دانشگاه الزهرا

گروه ریاضی دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته آمار ریاضی

عنوان

رهیافت بیز تجربی ناپارامتری

پژوهشگر

زهرا حبیبی

استاد راهنما

ناهید سنجری فارسی پور

شهریور ۱۳۹۱


بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر و مادرم به خاطر زحمات بی دریغشان

همه ی آنهایی که همیشه به دنبال راههای جدید در مسیر علم هستند.

کلیه دستاوردهای این تحقیق متعلق به دانشگاه الزهرا(س) است.

تشکر و قدردانی

آدمی در مسیر رسیدن، جز در سایه ی الطاف باری تعالی، گامی نمی تواند برداشتن. و یکی از الطاف پروردگار بی مثال، بی شک یاری انسان هایی است که در این سفر پر خطر، دست وی بگیرند و از ورطه ی حوادث، ایمن بدارند. آنکه این نعمت بداد، بر ما سپاس آن را نیز نهاد. از این روست که جای دارد تلاش های بی شائبه استاد گرانقدر خویش، سرکار خانم دکتر ناهید سنجری را قدر نهم و بر دستان مهربان آن عزیز بوسه زنم، و همچنین از سرکار خانم دکتر صدیقه شمس و جناب آقای دکتر موسی گل علیزاده که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، سپاس فراوان بگزارم و همراهی و یاری دوست شفیق و مهربان رفیق خود، فاطمه ماندگاری بامکان را قدر نهم. امید است هر که بر ما حقی دارد از جام حقیقت ظرفی بردارد.

امام علی (ع) می فرمایند:

از جمله حقوق عالم است که از او زیاد نپرسی. چون بر او وارد شدی و گروهی نزد او بودند به همه سلام کن و او را نزد آنها به تحیت مخصوص گردان. مقابلش بنشین و پشت سرش منشین، چشمک مزن، با دست اشاره مکن، پرگویی مکن که فلانی و فلانی بر خلاف نظر او چنین گفته اند. از زیادی مجالستش دلتنگ مشو، زیرا عالم مانند درخت خرماست. باید در انتظار باشی تا چیزی از آن بر تو فرو ریزد. پاداش عالم از روزه دار شب زنده داری که در راه خدا جهاد کند بیشتر است.

چکیده

روش بیز تجربی ناپارامتری برای برآورد پارامتر نامعلوم θ معرفی شده است، این روش، برآوردگر بیز تجربی برای θ و ریسک مینیمم پسین مربوط به آن را در فرم بسته بدون برآورد کردن تابع چگالی پیشین نامعلوم θ با استفاده از برآورد تابع چگالی کناری آماره بسنده، برای θ را می‌دهد. در چنین روشی به برآورد تابع چگالی پسین هم نیاز نمی‌باشد. برآوردگرهای بیز تجربی و ریسک پسین مینیمم نرخ شکست توزیع نمایی، پارامترهای مقیاس نامعلوم توزیع‌های گاما و وایبل و پارامتر شکل توزیع پارتو و برآورد اندازه‌های قابلیت اعتماد در مدل قابلیت اعتماد نمایی ارائه شده است. روش شبیه‌سازی مونت کارلو به منظور:(i) بررسی این‌که چگونه تعداد آزمایش‌های موجود گذشته و اندازه هر یک از آزمایش‌ها در دقت برآوردگر موثر است؟(ii) بررسی این‌که آیا برآورد چگالی چند جمله‌ای ناپارامتری با مرتبه بالاتر برآورد معنی‌دار بهتری می‌دهد یا نه؟ (iii) ایجاد مقایسه بین روش ارائه شده و بیز وقتی که تابع چگالی احتمال پیشین پارامتر نامعلوم θ ، توزیع گاما استفاده شده است، هم‌چنین مساله برآورد هم‌زمان بردار میانگین پواسن و کارایی برآوردگر بیز تجربی ناپارامتری از نقطه نظرسازگاری ریسک بررسی می‌شود و این‌که نشان داده شده که کارایی برآوردگر بیز تجربی ناپارامتری از نقطه نظر سازگاری ریسک یکنواخت ساختاری بهتر از برآوردگرهای جیمز–اشتاین و ماکزیمم درست نمایی می‌باشد.

کلید واژه‌ها : بهینگی مجانبی، برآوردگر بیز تجربی ناپارامتری، بردار میانگین پواسن، ریسک پسین، رهیافت بیز تجربی، ریسک پسین.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

فصل ۱

پیش‌نیاز

۱.۱ پیشگفتار

روش بیز تجربی را روشی برای استفاده بیشتر از داده‌ها در آنالیز آماری دانسته‌اند. در این روش پارامتر توزیع خود یک متغیر تصادفی با توزیع نامعلوم می‌باشد که با استفاده از داده‌ها مشخص می‌گردد.

نظریه آماری در قرن هیجدهم توسعه داده شده است. به طور عمده دو روش مختلف در آنالیز آماری، فراوانی (درست نمایی) و بیز(کارلین و لوئس [۵] [1]) وجود دارد. فراوانی، پارامتر نامعلوم را براساس مدل آماری خاص برآورد می‌کند. مدل درست نمایی توزیع احتمال شرطی داده‌های مشاهده شده را روی پارامتر نامعلوم تعریف می‌کند. فیشرین [2] روش فراوانی را برای ساختن درست نمایی استفاده کرده به طوری که برآورد براساس داده‌ها است. بیز اطلاعات گذشته را برای بدست آوردن توزیع پسین و استنباط مورد استفاده قرار می‌دهد. به علت دارا بودن مزایا و غیر مفید بودن بیز و فراوانی هنوز جای بحث است که کدام بهتر است. آن‌ها نمی‌توانند برآورد هم‌سانی برای مساله هم‌سان فراهم کنند. همچنین از طرف دیگر فراوانی‌ها نمی‌توانند از اطلاعات گذشته مفید به طور معقول استفاده کنند.

اساس روش بیز در مقاله توماس بیز [3] معرفی شده ، که در سال ۱۷۶۳ منتشر شده بود. اساس فرم قضیه بیز شامل خصوصیات درست نمایی و خصوصیات پیشین (کارلین و لوئس [۵]) می‌باشد.

در روش‌های بیزی اطلاعات پیشین نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند، ولی در به‌کارگیری آن‌ها مشکلات عملی بسیاری پدید می‌آید. روش‌های آماری که بطور رسمی اطلاعات پیشین را مورد استفاده قرار

---

[1] $Carlin\ and\ Louis$

[2] $Fisherian$

[3] $ThomasBayes$

می‌دهد آنالیز بیز نامیده می‌شود. مزیت قبول کردن بیز از این نقطه نظر است که با احتمال بیشتری به رسمیت شناخته می‌شود وقتی اطلاعات پیشین معنی‌داری موجود باشد (اطلاعاتی که به صورت شخصی انتخاب نشده باشد) همچنین وقتی اطلاعات پیشین قابل توجهی موجود باشد روش بیز نشان دهنده‌ی آن است که چگونه این روش در مقایسه با روش‌های غیر بیزی، اطلاعات مذکور را مورد استفاده قرار می‌دهد. سوال این است که چطور اطلاعات پیشین مهم باید استفاده شود؟ آمار کلاسیک از جواب دادن به این سوال عاجز است. در حالی که روش‌های بیزی اغلب ابزاری مناسب جهت بکار بردن اطلاعات پیشین می‌باشد.

علم اصول نظریه تصمیم مرکب [۴] و بیز تجربی مهمترین سهم هیبرت رابینز [۵] در آمار هستند. رابینز نظریه تصمیم مرکب را در ۱۹۵۰ در دومین کنفراس برکلی آمار ریاضی و احتمال معرفی کرده بود. نظریه تصمیم مرکب به دنباله‌ای از مساله‌های تصمیم آماری مستقل دارای فرم یکسان مربوط می‌شود.

در ۵ سال پس از آن، در سومین کنفراس برکلی رابینز نظریه بیز تجربی را توسعه داد. بیز تجربی به آزمایش‌هایی که در آن پارامترهای نامعلوم، متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع و با یک توزیع پیشین مشترک هستند مربوط می‌شود. روش پژوهش بیز تجربی، روش‌های آماری را که قانون بیز ایده‌آل برای مدل واقعی تقریب می‌زند فراهم می‌کند، چنان که هدف استنباط بیزی بدون پیشین مشخص بدست می‌آید. روش‌های بیز تجربی معمولا در حالت شرطی است که روی پارامترهای نامعلوم بدون پیشین مشخص به خوبی عمل می‌کنند و بنابراین راه حل‌هایی برای مساله‌های تصمیم مرکب ارائه می‌شود. همچنین روش‌های بیز تجربی در مساله‌های با ساختار پیچیده‌تر، برای استنباط پارامترهای چند متغیره و بعد بینهایت در آزمایش منفرد کاربرد دارد.

نظریه تصمیم مرکب و بیز تجربی بزرگترین تاثیر را در اندیشه و حرفه آمار داشته است. از مقاله‌های پیشگام رابینز (همان روش‌های بیز تجربی می‌باشد) در طیف وسیعی برای مساله‌های متعدد بکار برده شده است، در مقایسه با : نیمن [۲۳] ، کاور [۶] [۷] ، کاپس [۷] [۶] ، کارتر و رالف [۸] [۸] ، ایفرون و ماریس [۹] [۲۲] ، روبین [۳۰] [۱۰] ، هادلی [۱۱] [۱۶] ، ماریس [۱۲] ،کارلین و لوئس [۵] ، ایفرون. [۱۳]

---

[۴] *Compound decision theory*

[۵] *Herbert Robbins*

[۶] *Cover*

[۷] *Copas*

[۸] *Carter and Rolph*

[۹] *Efron and Morris*

[۱۰] *Rubin*

[۱۱] *Hoadly*

مسئله‌های تصمیم مرکب

فرض می‌شود $f(x;\theta)\nu(dx)$ چگالی اندازه احتمال با پارامتر θ باشد. دنباله‌ای از آزمایش‌های مستقل با مشاهدات $X_i \sim f(x;\theta_i)$ $i = ۱, ..., n$ ، که در آن θ_i ها قطعا نامعلوم هستند را در نظر بگیرید. فرض می‌شود که علاقه‌مند به ساختن تصمیم آماری δ_i ها درباره θ_i ها با تابع زیان $L(a,\theta)$ هستیم. رابینز [۲۶] مسئله تصمیم مرکب را تحت ریسک مرکب زیرفرمول‌بندی کرده است، فرض شده است که δ_i ها به مشاهدات $X_{(n)}$ در n آزمایش بستگی داشته باشد،

$$R_n\big(\delta_{(n)}, \theta_{(n)}\big) \equiv \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} E_{\theta_{(n)}} L\big(\delta_i(X_{(n)}), \theta_i\big) \qquad (۱.۱)$$

در این‌جا و جاهای دیگر، $h_{(n)} \equiv (h_۱, ..., h_n)^{tr}$ برای همه دنباله‌های h_i و بالا نویس " tr " ترانهاده را نشان می‌هد. برای قانون تصمیم تفکیک‌پذیر دارای فرم $\delta_i(X_{(n)}) = t(X_i)$ (یعنی i امین تصمیم تابع ثابت مشخصی از X_i باشد) برای مسئله تصمیم منفرد [۱۲] ، تحت پیشین نامعلوم $G(A) = G_n(A) = n^{-۱}\sum_{i=۱}^{n} I\{\theta_i \in A\}$ ریسک مرکب (۱.۱) مساوی ریسک بیز است یعنی

$$R(t,G) \equiv \int \left[\int L(t(x),\theta) f(x;\theta)\nu(dx)\right] G(d\theta) \qquad (۱.۲)$$

پیشنهاد رابینز رهیافت بهینه مجانبی است برای n های بزرگ که در آن $R^*(G) \equiv min_t R(t,G)$ ریسک بیز مینیمم به شرط پیشین G است. که در معادله زیر صدق می‌کند

$$R_n(\delta_{(n)}, \theta_{(n)}) = R^*(G_n) + o(۱) \qquad (۱.۳)$$

در یک مثال ساده آزمون کردن $\theta_i = ۱$ در مقابل $\theta_i = -۱$ مبنی بر $X_i \sim N(\theta_i, ۱)$ با زیان $L(a,\theta) = I\{a \neq \theta\}$ قاعده تصمیم رابینز $\delta_{(n)}(X_{(n)})$ ، براساس برآورد مناسب G_n ، به طوری‌که (۱.۳) بطور یکنواخت در $\theta_{(n)}$ برقرار باشد ساخته می‌شود.که این مسئله فایده استفاده کردن از مشاهدات ناآگاه [۱۳] $X_j, j \neq i$ در i امین مسئله تصمیم و امکان تطابق در مفهوم (۱.۳) بدون هیچ اطلاعی راجع به G_n را نشان می‌دهد.

[۱۲] *Single decision problem*

[۱۳] *Noninformativ*

روش‌های بیزتجربی

رابینز [۲۸] رهیافت بیز تجربی را برای مساله‌های تصمیم آماری معرفی کرده بود. در زمینه بیز تجربی، پارامترهای نامعلوم θ_i به عنوان متغیرهای تصادفی مستقل با پیشین نامعلوم G در نظر گرفته شده است، هدف پیدا کردن قاعده تصمیمی است که عملکرد آن تقریبا به خوبی قاعده بیز ایده‌آل باشد. رهیافت بیز تجربی در عمل می‌تواند در دو زمینه مختلف استفاده شود. اولی، که مورد توجه رابینز بود [۲۸] ، مساله بیز تجربی ترتیبی است، که تنها، مشاهدات $X_۱, ..., X_j$ برای j امین تصمیم موجود هستند. دومی مساله مرکب رابینز [۲۶] این است که، تمام بردار $X_{(n)}$ می‌تواند در استنباط همه θ_iها استفاده شود. ریسک برای نوع مرکب به صورت زیر است

$$R_n(\delta_{(n)}, G) \equiv n^{-۱} \sum_{i=۱}^{n} E_G L(\delta_i(X_{(n)}), \theta_i) = E_G R_n(\delta_{(n)}, \theta_{(n)}).$$

اینجا ریسک مرکب $R_n(\delta_{(n)}, \theta_{(n)})$ در (۱.۱) ریسک شرطی به شرط $\theta_{(n)}$ می‌شود. بنابراین، معیار بهینگی مجانبی (۱.۳) به طور طبیعی با $R_n(\delta_{(n)}, G) = R^*(G) + o(۱)$ جایگزین شده است.

در اصل راه حل رابینز (۱۹۵۶و۱۹۵۱) برای مساله‌های تصمیم بیز تجربی و مرکب یکسان می‌باشند. فرض می‌شود $R(t, G)$ ریسک بیز در (۱.۲) باشد و فرض می‌شود

$$t^*_G(x) \equiv t^*_G \equiv arg_{t \in \mathcal{D}} min R(t, G) \qquad (۱.۴)$$

قاعده بیز ایده‌آل باشد که در آن G ، پیشین نامعلوم در مساله‌های بیز تجربی است و $G = G_n$ توزیع تجربی پارامترهای نامعلوم در مساله‌های تصمیم مرکب است. روش رابینز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta_i(X_{(n)}) = \hat{t}_n(X_i) \qquad (۱.۵)$$

که در آن $\hat{t}_n(.) \equiv \hat{t}_n(.; X_{(n)})$ برآورد t^*_G براساس تمام بردار $X_{(n)}$ است. به عنوان راه حل کلی، او استفاده از $\hat{t}_n = t^*_{\hat{G}_n}$ را با یک برآورد مناسب برای G پیشنهاد کرده بود و مسئله برآورد پیشین G براساس $X_{(n)}$ فرمول‌بندی شده است.

برای برآورد نقطه‌ای θ_iها در خانوادهای نمایی $f(x;\theta)$ رابینز [۲۸] روش‌های مشابهی را ارائه کرده بود. او برآوردگرهای بیز را $t^*_G = E_G[\theta_i | X_i = x]$ به عنوان تابعی از چگالی $f_G(x) \equiv \int f(x;\theta) dG(\theta)$ X_i بیان کرد و پیشنهاد کرده بود که $\hat{t}_n(x)$ به طور مستقیم از برآوردهای چگالی نتیجه شده است. برای مثال، اگر $X_i \sim N(\theta_i, \sigma_۰^۲)$ به شرط θ_i با $\sigma_۰^۲$ معلوم باشد حالت ویژه هسته از نوع لاپلاس،

برآوردگر بیز θ_i تحت زیان مربعات خطا به صورت زیر است:

$$t_G^*(x) = x + \sigma_0^2 f_G'(x)/f_G(x) \qquad (1.6)$$

ازآن‌جایی که هدف روش رابینز در قاعده بیز ایده‌آل (۱.۴) این است که هیچ محدودیتی بر G نباشد. روش رابینز به عنوان بیز تجربی کلی [۲۵] یا بیز تجربی ناپارامتری [۲۲] شناخته می‌شود. بسط بیشتر روش‌های بیز تجربی کلی توسط دانشجویان رابینز جوهان [۱۷] [14] ،و سامول [۳۲] [15] و خود رابینز انجام شده است. روش بیز تجربی منسوب به رابینز است پس از او مارتییز [16] [۱۸] نتایجی از به کار بردن این روش را ارائه کرد.

آنالیز بیز تجربی به دو شاخه مجزا تقسیم می‌شود: بیز تجربی پارامتری و بیز تجربی ناپارامتری که در اولی توزیع پیشین پارامتر نامعلوم، به خانواده توزیع‌های پارامتری با پارامترهای نامعلوم تعلق دارد، در حالی که در دومی فرض بر این است که پارامترها، متغیرهای مستقل و هم‌توزیع هستند، و از روش‌های ناپارامتری برای برآورد تابع چگالی کناری استفاده می‌شود. این روش را می‌توان در بنت و مارتیز [۲] ، گربسکی و سرهان [۱۴] ومارتیز [۲۰] یافت.

برآوردگر جیمز-اشتاین یا برآوردگر انقباضی [17]

خیلی از اندیشه‌های کلاسیک در آمار وقتی که تعداد پارامترها زیاد است کمتر معتبر هستند. برآورد جیمز-اشتاین (که برآوردگر انقباضی هم نامیده می‌شود) توسط اشتاین (۱۹۵۶) و جیمز (۱۹۶۱) معرفی شده بود. اشتاین در سال ۱۹۵۵ با اثباتش جامعه آماری را تکان داد زیرا نشان داد که استفاده از روش برآورد ماکزیمم درستنمایی برای مدل‌های گوسین در بیشتر از یک قرن برای حالت‌های بیش از یک یا دو بعد ناروا [18] بوده است. برآوردگر میانگین توزیع نرمال چند متغیره دارای خطای میانگین مربعات کمتری نسبت به برآوردگر ماکزیمم درست نمایی در۳ بعد و بالاتر است. این برآوردگر بردار مشاهدات را به سوی یک نقطه‌ای که قبلا توسط یک عامل برآوردگر انقباضی مشخص شده کاهش دهد. این روش‌ها هنوز به دلایل بهتری استفاده می‌شوند، اما برآوردگرهای نوع اشتاین اشاره به روشی کاملا متفاوت برای استنباط آماری از نظر رهیافت بیز تجربی دارند.

[14] $Johns$

[15] $Samuel$

[16] $Maritz$

[17] Shrinkage estimator

[18] Inadmissible

اگرچه ارتباطی بین نظریه اشتاین و رابینز تشخیص داده نشده، اما کار اشتاین نیمی از آغاز پرتلاش بیز تجربی بوده است. نیم دیگر هم صریحا توسط توسعه دهنده اصلی آن هیبرت رابینز، بیز تجربی نامیده شد.

قاعده بیز و براورد نرمال چند متغیره

در این بخش خلاصه‌ای از قضیه بیز و کاربرد آن برای برآورد نرمال چند متغیره آورده شده است. قاعده بیز ساده است اما ایده پر محتوایی دارد که اندیشه آماری زیر چتر آن قرار دارد. می‌توان آن را در قالب چگالی‌ها بیان کرد، با وجود آنکه درست به همان اندازه برای حالت‌های گسسته به‌کار برده می‌شود. بردار پارامتر نامعلوم $\boldsymbol{\mu}$ با چگالی پیشین $g(\boldsymbol{\mu})$ بردار داده‌های قابل مشاهده $\boldsymbol{z}$ مطابق چگالی $f_{\mu}(\boldsymbol{z})$ افزایش می‌دهد.

$$\boldsymbol{\mu} \sim g(.) \qquad ,\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\mu} \sim f_{\mu}(\boldsymbol{z}) \tag{۱.۷}$$

قاعده بیز فرمولی برای چگالی شرطی $\boldsymbol{\mu}$ دارای بردار مشاهده شده $\boldsymbol{z}$ است (چگالی پسین).

$$g(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{z}) = g(\boldsymbol{\mu}) f_{\mu}(\boldsymbol{z})/f(\boldsymbol{z}) \tag{۱.۸}$$

که در آن $f(\boldsymbol{z})$ توزیع کناری $\boldsymbol{z}$ است، یعنی

$$f(\boldsymbol{z}) = \int g(\boldsymbol{\mu}) f_{\mu}(\boldsymbol{z}) d\boldsymbol{\mu} \tag{۱.۹}$$

که انتگرال روی همه مقادیر $\boldsymbol{\mu}$ می‌باشد.

مشکل‌ترین قسمت (۱.۸) محاسبه کردن $f(\boldsymbol{z})$ است، که کمتر ضروری است. اغلب کافی است توجه شود که چگالی پسین $g(\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{z})$ متناسب با $g(\boldsymbol{\mu}) f_{\mu}(\boldsymbol{z})$ ، حاصلضرب چگالی پیشین $g(\boldsymbol{\mu})$ و درست نمایی $f_{\mu}(\boldsymbol{z})$ است. برای هر دو مقدار پارامتر ممکن $\boldsymbol{\mu}_۱$ و $\boldsymbol{\mu}_۲$ (۱.۸) داریم

$$\frac{g(\boldsymbol{\mu}_۱|\boldsymbol{z})}{g(\boldsymbol{\mu}_۲|\boldsymbol{z})} = \frac{g(\boldsymbol{\mu}_۱)}{g(\boldsymbol{\mu}_۲)} \frac{f_{\mu۱}(\boldsymbol{z})}{f_{\mu۲}(\boldsymbol{z})} \tag{۱.۱۰}$$

یعنی نسبت پسین‌ها برابر نسبت پیشین‌ها ضربدر نسبت درست‌نمایی‌ها است.

فرض کنید μ توزیع پیشین نرمال با میانگین ۰ و واریانس A را دارد، در حالی که Z به شرط μ

نرمال با میانگین μ و واریانس ۱ است،

$$\mu \sim \mathcal{N}(0, A) \qquad , z|\mu \sim \mathcal{N}(0, 1) \tag{1.11}$$

در نتیجه می‌توان نشان داد که

$$\mu|z \sim \mathcal{N}(Bz, B) \qquad B = \frac{A}{A+1} \tag{1.12}$$

حال فرض کنید با خیلی از نسخه‌های (۱.۱۱) روبرو هستیم،

$$\mu_i \sim \mathcal{N}(0, A) \qquad , z_i|\mu_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, 1) \qquad [i = 1, 2, ..., N] \tag{1.13}$$

(μ_i, z_i) زوج‌های مستقلی از یکدیگر هستند. با فرض این‌که $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)'$ و $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, ..., z_N)'$ ، با استفاده از نمادگذاری استاندارد برای توزیع نرمال N - بعدی نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{\mu} \sim \mathcal{N}_N(0, AI) \tag{1.14}$$

و

$$\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\mu} \sim \mathcal{N}_N(\boldsymbol{\mu}, I) \tag{1.15}$$

که در آن I ماتریس همانی $N \times N$ است. قاعده بیز توزیع پسین زیر را می‌دهد

$$\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{z} \sim \mathcal{N}_N(B\boldsymbol{z}, BI) \qquad [B = A/(A+1)] \tag{1.16}$$

اگر $\boldsymbol{\mu}$ توسط $\hat{\boldsymbol{\mu}} = t(z)$ برآورد شود زیان مربعات خطا محتمل شده (زیان کلی) ،زیان مربعات خطای مرکب نامیده شده، به صورت زیر است:

$$L(\boldsymbol{\mu}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = \sum_{i=1}^{N} (\hat{\mu}_i - \mu_i)^2 \tag{1.17}$$

توجه شود که این۲جا فرض شده برآوردگر $\hat{\mu}_i$ به Z_j برای $j \neq i$ بستگی داشته باشد. تابع ریسک

متناظر مقدار مورد انتظار $L(\boldsymbol{\mu}, \hat{\boldsymbol{\mu}})$ برای μ فرض شده هست،

$$R(\boldsymbol{\mu}) = E_\mu\{L(\boldsymbol{\mu}, \hat{\boldsymbol{\mu}})\} = E_\mu\Big\{||t(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{\mu}||^{۲}\Big\} \quad (۱.۱۸)$$

برآوردگر ماکزیمم درست نمایی $\boldsymbol{\mu}$ در مدل (۱.۱۵) $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{MLE} = \boldsymbol{z}$ می‌باشد. این برآوردگر ریسک زیر را برای هر انتخاب $\boldsymbol{\mu}$ دارد:

$$R^{(MLE)}(\boldsymbol{\mu}) = N \quad (۱.۱۹)$$

مطابق (۱.۱۶) برآوردگر بیز به صورت زیر است:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(Bayes)} = B\overline{z} = \Big(۱ - \frac{۱}{A + ۱}\Big)\overline{z} \quad (۱.۲۰)$$

این انتخابی هست که خطای مربعات موردانتظار با فرض z را مینیمم می‌کند. اگر $A = ۱$ ، برای مثال، $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(Bayes)}$ به $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(MLE)}$ که نصفش به صفر نزدیک شده کاهش پیدا می‌کند. ریسک (۱.۱۸) می‌شود:

$$R^{(Bayes)}(\boldsymbol{\mu}) = (۱ - B)^{۲}||\boldsymbol{\mu}||^{۲} + NB^{۲} \quad (۱.۲۱)$$

ریسک بیز مرکب به صورت زیر می‌باشد:

$$R_A^{(Bayes)} = E_A\Big\{R^{(Bayes)}(\boldsymbol{\mu})\Big\} = N\frac{A}{A + ۱} \quad (۱.۲۲)$$

E_A امید نسبت به $\boldsymbol{\mu} \sim \mathcal{N}_N(۰, AI)$ را نشان می‌دهد. مدل (۱.۱۴) فرض می‌شود، اما مقدار A معلوم نیست، بنابراین نمی‌توان از $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(Bayes)}$ استفاده کرد. فرض‌های (۱.۱۴) و (۱.۱۵) دلالت بر این دارد که توزیع کناری z به صورت زیر می‌باشد:

$$\boldsymbol{z} \sim \mathcal{N}_N(۰, (A + ۱)I) \quad (۱.۲۳)$$

مجموع مربعات $S = ||z||^{۲}$ توزیع خی-دو با N درجه آزادی دارد،

$$S \sim (A + ۱)\mathcal{X}_N^{۲} \quad (۱.۲۴)$$

چنانکه

$$E\left\{\frac{N-۲}{S}\right\}=\frac{۱}{A+۱} \tag{۱.۲۵}$$

برآوردگر جیمز–اشتاین تعریف شده به صورت زیر می‌باشد

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(JS)}=\left(۱-\frac{N-۲}{S}\right)\boldsymbol{z}. \tag{۱.۲۶}$$

این برآوردگر همان $\hat{\mu}^{(Bayes)}$ با یک برآوردگر نااریب $(N-۲)/S$ است که جانشین عبارت نامعلوم $۱/(A+۱)$ در (۱.۲۰) شده است. نام بیز تجربی برای $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{JS}$ مناسب است زیرا برآوردگر بیز (۱.۲۰) از طریق داده‌ها برآورد شده است. این تنها راه ممکن هست که N مساله مشابه را می‌توان به طور همزمان بررسی کرد.

نشان دادن اینکه ریسک بیز مرکب برآوردگر جیمز–اشتاین به صورت زیر است سخت نیست

$$R_A^{(JS)}=N\frac{A}{A+۱}+\frac{۲}{A+۱} \tag{۱.۲۷}$$

البته این بزرگتر از ریسک بیز (۱.۲۲) است اما جریمه‌ای که ریسک جیمز–اشتاین می‌پردازد کمتر آن است،

$$R_A^{JS}/R_A^{Bayes}=۱+\frac{۲}{N.A} \tag{۱.۲۸}$$

برای $N=۱۰$ و $A=۱$ تنها ۲۰ درصد بزرگتر از ریسک بیز است.

شوکی که برآوردگر جیمز–اشتاین وارد کرده بود از عبارت‌های (۱.۲۷) و (۱.۲۸) نبودند. این‌ها براساس مدل بیز (۱.۱۴) هستند. شگفتی اولیه از اثبات قضیه زیر توسط جیمز–اشتاین در ۱۹۶۱ بود:

قضیه ۱.۱.۱. [۱۰] برای $N\geq ۳$ برآوردگر جیمز–اشتاین در همه جا بر برآوردگر ماکزیمم درست نمایی در قالب خطای مربعات کلی مورد انتظار برای هر انتخاب μ غلبه دارد، یعنی

$$E_\mu\left\{||\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(JS)}-\boldsymbol{\mu}||^۲\right\}<E_\mu\left\{||\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(MLE)}-\boldsymbol{\mu}||^۲\right\} \tag{۱.۲۹}$$

در این پایان نامه در فصل ۲ به بررسی روش بیز تجربی ناپارامتری در خانواده نمایی و برآوردگر

چگالی چندجمله‌ای و شبیه سازی مربوط به توزیع‌ها پرداخته شده و در فصل ۳ برآورد همزمان بردار میانگین پواسن و عملکرد بیز تجربی ناپارامتری از نقطه نظر سازگاری ریسک در نظر گرفته شده و هم‌چنین سازگاری ریسک یکنواخت ساختاری نسبت برخی از کلاس‌های پیشین تعریف شده و نشان داده شده که برآوردگر بیز تجربی ناپارامتری بهتر از برآوردگرهای ماکزیمم درست نمایی و جیمز- اشتاین است. فصل ۴ به برآورد اندازه‌های قابلیت اعتماد در مدل قابلیت اعتماد نمایی با استفاده از روش بیز تجربی ناپارامتری اختصاص داده شده است.به علاوه برآوردگر چگالی چند جمله‌ای ناپارامتری تابع چگالی احتمال پیشین مقدار تابع قابلیت اعتماد بررسی شده، و شبیه سازی با استفاده از روش مونت کارلو انجام شده است ودر فصل ۵ نیز برآورد بیز تجربی توزیع پارتو آورده شده است.