دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه،گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد(M.Sc)

عنوان :

بررسی حلقه ماتریس های قویا کلین روی حلقه های موضعی

استاد راهنما :

دکتر شعبانعلی صفری ثابت

استاد مشاور :

دکتر شروین صاحبی

پژوهشگر :

میر عزیز رفیق نیا

زمستان سال۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه،گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد(M.Sc)

عنوان :

بررسی حلقه ماتریس های قویا کلین روی حلقه های موضعی

استاد راهنما :

دکتر شعبانعلی صفری ثابت

استاد مشاور :

دکتر شروین صاحبی

پژوهشگر :

میر عزیز رفیق نیا

زمستان سال ۱۳۹۱

تقدیم

پس از سپاس و ثنای بی حد بر آستان صفات بی همتای احدیت که در کمال رافت و در نهایت عطوفت رخصت اتمام این پایان نامه را به بنده عطا فرموده است، در کمال مودت و مسرت، این پایان نامه را که حاصل ماه ها تلاش و کوشش مستمر این بنده بوده است؛ تقدیم می نمایم به

همسر مهربانم و فرزند دلبندم" محمد مهدی"

و به همه ایرانیان پاک نهاد و نیکوسرشت که به پشتوانه ی دانایی و توانایی توشه گرفته از عرق ملی و میهنی در سودای تامین آبادانی و ارتقای ایران کهنسال مجدانه تلاش می ورزند.

تشکر و قدر دانی

ای هستی بخش، وجود مرا بر نعمات بی کرانت توان شکر نیست.

الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه ای برای اسارت و نه دست مایه ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

حال که توفیق جمع آوری و تهیه این مجموعه را یافته ام بر خود واجب می دانم از تمامی عزیزانی که در طی انجام این پایان نامه از راهنمایی و یاری شان بهره مند گشته ام تشکر و قدردانی کنم و برای ایشان از درگاه پروردگار مهربان آرزوی سعادت و پیروزی نمایم.

در ابتدا از استاد راهنمای ارجمند جناب دکتر شعبانعلی صفری ثابت که با صبوری مرا راهنمایی نموده و با ارائه نظرات سازنده و رهنمودهای بی دریغشان در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشتند، کمال تشکر را دارم.

از استاد مشاور ارجمند، سرکار خانم دکتر شروین صاحبی که در طول این تحقیق با رهنمودها و تشویق های خود مرا مورد لطف خویش قرار دادند، صمیمانه سپاسگزارم.

از داور محترم جناب دکتر مهرداد آزادی که زحمت بازخوانی و داوری این مجموعه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

از کلیه اساتید گرانقدر گروه که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم، تشکر می نمایم.

و در نهایت از تمامی دوستان و هم کلاسی های عزیزم که در طول این مدت افتخار آشنایی و مصاحبت با آنها را داشتم، به پاس محبت های بی دریغشان سپاسگزارم.

چکیده

هر عضو از حلقه یکدار R را قویا کلین گوئیم، هرگاه بصورت مجموع یک عضو یکال و یک عضو خود توان از حلقه R باشد بطوریکه اعضای یکال و خود توان خاصیت جابجایی داشته باشند. در این پایان نامه تعیین می کنیم که تحت چه شرایطی حلقه ماتریس های ۲×۲ روی حلقه های موضعی، قویا کلین است. ابتدا این شرایط را به روش جبر خطی به دست آورده و بصورت روابط هم ارزی برای قویا کلین بودن یک چنین ماتریس هایی در یک قضیه بیان می کنیم. همچنین با معرفی مفهوم $*-$تجزیه و $**-$تجزیه روی حلقه موضعی R، نشان می دهیم حلقه R، حلقه $*-$تجزیه و $**-$تجزیه روی حلقه موضعی، از درجه ۲ است اگر و تنها اگر حلقه ماتریس های ۲×۲ روی حلقه های موضعی، قویا کلین است. در ادامه شرایطی را برای قویا کلین بودن حلقه $M_2(Z_{(p)})$ که در آن $Z_{(p)}$ از موضع سازی Z در ایده آل اول تولید شده توسط p بدست می آید، به دست خواهیم آورد.

فهرست مطالب

مقدمه

در سرار این پایان نامه R حلقه یکدار است. عضو a از حلقه R را کلین[1] مـی نـامیم هرگـاه بصـورت جمع یک عضو یکال از R مانند u و یک عضـو خودتـوان از R مانـند e باشـد. یعنـی $a = e + u$.

عضو a را قویا کلین[2] گوییم هرگاه $au = ua$. حلقه R را کلین (قویا کلین) گوییم هرگاه هر عضـو آن کلین (قویا کلین) باشد.

مفهوم کلین اولین بار توسط نیکلسون[3] در [۱۸] در سال ۱۹۹۷ معرفی شد. وی نشـان داد کـه تصـویر همریخت یک حلقه کلین ، کلین است. همچنین حلقه کلین، حلقه تبادلی[4] است و حلقه هـای تبـادلی

۱-Clean
۲-strongly clean
۳-Nikelson
٤-Exchange

با خودتوان های مرکز، کلین هستند. در [۷] کامیلو[۵] و خورنا[۶] نشان داده اند که حلقه منظم-یکال[۷] ، کلین است و حالت عکس برقرار نیست. در [۸] کامیلو و یو[۸] نشان داده اند که

تبادلی $\Rightarrow$ کلین $\Rightarrow$ نیم کامل [۹]

مفهوم قویا کلین نیز اولین بار توسط نیکلسون در [۱۹] درسال ۱۹۹۹ معرفی شد. وی نشان داد که حلقه های موضعی، قویا کلین هستند و حلقه قویا π-منظم[۱۰]، کلین است.

محققانی دیگر در باب حلقه های قویا کلین به تحقیق پرداخته اند و به نتایجی دست یافته اند از جمله، در [۱۳] هان[۱۱] و نیکلسون نشان دادند که برای عدد صحیح مثبت n، R کلین است اگر و تنها اگر $M_n(R)$ کلین باشد. اما در مورد حلقه های قویا کلین، نیکلسون با طرح این سوال در [۱۹] که آیا حلقه ماتریس های $n\times n$ روی حلقه های قویا کلین، قویا کلین است؟ انگیزه ی تحقیق دراین مورد را برای بسیاری از محققان ایجاد کرد و در نهایت باعث شد نتایج جالبی برای حلقه های قویا کلین بدست آید. ابتدا کامپوس در [۹] و یانگ[۱۲] و چن[۱۳] در [۲۱] با ارایه مثال های نقض نشان دانـد که جواب این سوال منفی است. ایشان نشان داده اند که برای هر عدد اول p از مجموعه اعداد صحیح،

۵-Camillo
۶-Khurana
۷-unit-regular
۸-Yu
۹-Semiperfect
۱۰-π-regular
۱۱-Han
۱۲-Yang
۱۳-Chen

حلقه $M_2(\mathbf{Z}_{(p)})$ قویا کلین نیست که در آن $\mathbf{Z}_{(p)}$ از موضع سازی $\mathbf{Z}$ در ایده آل اول تولید شده توسط p بدست می آید. سپس محققان دیگر شرایطی را پیدا کردند که تحت این شرایط، حلقه ماتریس های ۲×۲ روی حلقه های قویا کلین، قویا کلین است. از جمله چن، یانگ و ژو در [۱۰] نشان دادند که چه وقت حلقه های ماتریسی۲×۲ روی حلقه های موضعی، قویا کلین است. همچنین لی در [۱۶] نشان داده است، وقتی حلقه، موضعی و جابجایی باشد، تحت چه شرایطی یک چنین ماتریس هایی قویا کلین هستند. خورنا و لم در [۱۴] شرایطی را بدست آورده اند که تحت این شرایط حلقه ماتریس های ۲×۲ روی حلقه های موضعی، قویا کلین هستند.

اخیرا باروا[۱۴] و دیگران در [۶] با گرایشی متفاوت و ارائه تعریف خاصی از تجزیه چند جمله های تکین در $R[t]$، روابط و شرایط هم ارزی را برای قویا کلین بودن حلقه ماتریس های ۲×۲ روی حلقه های موضعی بدست آورده اند. ارتباط نتایج باروا و دیگران در مورد قویا کلین بودن حلقه های ماتریسی ۲×۲ روی حلقه های موضعی با دیگر نتایج قبل، انگیزه ی اصلی در این پایان نامه است.

در این پایان نامه، رادیکال جیکوبسن[15] حلقه R را با $J(R)$ و مجموعه اعضای یکال R را با $U(R)$ نمایش می دهیم. در فصل اول کلیات این پایان نامه را بیان کرده و در فصل دوم با ارائه چند

۱٤-Borooah
۱٥-Jacobson

تعریف و قضیه که مورد استفاده در فصل های بعد خواهد بود، کار را شروع کرده و در فصل سوم، به بررسی شرایط و روابط هم ارزی خواهیم پرداخت که تحت این شرایط حلقه ماتریس های ۲×۲ روی حلقه های موضعی، قویا کلین هستند. در قضیه (۱۴–۳) روابط هم ارزی را بیان می کنیم که بیشتر به روش جبر خطی اثبات می شوند. سپس در قضیه (۲۵–۳) روابطی را بیان می کنیم که از همان گرایش بـاروا و دیگـران بدسـت مـی آینـد. در فصـل چهـارم نیـز بـه بررسـی شـرایطی کـه تحـت ایـن شرایط، $M_2(Z_{(p)})$ قویا کلین است می پردازیم و در نهایت در فصل پنجم نتایج بدست آمده از ایـن فصل ها را به همراه پیشنهادات، تقدیم علاقه مندان خواهیم کرد.

فصل اول : کلیات

هدف

در این پایان نامه به بررسی اینکه تحت چه شرایطی حلقه ماتریس های ۲×۲ روی حلقه های موضعی، قویا کلین هستند، پرداخته و هم ارز بودن این شرایط را نشان می دهیم. همچنین شرایط و روابط هم ارزی را برای قویا کلین بوده حلقه $M_2(Z_{(p)})$، که در آن $Z_{(p)}$ از موضع سازی Z در ایده آل تولید شده توسط p بدست می آید را بیان می کنیم.

پیشینه تحقیق

موضوعی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می گیرید یکی از تازه های علمی در زمینه جبر و گرایش حلقه ها می باشد. مفهوم کلین اولین بار توسط نیکلسون در سال ۱۹۹۷ معرفی شد. وی در سال ۱۹۹۹ ضمن تعریف مفهوم قویا کلین با طرح این سوال که آیا حلقه ماتریس های $n \times n$ روی حلقه های قویا کلین، قویا کلین است؟ آغازگر تحقیقات بعدی در این مورد شد.

موضوع مورد بررسی در این پایان نامه نیز ادامه این تحققات بوده و مربوط به مقاله ای با عنوان:

Strongly clean matrix rings over local rings

است که در سال ۲۰۰۶ به چاپ رسیده است.

در این پایان نامه با تعریف حلقه قویا کلین، قویا کلین بودن حلقه ماتریس های ۲×۲ روی حلقه های موضعی بررسی خواهیم کرد و نتایج مهمی بدست آورده که در فصل های مختلف این پایان نامه بطور کامل بیان می گردند.

روش کار تحقیق

در بررسی و انجام این پایان نامه از مقالات و کتاب های موجود در کتابخانه ها و سایر بخش های مختلف استفاده شده است. چند مقاله و کتاب به زبان انگلیسی نیز از اینترنت تهیه شده است. ابتدا با تعاریف و قضایای که در فصل دوم آمده است مفاهیم مورد استفاده در طول این پایان نامه را بیان می کنیم و در فصل های بعدی به ترتیب به ارائه شرایط قویا کلین بودن حلقه ماتریس های ۲×۲ روی حلقه های موضعی و حلقه $M_2(\mathbf{Z}_{(p)})$ می پردازیم. نهایتاً در فصل پایانی به نتایج و پیشنهادات این پایان نامه خواهیم پرداخت.

فصل دوم : تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف (۱-۲): فرض کنید R حلقه باشد. مجموعه ماتریس های $n\times n$ روی حلقه R، یعنی $M_n(R)$ همراه با جمع وضرب ماتریس ها، یک حلقه است که حلقه ماتریس های $n\times n$ با درآیه هایی از حلقه R می نامیم.

تعریف (۲-۲): مجموعه همه چند جمله ای ها روی حلقه R را با $R[t]$ نشان می دهیم، به عبارتی دیگر

$$R[t]=\{f(t)=a_0+a_1t_1+\cdots+a_nt^n | n\in N\cup\{0\}, a_i\in R\}$$

این مجموعه با جمع وضرب زیر حلقه است که آن را حلقه چند جمله ای ها روی R می نامیم.

فرض کنید،

$$g(t)=b_0+b_1t_1+\cdots+b_mt^m\in R[t] \text{ و } f(t)=a_0+a_1t_1+\cdots+a_nt^n\in R[t]$$

$$f(t)+g(t)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)t+(a_2+b_2)t^2+\cdots$$

$$f(t)g(t)=(a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)t+\cdots=\sum_{k=1}^{n+m}c_kt^k$$

که در آن $c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$ ($k=0,1\cdots,m+n$).

تعریف (۳-۲): فرض کنید

$$f(t)=a_0+a_1t_1+\cdots+a_nt^n\in R[t]$$

$a_n\neq 0$ ، a_n را ضریب پیشروی $f(t)$ و $f(t)$ را از درجه n گوئیم و می نویسیم $\deg f(t)=n$

و اگر $a_n=1$، آنگاه $f(t)$ را چند جمله ای تکین می نامیم.

تعریف (۴-۲): عضو $a\in R$ را ریشه ی چپ (راست) برای چند جمله ای

$$f(t)=a_0+a_1t_1+\cdots+a_nt^n\in R[t]$$

گوئیم هرگاه $f(a)=0$. اگر $a\in R$ هم ریشه ی چپ و هم ریشه ی راست چند جمله ای $f(t)$

باشد آن را ریشه ی چند جمله ای $f(t)$ نامیم.

تعریف (۵-۲): گوئیم چند جمله ای $f(t)=a_0+a_1t_1+\cdots+a_nt^n\in R[t]$ در R حل پذیر است

هرگاه $f(t)$ دارای ریشه ای در R باشد.

تعریف (۶-۲): فرض کنید R حلقه و $a_1,\cdots,a_n\in R$، عضو $d\in R$ را بزرگترین مقسوم علیه

مشترک اعضای $a_1,\cdots,a_n$ گوئیم و با نماد $d=(a_1,\cdots,a_n)$ نمایش می دهیم اگر

۱. به ازای هر i، $d \mid a_i$.

۲. برای هر $c \in R$ و هر i، $c \mid a_i$ نتیجه دهد $c \mid d$.

تعریف (۷-۲): اعضای $a_1,\cdots,a_n$ را از حلقه R را نسبت به هم اول گوییم هرگاه ۱ بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها باشد.

تعریف (۸-۲): در حلقه R عضو $a \in R$ را عضو خودتوان R می نامیم هرگاه $a^2 = a$.

تعریف (۹-۲): در حلقه R مجموعه $Z(R) = \{a \in R \; ; ax = xa \;\; , \forall x \in R\}$ مرکز حلقه R می نامیم.

تعریف (۱۰-۲): هر عضو $Z(R)$ را عضو مرکزی حلقه R می نامیم.

تعریف (۱۱-۲): همریختی $f : R \to R/I$ با ضابطه $f(a) = a + I$ را همریختی طبیعی یا کانونی می نامیم که یک همریختی پوشا (بروریختی) است.

تعریف (۱۲-۲): ایده آل P از حلقه R را ایده آل اول نامیم هرگاه برای ایده آل های I و J از R اگر $IJ \subseteq R$ آنگاه نتیجه بگیریم $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$. یا به عبارتی برای هر $a,b \in R$ اگر $ab \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

تعریف (۱۳-۲): فرض کنید R حلقه باشد. ایده آل $m \neq R$ از حلقه Rرا ایده آل ماکسیمال

گوییم هرگاه برای هر ایده آل I از R، اگر $m \subseteq I \subseteq R$، آنگاه $I = R$ یا $I = m$.

تعریف (۱۴-۲): حلقه Rرا موضعی می نامیم هرگاه فقط یک ایده آل ماکسیمال داشته باشد.

تعریف (۱۵-۲): فرض کنید R حلقه باشد.گروه آبلی M همراه با ضرب (ضرب اسکالر)

$$R \times M \to M$$
$$(r, x) \mapsto rx$$

یک $R-$مدول(چپ) نامیده می شود. اگر برای هر $x, y \in M$ و هر $r, s \in R$ داشته باشیم :

۱. $r(x+y) = rx + ry$.

۲. $(r+s)x = rx + sx$.

۳. $r(sx) = (rs)x$

اگر R یکدار و برای هر $x \in M$ داشته باشیم $1.x = x$ دراین صورت M را $R-$مدول(چپ) یکانی

می نامیم.

تعریف (۱۶-۲): فرض کنید M، $R-$مدول(چپ) باشد زیرمجموعه ناتهی N از M، زیر

مدول(چپ) نامیده می شود هرگاه N با اعمال تعریف شده ی M یک $R-$مدول(چپ) باشد.

تعریف (۱۷-۲): فرض کنید X زیر مجموعه ای از $R-$ مدول M باشد. اشتراک تمام زیر مدول های شامل X را زیرمدول تولید شده توسط X نامیده و با (X) نمایش می دهیم. X را مجموعه مولد و عناصر X را مولدهای (X) می نامیم. اگر X متناهی باشد، گوئیم (X) متناهی مولد است.

تعریف (۱۸-۲): فرض کنید F، $R-$مدول باشد مجموعه مولد X برای F را پایه برای F نامیم، هرگاه مستقل خطی باشد، یعنی به ازای هر n عضو از R که متمایز باشند مانند $x_1,\cdots,x_n$ وهر n عضو از R مانند $r_1,\cdots,r_n$ اگر $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ داشته باشیم $r_1 = \cdots = r_n = 0$.

تعریف (۱۹-۲): فرض کنید F، $R-$مدول باشد، F را آزاد گوییم هر گاه دارای پایه باشد.

لم (۲۰-۲): F، $R-$مدول آزاد با پایه متناهی X است که $|X| = n$ اگر وتنها اگر $F \cong R^n$.

برهان: $\Leftarrow$) فرض کنید $X = \{x_1,\cdots,x_n\}$ تعریف می کنیم

$$\varphi : R^n \to F$$
$$(a_1,\cdots,a_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

که بوضوح بروریختی $R-$مدولی است . حال فرض کنید $(a_1,\cdots,a_n) \in \ker\varphi$ در این صورت $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ و چون X مستقل خطی است لذا $a_1 = \cdots = a_n = 0$ درنتیجه $(a_1,\cdots,a_n) = 0_{R^n}$ پس φ یک به یک است و داریم $F \cong R^n$.

$\Leftarrow$) فرض کنید $e_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ (۱ در i امین مکان قرار دارد) در این صورت

$e_i\,(1 \le i \le n)$ها، R^nرا تولید می کنند. بنابراین $\varphi(e_i)$، M را تولید می کند.□

تعریف (۲-۲۱): فرض کنید $M_0,\cdots,M_n$ $(n \ge 2)$، $R-$مدول های دلخواه باشند دراین صورت،

دنباله

$$M_0 \xrightarrow{\varphi_1} M_1 \xrightarrow{\varphi_2} M_2 \to \cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} M_n$$

را که دنباله ای از همریختی $R-$مدول های $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ است، دنباله دقیق می نامیم هرگاه برای هر

$2 \le I \le n$ داشته باشیم $\operatorname{Im}\varphi_{i-1} = \ker\varphi_i$.

لم (۲-۲۲): دنباله $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} 0$ از همریختی $R-$مدول ها، دقیق است اگر و تنها اگر g همریختی

پوشا باشد.

برهان : اگر g همریختی پوشا باشد آنگاه $\operatorname{Im} g = C = \ker f$ و برعکس.□

تعریف (۲-۲۳): $R-$مدول P را پروژکتیو می نامیم هرگاه به ازای هر نمودار از همریختی

$R-$مدول ها مانند