دانشگاه پیام نور

**دانشکده علوم پایه**

**پایان نامه**

**برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد**

**رشته ریاضی محض ( جبر)**

**گروه ریاضی**

# بررسی حلقه‌های یکداری که در آن پوچ کننده‌های چپ، ایده آل های پوچ هستند

**فاطمه مرودشتی**

**استاد راهنما :**

**دکتر احمد خاکساری**

**استاد مشاور :**

**دکتر ناصر امیری**

**بهمن ۱۳۹۱**

دانشگاه پیام نور


**دانشکده علوم پایه**

**مرکز شیراز**


**پایان نامه**

**برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد**

**رشته ریاضی محض ( جبر)**

**گروه ریاضی**

# بررسی حلقه‌های یکداری که در آن پوچ کننده‌های چپ، ایده آل های پوچ هستند


**فاطمه مرودشتی**

**استاد راهنما :**

**دکتر احمد خاکساری**

**استاد مشاور :**

**دکتر ناصر امیری**


**بهمن ۱۳۹۱**

تاریخ : ۹۱/۱۱/۱۷
شماره : ۰۵/۱۶۲۷۷
پیوست :

باسمه تعالی

دانشگاه پیام نور استان فارس

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

## صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد **خانم فاطمه مرودشتی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** گرایش **جبر** به شماره دانشجویی **۸۹۰۰۷۴۱۹۵** با عنوان:

**" بررسی حلقه‌های یکداری که در آن پوچ‌کننده‌های چپ، ایده‌آل‌های پوچ هستند"**

با حضور هیات داوران در روز **سه‌شنبه** مورخ **۱۳۹۱/۱۱/۱۷** ساعت **۹ صبح** در محل ساختمان **اندیشه دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ۱۸ به حروف هجده با درجه عالی تشخیص داد.

| ردیف | نام و نام‌خانوادگی | هیات داوران | مرتبه دانشگاهی | دانشگاه | امضاء |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | دکتر احمد خاکساری | راهنما | دانشیار | پیام‌نور شیراز | |
| ۲ | دکتر سیدناصر امیری | مشاور | استادیار | پیام‌نور فیروزآباد | |
| ۳ | دکتر محبوبه حسین‌یزدی | داور | استادیار | پیام‌نور شیراز | |
| ۴ | امیر اکبری | نماینده تحصیلات تکمیلی | مربی | پیام‌نور شیراز | |

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۰
دورنگار : ۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۹
صندوق پستی : ۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

## (اصالت نشر و حقوق مادی ومعنوی اثر )

اینجانب ......فاطمه مرودشتی...... دانشجوی ورودی سال ..............۸۹.......... مقطع کارشناسی ارشد رشته ....ریاضی محض..... گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام . بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود .

دانشجو تائید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است .

نام و نام خانوادگی دانشجو
فاطمه مرودشتی
تاریخ و امضاء

اینجانب ......فاطمه مرودشتی..... دانشجوی ورودی سال ............۸۹......... مقطع کارشناسی ارشد رشته ......ریاضی محض...... گواهی می نمایم چنانچه بر اساس تعریف مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب ، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما ، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب ، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم .

نام و نام خانوادگی دانشجو
فاطمه مرودشتی
تاریخ و امضاء

**تقدیم:**

بابوسه بردستان پدرم،

اولین گرانمـــــــــایه استاد زندگیم،

که مفهوم ریاضیات را با وجودش یافتم.

بزرگمردی که وسعت نگاهش،دریایی ازآرامش بودوگرمای وجودش نوید فردایی روشنتر.

تقدیم:

به مهربان مادرم،

معجزه فداکاری و ایثـــــــار پروردگارم،

که باوی معنای صبرراآموختم وعاشقانه یادش را درسیرآمالم حکاکی نمودم.

کلمات دربیان وصف دریای مهــــــــرش،ناتوان وجملات درافق کمالش ناقصند.

**وتقدیم:**

با عشق به برادرانم،

اسوه ی مردانگی وشهامت

که زندگانیم را تنها با آوای حضورشان می طلبم

و در کشاکش لحظات و در طنین روزگارانم همواره یار و حامی من بودند.

# سپاسگزاری

پروردگارا، امروز با تکیه بر قدرت بیکرانت و با قلمی سرشار از شکرانه ی الطافت، وظیفه ای خطیر بر من روا داشتی تا انعکاسی بس کم سو از فراوان موهبتت را به قلم کشم و گوشه ای بس ناچیز از بینهایت رازهای گیتی را بر کاغذ می نهم؛ باشد که بدانم بی لطف تو هرگز نتوان سخنی را پیمود.

نیک می دانم تلاشها و زحمات بزرگ مردان این مملکت را هرگز نمی توان در محدود سپید این رساله جای داد؛ لیک با نهایت احترام و ادب سپاسگزاری می نمایم از تمامی کسانی که مرا در انعکاس تلاشها و موهبت های خود یاری نمودند تا امروز مفتخرانه ارئه گر این مهم باشم. با عنایت خالصانه ترین سپاس ها، تشکر می نمایم از استادان بزرگوار **جناب آقای دکتر احمد خاکساری و جناب آقای دکتر ناصر امیری** که با راهنمایی های دلسوزانه و گرانقدر خویش، خردمندانه این حقیر را در پیشبرد این رساله یاری نمودند.

همچنین از ریاست محترم دانشگاه، ریاست محترم دانشکده علوم پایه، تمامی اساتید گرانقدر بخش ریاضی ، جناب آقای اکبری و تمامی کارکنان زحمتکش این دانشگاه به خاطر زحمات بیدرغشان در ارائه ی این مقاله کمال تشکر و قدردانی را دارم. انشاء الله همواره در پرتو الطاف الهی موفق و پیروز باشند.

## چکیده:

حلقه $R$ ، $NZI$ نامیده می شود؛ اگر برای هر $a \in R$ ، $L(a)$ یک $N$-ایده آل از R باشد. در این مقاله، ابتدا برخی ویژگی های اساسی و بسط های پایه از حلقه هایNZI را مطالعه می نماییم. سپس منظم بودن قوی از حلقه های $NZI$ را مطالعه و به نتایج زیر می رسیم :

۱) فرض کنید $R$ یک $SF$- حلقه چپ باشد ، آنگاه $R$ یک حلقه منظم قوی است اگر وتنها اگر $R$ یک حلقه $NZI$ باشد .

۲) اگر $R$ یک حلقه $MC2$ چپ $NZI$ باشد و هر $R$- مدول چپ منفرد ساده، پوچ انژکتیو باشد؛ آنگاه $R$کاهش یافته می باشد .

۳) فرض کنید $R$ یک حلقه $NZI$ باشد. آنگاه $R$ یک حلقه قویا منظم است اگر و تنها اگر $R$ یک حلقه منظم وان نیومن[1] باشد .

٤) فرض کنید $R$ یک حلقه $NZI$ باشد آنگاه $R$ یک حلقه پاک است اگر و تنها اگر $R$ یک حلقه جابجایی باشد .



**واژگان کلیدی:** حلقه کاهش پذیر، حلقه $SF$ ، حلقه قویا منظم، $N$- ایده آل، حلقه $NZI$، پوچ انژکتیو.


[1]Von Neumann

# فهرست مطالب

## مقدمه

تمامی حلقه های در نظر گرفته شده در این مقاله یکدار بوده و مدول‌ها یکانی می باشند. علائم $J(R)$ ، $P(R)$ ، N(R)، E(R)، ($z_L(R)$ و یا $z_r(R)$) و ($Soc(R^R)$ و یا $Soc(R_R)$)، به ترتیب مخفف رادیکال جیکوبسون، رادیکال اول، مجموعه تمام عناصر پوچ توان، مجموعه تمام عناصر خود توان، ایده‌ال منفرد چپ (و یا راست) و پایه چپ $R$ (یا راست) می‌باشد. برای هر زیر-مجموعه غیر تهی $X$ از $R$ داریم:

$$l(X) = l_R(X) \text{ و } r(X) = r_R(X)$$

که این به ترتیب نشان دهنده مجموعه پوچ سازهای راست $X$ و مجموعه پوچ سازهای چپ $X$ در $R$ می باشد. علی الخصوص اگر $X = \{a\}$ باشد، می‌نویسیم:

$$l(X) = l(a) \text{ و } r(X) = r(a)$$

حلقه $R$ منظم (وان نیومن) نامیده می‌شود[۹] اگر برای هر $a \in R$، عنصر $b \in R$ وجود داشته باشد بطوری‌که $a = aba$ .

حلقه $R$ قویاً منظم نامیده می‌شود[۱۸]، اگر برای هر $a \in R$، عنصر $b \in R$ وجود داشته باشد، بطوریکه $a = a^2b$. حلقه $R$کاهش یافته نامیده می‌شود[۱۹] اگر $N(R) = 0$ باشد. رگه[1][۱۸] ثابت نمود که $R$ قویاً منظم است اگر وتنها اگر $R$ منظم کاهش یافته باشد. بر اساس تعریف کوهن[2][٦] حلقه $R$ وارون‌پذیر است اگر $ab = 0$، به ازای هر $a, b \in R$ نتیجه دهد که $ba = 0$ و $R$ را نیم جابجایی می نامیم، اگر $ab = 0$ نتیجه دهد که $aRb = 0$ . به وضوح $R$ یک حلقه

[1] Rege
[2] Cohn

نیم جابجایی است اگر و تنها اگر $L(a)$ برای هر $a \in R$ یک ایده آل از $R$ باشد. حلقه $R$ آبلی نامیده می‌شود اگر هر عضو خود توان از $R$ در $C(R)$ باشد. بدیهی است حلقه‌های نیم جابجایی آبلی می‌باشند. برای چندین سال، کاربرد حلقه‌های نیم‌جابجایی توسط بسیاری از محققان مورد مطالعه قرار گرفته است. کیم، نام و کیم[1][۱۲،قضیه٤]ثابت نمودند، اگر $R$ یک حلقه نیم‌جابجایی باشد و هر $R$- مدول چپ منفرد ساده $YJ$- انژکتیو باشد، آنگاه $R$ یک حلقه منظم ضعیفاًکاهش یافته می-باشد. حلقه $R$ یک $SF$ چپ (یا راست) خوانده می‌شود[۱۹] اگر تمامی $R$- مدول‌های چپ ساده (یا راست) مسطح باشند. مشهود است اگر $R$ ، $SF$ چپ و نیم جابجایی باشد، آنگاه $R$ قویاً منظم است. به وضوح اگر $R$ یک حلقه نیم جابجایی باشد، آنگاه $R$ یک حلقه منظم وان نیومن می‌باشد اگر وتنها اگر $R$ یک حلقه قویاً منظم باشد. پایان نامه کنونی، تلاشی در زمینه ها فوق می‌باشد. به عبارت دیگر می‌بایست برخی شرایط ضعیف‌تر همانند حلقه‌های $NZI$ را ارائه دهیم.

[1] Kim, Nam and Kim

# فصل اول: حلقه‌های $NZI$

فرض کنید $R$ یک حلقه باشد. ایده‌آل چپ $L$ از $R$، به ازای هر $bR \subseteq L$ و $b \in N(R) \cap L$ ، یک$N$- ایده آل نامیده می‌شود. حلقه$R$، $NZI$ نامیده می‌شود؛ اگر به ازای هر $a \in R$، $l(a)$ یک $N$- ایده آل از $R$ باشد. به وضوح، حلقه‌های نیم‌جابجایی $NZI$ هستند. اما در حالت کلی عکس آن صحیح نیست.

**مثال ۱.۱**:فرض کنید $F$ یک میدان باشد و $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in F \right\}$ و

فرض کنید $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$ و $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in l_R(A)$ آنگاه:

$0 = BA = \begin{pmatrix} xa & xb + yc \\ 0 & zc \end{pmatrix}$ ؛ یعنی $xa = zc = 0$ و $xb + yc = 0$.

**حالت ۱)** اگر $a \neq 0$ و $c \neq 0$: آنگاه $x = y = z = 0$، پس $l_R(A) = 0$ و این بدین معناست که $l_R(A)$ یک $N$- ایده آل است.

**حالت ۲)** اگر $a \neq 0$ و $c = 0$: آنگاه $x = 0$ ، پس $l_R(A) = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ . چون $N(R) = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، یک ایده‌آل از $R$ است، پس$N(R) \cap l_R(A) = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ یک ایده‌آل است. بنابراین $l_R(A)$ یک $N$- ایده‌آل می‌باشد.

**حالت ۳)** اگر $a = 0$ و $c \neq 0$: آنگاه$z = 0$ . بنابراین:

$l_R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x & -xbc^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in F \right\}$ و $N(R) \cap l_R(A) = 0$ و نتیجه می دهد که $l_R(A)$ ، یک $N$- ایده آل می باشد .

**حالت ٤)** اگر $a = 0$ و $c = 0$و $: b \neq 0$آنگاه $x = 0$ و روند کار مشابه با حالت ۲ می‌باشد.

**حالت ٥)** اگر $a = 0$ و $c = 0$ و $b = 0$:آنگاه $l_R(A) = R$ است. به وضوح $l_R(A)$، یک $N$-ایده آل است.

پس درمی‌یابیم که $R$ یک حلقه $NZI$ است. قرار دهید:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}،$$

پس $BA = 0$ و $BRA = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ و این نتیجه می‌دهد که $R$ یک حلقه نیم‌جابجایی نیست.

بر اساس تعریف اندرسون و کامیلو[1] [۱] حلقه $R$ ، ۲- اولیه خوانده می‌شود اگر $N(R) = P(R)$ . براساس ژائو و یانگ[2][۲٤] حلقه $R$، $NCI$ نامیده می‌شود، اگر $N(R) = 0$ باشد و یا $N(R)$ شامل ایده آلی غیر صفر از $R$ باشد و $R$، $NI$ نامیده می‌شود، اگر $N(R)$ ایده‌آلی از $R$ باشد. به وضوح، حلقه‌های ۲- اولیه، $NI$ و حلقه‌های $NCI$ ،$NI$ می‌باشند؛ اما عکس این موارد صحیح نمی باشد.

**قضیه ۱.۲:**حلقه‌های $NZI$ ، ۲- اولیه هستند.

**اثبات:** فرض کنید $R$ یک حلقه $NZI$ باشد. واضح است که $P(R) \subseteq N(R)$. برای هر $0 \neq a \in N(R)$، عدد صحیح مثبت $n$ وجود دارد، بطوریکه $a^n = 0$ . با استفاده از

[1]Anderson and Camillo
[2]Zhao and Yang

فرض،$a^{n-1}Ra = 0$. اگر $n-1=1$، $aRa = 0$، آنگاه $(Ra)^2 = 0$، $Ra \subseteq P(R)$ و $a \in P(R)$است. اگر $n-1>1$ آنگاه$a^{n-2}RaRa = 0$؛ اگر $n-2=1$، آنگاه $aRaRa = 0$، $(Ra)^3 = 0$، $Ra \subseteq P(R)$ و $a \in P(R)$ . مشابه عبارات فوق، می‌توانیم به $N(R) \subseteq P(R)$ برسیم و این نشان می‌دهد که حلقه های $NZI$ ، ۲- اولیه هستند .

**نتیجه ۱.۳ :** حلقه های $NZI$ ، $NI$ هستند .

**مثال ۱.٤ :** فرض کنید $z_4$ ، حلقه اعداد صحیح به پیمانه ٤ باشد . حلقه روبرو را با عملگرهای ماتریسی معمولی در نظر بگیرید. $R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in z_4\right\}$

چون $N(z_4) = P(z_4) = \{\overline{0}, \overline{2}\}$، ایده‌آلی از $z_4$ است و $z_4$ ، ۲- اولیه می‌باشد؛ براساس باس[1][٤، گزاره $R$۲۵] ، ۲- اولیه است.

قرار دهید$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. بنابراین$B \in N(R)$ و $BA = 0$. اما اگر $B\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ را در نظر بگیریم آنگاه $BA \neq 0$و این نشان می‌دهد که Rحلقه NZIنیست. بنابراین عکس قضیه ۱.۲ صحیح نمی باشد.

براساس تعریف چن[2] ، حلقه $R$ را پوچ نیم جابجایی می‌نامیم، اگر $a, b \in R$ در $ab \in N(R)$ صدق نماید. آنگاه به ازای هر $r \in R$، داریم:$arb \in N(R)$. بر اساس تعریف چن [٥]، درمی‌یابیم که حلقه‌های $NI$، پوچ نیم جابجایی هستند.

[1]Bass
[2]Chen

**نتیجه ۱.۵**: حلقه‌های $NZI$، پوچ نیم جابجایی هستند.

**مثال ۱.٦ :** فرض کنید $F$ یک میدان باشد و

$$R=\begin{pmatrix}F&F&F\\0&F&F\\0&0&F\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\0&a_4&a_5\\0&0&a_6\end{pmatrix}\middle|\,a_1,a_2,a_3,\dots,a_6\in F\right\}$$

چون $N(R)=\begin{pmatrix}0&F&F\\0&0&F\\0&0&0\end{pmatrix}$ یک ایده آل از $R$ می باشد، $R$ یک حلقه NI است. قرار دهید $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. پس $A^2=0$ و $AB=0$. اما $ARB=\begin{pmatrix}0&0&\square\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$ و این نشان می دهد که R یک حلقه NZI نیست. با استفاده از مثال ۱.٦ ، عکس نتیجه ۱.۵ در حالت کلی صحیح نمی باشد .

**نتیجه ۱.۷:** حلقه های NZI، مستقیماً متناهی هستند .

توجه: حلقه هایی که در آن معکوس راست بودن اعضا به معنی معکوس چپ بودن آنها باشد، مستقیماً متناهی یا متناهی ددکیند نامیده می شوند.

**اثبات:** فرض کنید R یک حلقه $NZI$ باشد و به ازای هر $a,b\in R$، داشته باشیم $ab=1$. می‌نویسیم $e=ba$ ، آنگاه $e^2=e$ و $ae=abe=a$ . قرار دهید $h=a-ea$، پس

$he=ae-eae=ae-ea=a-ea=h$ و $eh=ea-e^2a=0$

و $h^2=heh=0$. پس $h\square N(R)\cap l(1-e)$. چون R یک حلقه NZI است،

$hb(1-e)=0$، $hR(1-e)=0$ و $hb=ab-eab=1-e$.

بنابراین $hb(1-e)=0=(1-e)^2=1-e$ و $e=ba=1$ و این نشان می‌دهد که R مستقیماً متناهی است.

یک عنصر k از R مینیمال چپ است، اگر Rk ایده‌آل چپ مینیمالی از R باشد و یک خودتوان e از R،خودتوان مینیمال چپ خوانده می‌شود، اگر e یک عضو مینیمال چپ از R باشد. از $ME_l(R)$، برای نشان دادن مجموعه تمام خود توان‌های مینیمال چپ R استفاده می‌نماییم. حلقه R، مینیمال آبلی چپ خوانده می‌شود[۲۲]اگر هر عضو از $ME_l(R)$ ، در R نیم مرکزی چپ باشد و به R، قویاً مینیمال آبلی چپ اطلاق می‌گردد[۲۲]، اگر هر عضو از $ME_l(R)$ در R، مرکزی باشد. به وضوح، حلقه‌های آبلی و حلقه‌های نیم‌جابجایی، مینیمال آبلی چپ هستند.

**قضیه ۱.۸:**حلقه‌های NZI، مینیمال آبلی چپ هستند.

**اثبات:** فرض کنید $0\neq e\in ME_l(R)$ و $a\in R$ باشد. می‌نویسیم $he=ae-eae$ .

اگر $h\neq 0$، آنگاه $eh=0, he=h, h^2=0$، بنابراین $h \in N(R)\cap l(h)$. با استفاده از فرضیات، $hR\subseteq l(h)$ و $hRh=0$. چون $Rh=R(ae-eae)\subseteq Re$ است، $Re$ یک ایده‌آل چپ مینیمال از $R$ و $Rh\neq 0$ و $Re=Rh$ است. پس:

$$0=R(hRh)=ReRe=Re \text{ و } e=0.$$

اما $Re$، ایده آل چپ مینیمال از $R$ بوده که تناقض است. بنابراین $h=0$ و برای تمامی $a\in R$ داریم $ae=eae$، که نتیجه می‌دهد $R$، مینیمال آبلی چپ است.

**لم ۱.۹:**فرض کنید $R$ یک حلقه باشد. آنگاه $R[x]$ مینیمال آبلی چپ است.

**اثبات:**اگر $I$ یک ایده‌آل چپ مینیمال از $R[x]$ باشد، آنگاه $I \neq 0$. پس $f(x) \in I$ و $f(x) \neq 0$ وجود دارد. چون $I$ یک ایده‌آل چپ مینیمال از $R[x]$ است، داریم $I = R[x]f(x)$. چون $xf(x) \neq 0$، داریم $0 \neq R[x]xf(x) \subseteq R[x]f(x) = I$. چون $I$یک ایده آل چپ مینیمال از $R[x]$ است، داریم:$R[x]xf(x) = R[x]f(x) = I$. پس $g(x) \in R[x]$ وجود دارد، بطوریکه $f(x) = g(x)xf(x)$. اما درجه x نشان داده شده بر دوطرف، نمی‌تواند مساوی باشد. بنابراین هیچ ایده‌آل چپ مینیمالی در $R[x]$ وجود ندارد. پس$R[x]$، مینیمال آبلی چپ است.

با استفاده از لم ۱.۹، یک حلقه مینیمال آبلی چپ وجود دارد که NZI نیست. بنابراین عکس قضیه ۱.۸ صحیح نیست. بر اساس تعریف وی و چن[1][۲۰]، حلقه R پوچ انژکتیو خوانده می‌شود، اگر برای هر $a \in N(R)$ داشته باشیم،$lr(a) = Ra$ . به وضوح، مدول‌های YJ– انژکتیو، پوچ انژکتیو هستند. اما بر اساس تعریف وی و چن[۲۰]در حالت کلی عکس آن صحیح نمی‌باشد. بر اساس تعریف نیکولسون و یوزیف[2][۱۷]، حلقه R را $MC2$ چپ می‌نامیم، اگر هر خود توان مینیمال چپ، مینیمال راست باشد. مشهود است که R، قویاً مینیمال آبلی چپ است، اگر و تنها اگر R ، مینیمال آبلی چپ و MC2 چپ باشد (مراجعه شود به وی [۲۲]).

[1]Wie and Chen

[2]Nicholson and Yousif

**قضیه ۱.۱۰:** فرض کنید R یک NZI و یک حلقه MC2 چپ باشد . اگر هر R- مدول چپ منفرد ساده، YJ-انژکتیو باشد، آنگاه R کاهش یافته است و به ازای هر $b \in R$ داریم، $RbR + l(b) = R$.

**اثبات** : فرض کنید $a^2 = 0$ باشد. اگر $a \neq 0$ ، آنگاه $l(a) \neq R$ و یک ایده آل چپ ماکزیمال $M$از $R$ وجود دارد، بطوریکه $l(a) \subseteq M$ . اگر M در $_RR$ اساسی نباشد ، آنگاه برای تعدادی از $e \in E(R)$ از $e \in E(R)$ داریم، $M = Re = l(1 - e)$. چون

$$R(1 - e) \cong R/l(1 - e) = R/M،$$

یک R- مدول چپ ساده است، $R(1 - e)$ ایده آل چپ مینیمالی از R است و $1 - e$ یک عضو خود توان مینیمال چپ می‌باشد. با استفاده از فرضیات، R یک حلقه NZI و یک حلقه مینیمال آبلی چپ است. R یک حلقهMC2 چپ است، بنابراین R حلقه مینیمال آبلی چپ قوی است و $1 - e$ مرکزی می‌باشد. چون داریم:

$$a \in l(a) \subseteq M = l(1 - e)، \quad a(1 - e) = 0 = (1 - e)a \text{ و}$$

$$1 - e \in l(a) \subseteq l(1 - e)$$

که تناقض است. بنابراین M ایده آل چپ اساسی از R بوده و بنابراین R/M ، YJ- انژکتیو می‌باشد.

فرض کنید $f: Ra \to R/M$ با $f(ra) = r + M$ تعریف شده باشد. توجه نمایید که f ، حلقه ای R- همریختی و خوش تعریف است. پس یک R-همومورفیسم چپ $g: R \to R/M$ وجود دارد، بطوریکه $g(a) = f(a)$ . بنابراین:

$1 + M = f(a) = g(a) = ag(1) = ac + M$ ، $g(1)=c+M$ و $1 - ac \in M$.

چون R یک حلقه NZI است، $ac \in l(a)$ می‌باشد. بنابراین $M$  1، که تناقض دارد. بنابراین $a = 0$ و $R$ کاهش یافته می باشد.

فرض کنید $0 \neq c \in R$ وجود داشته باشد، بطوریکه $RcR + l(c) \neq R$ ، آنگاه یک ایده‌آل چپ ماکسیمال M از R شامل $RcR + l(c)$ وجود دارد. اگر M در $_RR$ اساسی نباشد، آنگاه برای تعدادی از $e \in E(R)$ داریم $M = Re = l(1 - e)$ . چون

$$R(1 - e) \cong R/l(1 - e) = R/M$$

یک R– مدول چپ ساده است،$R(1 - e)$ یک ایده آل چپ مینیمال ازR و $(1 - e)$ عضو خود توان مینیمال چپ می‌باشد.

با استفاده از فرضیات، R یک حلقهNZI بوده و R یک حلقه مینیمال آبلی چپ می‌باشد. R یک حلقه$MC2$ چپ است. بنابراین $R$ یک حلقه مینیمال آبلی چپ قوی می‌باشد و$(1 - e)$ مرکزی است. چون $c \in RcR + l(c) \subseteq M = l(1 - e)$ و $c(1 - e) = 0 = (1 - e)c$ و $1 - e \in l(c) \subseteq l(1 - e)$، که تناقض دارد. بنابراین $M$ یک ایده آل چپ اساسی از $R$ می- باشد، پس $R/M$ ، $YJ$– انژکتیو است. فرض کنید $f: Rc \to R/M$ با $f(rc) = r + M$ تعریف شده باشد. توجه نمایید که $f$ ، $R$–هومومورفیسم خوش تعریف است؛ بنابراین $1 + M = f(c) = cd + M$ و $d \in R$، بنابراین $1 + cd \in M$. چون $cd \in RcR \subseteq M$، بنابراین $M$  1 بوده که تناقض است. بنابراین به ازای هر $c \in R$ داریم:

$$RCR + L(c) = R.$$

فرض کنید $R$ یک $NZI$ و یک حلقه $MC2$ چپ باشد . اگر هر $R$– مدول چپ منفرد ساده ، پوچ انژکتیو باشد ، آنگاه $R$ کاهش یافته است .

حال در نظر می گیریم آیا نتیجه فوق در صورت رسیدن به این شرط، که $R$ یک حلقه $MC2$ چپ است، برقرار می باشد یا خیر .

**مثال ۱.۱۱:** فرض کنید F یک میدان باشد و $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in F \right\}$

به وضوح داریم: $E(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u \in F \right\}$

$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (u \neq 0)$، یک ایده آل چپ ماکسیمال از $R$ بوده و جمعوندی از $R$ می باشد . بنابراین $I_1$ایده آل چپ اساسی از $R$ نیست .

$I_2 = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، یک ایده آل چپ ماکسیمال اساسی از $R$ می باشد .

$I_3 = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، یک ایده آل چپ مینیمال از $R$ می باشد.$I_4 =$

$\left\{ \begin{pmatrix} x & xu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in F, u \neq 0 \right\}$ یک ایده آل چپ مینیمال از $R$ می باشد .

$I_5 = N(R) = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، یک ایده آل چپ مینیمال از R می باشد.

به وضوح $I_3, I_4, I_5 \subseteq I_2$ و نیز $I_5$ و $I_4$و $I_3$ ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال از $R$ نیستند

و $I_2 = I_3 \oplus I_5$. بااستفاده از مثال ۱.۱، $R$ یک حلقه $NZI$ می باشد . $W$ را یک $R$- مدول

منفرد ساده چپ می گیریم و $W \cong R/L$ که در آن $L$ ایده آل چپ ماکسیمال اساسی از $R$ است .

چون $I_2$ تنها ایده آل چپ ماکسیمال اساسی از $R$ می باشد و $W \cong R/I_2$ . حال ثابت می کنیم

که $W \cong R/I_2$ انژکتیو است.فرض کنید $f: I_2 \to R/I_2$، یک همومورفیسم چپ باشد

و $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} + I_2$ پس:

$$\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} + I_2\right)$$

$$= \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + I_2 = \bar{0}$$

مشابه عبارات فوق داریم: $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \bar{0}$ . برای هر $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$ و

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \bar{0}$$

بنابراین $f = 0$ و $f$ می‌تواند به $R$ بسط داده شود. پس $R$ یک حلقه $NZI$ بوده و هر $R$–مدول

چپ منفرد ساده، انژکتیو است. بنابراین هر R-مدول چپ منفرد ساده، پوچ توان می‌باشد.

چون $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in ME_l(R)$ و $0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، اما $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

چون $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$، بنابراین $R$ حلقه $MC2$ چپ نیست.