \qquad ; \qquad \forall x \in H$$

در این صورت به وضوح شرایط (۱) و (۲) در تعریف ۱.۲.۱ برقرارند. برای اثبات نامساوی مثلثی مطابق نامساوی کوشی—شوارتز به ازای هر $x,y \in H$ داریم:

$$|<x,y>| \leq \|x\|\|y\|$$

و همچنین با کمک نامساوی $<x,y> \leq |<x,y>|$ به دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^۲ &= <x+y,x+y> = \|x\|^۲ + ۲<x,y> + \|y\|^۲ \\ &\leq (\|x\|+\|y\|)^۲ \end{aligned}$$

پس:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

بنابراین تمام اصول موضوع یک فضای نرمدار خطی برقرار می باشد لذا یک فضای ضرب داخلی H، یک فضای نرمدار خطی نیز است. هر گاه این فضای ضرب داخلی تام باشد آنرا یک فضای هیلبرت می گویند. هر گاه $<x, y> = \circ$، برای هر زیرفضای M از H، متمم متعامد را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$M^{\perp} = \{x \in H | <x, y> = \circ, \qquad \forall y \in M\}$$

به وضوح $M^{\perp}$ یک زیرفضای بسته ای از H است. اگر M نیز بسته باشد آنگاه H جمع مستقیم M و $M^{\perp}$ است و می نویسیم:

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

۳.۱ عملگرهای خطی

بررسی نگاشت های بین فضای توابع بسیار با اهمیت است. دسته‌ی مهم این نگاشت ها، نگاشت هایی هستند که بین فضاهای برداری تعریف می شوند.

تعریف ۱.۳.۱ (عملگر خطی)

فرض کنیم X و Y فضاهای برداری باشند، نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی نامیده می

شود هرگاه برای هر $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ و هر $x_1, x_2 \in X$ داشته باشیم

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2).$$

بعلاوه عملگر خطی از X به میدان اسکالر، تابعک خطی نامیده می شود.

تعریف ۲.۳.۱ **(انواع معادلات دیفرانسیل جزیی)** [32]

یک معادله دیفرانسیل جزیی برای یک تابع $u(x_1, ..., x_n)$ به صورت زیر است:

$$F(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}, u_{x_1,x_1}, u_{x_1,x_2}, ...). \qquad (۱.۱.۳)$$

مرتبه معادله (۱.۱.۳) همان مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله است. بهرحال، معادله (۱.۱.۳) خطی است اگر بطور خطی وابسته به u و مشتقات آن باشد، نیم خطی است اگر همه مشتقات u با ضرائب وابسته به x خطی باشند و اگر همه مشتقات بالاترین مرتبه u با ضرائب فقط وابسته به x، u و مشتقات مرتبه پایین تر u خطی باشند، آنگاه گوییم که یک معادله شبه خطی است.

تعریف ۳.۳.۱ **(فضای دوگان)**

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد، در این صورت خانواده‌ی همه‌ی تابعک های خطی و کراندار $f : X \longrightarrow R$ با نرم

$$||f|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||}$$

خود یک فضای باناخ است که آنرا دوگان فضای X نامیده و با X^* نشان می دهیم.

تعریف ۴.۳.۱ **(فضای باناخ انعکاسی)**

فضای باناخ X انعکاسی نامیده میشود هرگاه ایزومتری $x \to l_x$ از $X \to X^{**}$ تعریف شده بوسیله $l_x y = y(x)$ پوشا باشد.

تعریف ۵.۳.۱ **(همگرایی ضعیف)**

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، دنباله $\{x_n \in X\}$ همگرای ضعیف به عنصر $x \in X$ است هرگاه

$$f(x_n) \to f(x_n); \qquad \forall f \in X^*.$$

تعریف ۶.۳.۱ **(خواص اساسی همگرایی ضعیف)**

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد،در این صورت داریم:

۱) اگر $x_n \to x$ همگرای قوی باشد، آنگاه $x_n \to x$ به طور ضعیف در X،

۲) اگر $x_n \to x$ همگرای ضعیف در X باشد، آنگاه بطور یکنواخت کراندار است و

$$||x|| \leq \lim_{n\to\infty} \inf ||x_n||.$$

تعریف ۷.۳.۱ **(نیم پیوسته ضعیف پایینی)**

تابعک پیوسته F روی فضای باناخ X نیم پیوسته ضعیف پایینی است هرگاه

$$F(u) \leq \lim_{j\to\infty} \inf F(u_j)$$

وقتیکه $u_j \to u$ به طور ضعیف در X. پس نرم روی یک فضای باناخ نیم پیوسته ضعیف پایینی است.

تعریف ۸.۳.۱ (عملگر کراندار)

فرض کنیم X, Y فضاهای برداری با نرم $\|.\|_Y$ و $\|.\|_X$ باشند. می گوییم عملگر خطی T کراندار است اگر یک ثابت مثبت مانند M وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

به عبارتی اگر A در X کراندار باشد آنگاه $T(A)$ در Y کراندار است. همچنین نرم عملگر T به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|T\| = \sup_{x\neq \circ} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

تعریف ۹.۳.۱ (عملگر خطی فشرده)

فرض کنیم X,Y فضاهایی نرمدار باشند. در این صورت عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ فشرده نامیده می شود، هرگاه T خطی بوده و برای هر زیر مجموعه‌ی کراندار از X مانند M، $\overline{T(M)}$ فشرده باشد.

قضیه ۱۰.۳.۱ (فشردگی و پیوستگی) [32]

فرض کنیم X,Y فضاهایی نرمدار باشند، آنگاه هر عملگر فشرده‌ی $T : X \longrightarrow Y$ کراندار است و لذا پیوسته می باشد.

تعریف ۱۱.۳.۱ (نشاندن)

فرض کنیم Ω یک دامنه در R^n و c یک ثابت باشد. اگر X, Y فضاهای باناخ باشند بطوریکه $X \subset Y$ و برای هر $u \in X$ داشته باشیم:

$$\|u\|_Y \leq c\|u\|_X,$$

آنگاه گوییم X بطور پیوسته در Y نشانده می شود. و یا بطور معادل می توان گفت عملگر همانی $I : X \longrightarrow Y$ کراندار باشد. همچنین می گوییم X بطور فشرده در Y نشانده می شود هرگاه عملگر نشاندن I فشرده باشد.

قضیه ۱۲.۳.۱ (نامساوی سوبولف برای $p < n$) [1]

فرض کنیم Ω یک دامنه در R^n، $1 \leq p < n$ و $q = \frac{np}{n-p}$ باشند. آنگاه ثابت $c = c(n, p)$ وجود دارد بطوریکه برای هر $u \in C^1(\Omega)$ داریم:

$$\|u\|_q \leq c\|\nabla u\|_p.$$

قضیه ۱۳.۳.۱ (نشاندن سوبولف) [1]

فرض کنیم Ω دامنه‌ای در R^n باشد. در اینصورت:

(i) اگر $p < n$ و $p \leq q \leq \frac{np}{n-p}$، آنگاه $W^{1,p}_0(\Omega)$ در $L^q(\Omega)$ بطور پیوسته نشانده می شود؛

(ii) اگر $p = n$ و $p \leq q \leq \infty$، آنگاه $W^{1,p}_0(\Omega)$ در $L^q(\Omega)$ بطور پیوسته نشانده می شود؛

(iii) اگر $p > n$، $0 \leq \alpha \leq 1 - \frac{n}{p}$ و ω کراندار باشد، آنگاه $W_0^{1,p}(\Omega)$ در $C^{\alpha}(\Omega)$ بطور پیوسته نشانده می شود.

قضیه ۱۴.۳.۱ (نشاندن فشرده‌ی ریلیچ—کوندراخوف) [1]

فرض کنیم Ω دامنه‌ای در R^n باشد. در اینصورت داریم:

(i) اگر $p \leq n$ و $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$، آنگاه $W^{1,p}(\Omega)$ در $L^q(\Omega)$ بطور فشرده نشانده می شود؛

(ii) اگر $p > n$، $0 \leq \alpha \leq 1 - \frac{n}{p}$، آنگاه $W_0^{1,p}(\Omega)$ در $C^{\alpha}(\Omega)$ بطور فشرده نشانده می شود.

۴.۱ عملگرهای بیضوی، اتحادهای گرین و قضیه دیورژانس

تعریف ۱.۴.۱ (بردار گرادیان)

اگر u در R^n تعریف شده باشد گرادیان u در $x = (x_1, ..., x_n)$ برداری است در R^n که با $\nabla u = gradu = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})$ تعریف می شود.

تعریف ۲.۴.۱ (دیورژانس)

اگر $u = (u_1, ..., u_n)$ یک میدان برداری باشد دیورژانس u در $x = (x_1, ..., x_n)$ به صورت