بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش عددی برای تقلیل ماتریس همیلتونی به شور همیلتونی و برخی کاربردهای آن

استاد (اساتید) راهنما:
دکتر پرویز سرگلزایی

تحقیق و نگارش:
آرش علائی

(این پایان نامه از حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه سیستان و بلوچستان بهره مند شده است)

اردیبهشت ۸۸

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان روش عددی برای تقلیل ماتریس همیلتونی به شورهمیلتونی و برخی کاربردهای آن قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی توسط دانشجو آرش علائی تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر پرویز سرگلزایی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

آرش علائی

این پایان نامه ...۶... واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ۸۸/۶/۱۵ توسط هیئت داوران بررسی و درجه بسیارخوب به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد راهنما:	دکتر پرویز سرگلزایی		
استاد راهنما:			
استاد مشاور:			
داور ۱:	دکتر علیرضا سهیلی		
داور ۲:	دکتر حسن میش مست نهی		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر اکبر گلچین		

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
ثبت مدارک

۱۳۸۸/۸/۳۰

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب آرش علائی تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کـار پژوهـشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطـابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سـطح یـا بـالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: آرش علائی

امضاء

تقدیم به:

پدر بزرگوار و مادر مهربانم ، عزیزانی کـه هرگـز نخـواهم توانـست اندکی از محبت های بی اندازه آنان را جبران کنم.

تقدیم به:

برادر و خواهرعزیزم که همیشه یار و یاور من هستند.

تقدیم به:

تمامی معلمانی که از اول ابتدایی تا به امـروز دلـسوزانه بـرای مـن زحمت کشیدند و به من علم آموختند .

سپاسگزاری

خدای مهربان را سپاس میگویم که به من توفیق داد در راه علم آموزی گام بردارم.
برخود لازم میدانم از زحمات تمام کسانی که در کار به اتمام رساندن پایان نامه به من کمک کرده اند تشکر و قدردانی نمایم. از استاد راهنمای عزیزم آقای دکتر سرگلزایی، آقایان دکتر حسن میش مست نهی و دکتر سهیلی که داوری پایان نامه را بر عهده داشتند متشکرم. همچنین از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر اکبر گلچین سپاسگزارم. جا دارد از دوست و برادر عزیزم سید حسین رسولی که در مدت تکمیل پایان نامه از راهنمایی های ایشان بهره بسیار گرفتم تشکر و قدردانی ویژه نمایم.از دوستان عزیزم محمدحسین معصومی ، علی شاکرمی، مهدی اعتدالی ، روح اله چوبین، محمد سجادی، مهدی جعفری زاده، اکبر زارع، محسن طالبی، علی مفتاح، جواد غلامی، کاظم مرتضوی، فرزاد طوسی، مازیار بهرامی ، حیات خوبی پور، مهدی وکیلیان که در مراحل مختلف این پایان نامه حقیر را یاری نمودند صمیمانه سپاسگزارم.

چکیده

در فصل اول این پایان نامه مروری بر مفاهیم جبر خطی و جبر خطی عددی خواهیم داشت. فصل دوم به نظریه کنترل، تاریخچه آن و برخی مفاهیم پایه در این زمینه اختصاص دارد. در فصل سوم به معرفی مختصر کنترل بهینه می پردازیم و رابطه مسائل کنترل بهینه را با ماتریس های همیلتونی بیان خواهیم نمود. معادله ریکاتی و روش های حل آن را در فصل چهارم خواهیم دید. در فصل پنجم به معرفی یک روش عددی پایدار پسرو قوی برای حل مسائل کنترل بهینه می پردازیم و سرانجام در فصل ششم چندین مثال با پارامترهای گوناگون را با الگوریتم معرفی شده حل خواهیم نمود و آن راباروش های قبلی و همچنین برنامه مطلب مقایسه می کنیم.

کلمات کلیدی: کنترل ، کنترل بهینه، معادله ریکاتی جبری،ماتریس همیلتونی

فهرست مندرجات

۱—۰ پیش گفتار

تا کنون پیشرفت های زیادی از نظر علمی و کاربردی در زمینه تئوری کنترل و کنترل بهینه صورت گرفته است، و این شاخه علمی در فضانوردی، مهندسی پزشکی ، مهندسی صنعتی ، رباتیک ، اقتصاد و... کاربردهای فراوان و زیبایی دارد.البته بسیاری ازروش هایی که در اغلب کتاب های نظریه سیستمها و کنترل ذکر می شوند، علی رغم جذابیت و زیبایی ذاتی آن ها، به دلیل اینکه قبل از دوران شکوفایی رایانه ها بوجود آمده اند، کارایی لازم در حل مسایل و محاسبات با حجم بالا را ندارند. حتی روش های عددی هم که مورد استفاده قرار می گیرند در حالت کلی روش های پایداری نمی باشند .

هر چند که در بیست سال اخیر تلاش های فراوانی در راستای حل عددی مسایل کنترل و کنترل بهینه صورت گرفته است و افراد مختلف الگوریتم های عددی گوناگونی برای حل مسایل سیستم های خطی و غیر خطی پیشنهاد کرده اند، متاسفانه تا به حال توجه چندانی به اهمیت آنالیز عددی در علم کنترل نشده است . ممکن است یکی از دلایل آن احتیاج به دانستن اطلاعاتی در زمینه های جبر خطی، جبر خطی عددی، تئوری کنترل و علوم کامپیوتر می باشد و این خود درک مطلب را مشکل می سازد و باعث شده است پیشرفت آنالیز عددی در این زمینه علمی و گسترش استفاده از آن با سرعت کمتری انجام گیرد .

در این پایان نامه پس از معرفی مختصر علم کنترل ، به معرفی یک روش جدید عددی برای حل مسایل کنترل بهینه میپردازیم وسپس کارایی الگوریتم جدید را با مثال های عددی متعددی نشان می دهیم .

فصل ۱

مقدمه ای بر جبر خطی و جبر خطی عددی

۱ — ۱ مقدمه

با تعاریف اولیه بردار و ماتریس و برخی خواص آن ها و روابط بین بردارها و ماتریس ها مانند جمع و ضرب بردارها و ماتریس ها از جبر خطی مقدماتی آشنایی داریم . در اینجا فقط برخی از تعاریف و روابط را که در فصل های آتی استفاده می شود به طور مختصر یادآوری می کنیم .

۱ — ۲ تعاریف مقدماتی

۱ — ۲ — ۱ تعامد بردارها وزیر فضاها

فرض کنیم $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ و $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ دو بردار ستونی n بعدی باشند.زاویه بین دو بردار ناصفر u و v به صورت زیر داده می شود

$$\cos(\theta) = \frac{u^T v}{||u||\,||v||}$$

دو بردار u و v متعامد هستند اگر $\theta = 90^\circ$ باشد یعنی $u^T v = 0$. علامت $\perp$ برای نشان دادن تعامد به کار می رود.فرض کنید S یک مجموعه بردار در $\mathbb{R}^n$[1] باشد. آنگاه S یک زیر فضای $\mathbb{R}^n$ است اگر $s_1, s_2 \in S$ ایجاب کند که $c_1 s_1 + c_2 s_2 \in S$ باشد که c_1 و c_2 اسکالرهای دلخواه هستند. یعنی S یک زیر فضاست اگر هر ترکیب خطی دو بردار S ، در S باشد . برای هر زیر فضا کوچکترین عدد صحیح منحصر بفرد r وجود دارد به طوری که هر بردار در این زیر فضا می تواند توسط ترکیب خطی حداکثر r بردار از این زیر فضا بیان شود.r بعد زیر فضا نامیده می شود و آنرا با $\dim[S] = r$ نشان می دهیم . هر مجموعه از r بردار مستقل خطی در S که $\dim[S] = r$ یک پایه برای زیر فضا نامیده می شود . برای هر ماتریس $A_{m\times n}$ برد A را با $R(A)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m | \exists\, x \in \mathbb{R}^n :\ b = Ax\}$$

[1] $\mathbb{C}^n$ هم می تواند باشد

فرض کنید S زیر فضایی از $\mathbb{R}^m$ باشد.آنگاه زیر فضای $S^\perp$ که با $S^\perp = \{y \in R^m | \forall x \in S : y^T x = 0\}$ تعریف می شود متمم متعامد S نام دارد .

مطلب :[۲] دربرنامه مطلب $Q = orth(A)$ یک پایه متعامد برای برد A می باشد.

۱—۲—۲ رتبه ماتریس

فرض کنید $A_{m\times n}$ باشد.آنگاه زیر فضای تولید شده توسط ستون های A (سطر های A) فضای ستونی (سطری) A نام دارد. برد A همان فضای ستونی A است . رتبه یک ماتریس A بعد فضای ستونی آن است و با $rank(A)$ نشان داده می شود.ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ رتبه ستونی کامل دارد اگر ستون های آن مستقل خطی باشند . رتبه سطری کامل به طور مشابه تعریف می شود . ماتریس A رتبه کامل دارد اگر رتبه ستونی کامل و یا رتبه سطری کامل داشته باشد.

مطلب : $rank(A)$ تعداد ستون ها یا سطر های مستقل خطی ماتریس A را می دهد.

۱—۲—۳ ضرب و جمع کرونکر دو ماتریس

فرض کنید ماتریس های $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و $B \in \mathbb{C}^{r\times s}$ را داشته باشیم. ضرب کرونکر دو ماتریس A و B را که با $A \otimes B$ نشان می دهیم ماتریسی $mr \times ns$ است که از ضرب تک تک درایه های ماتریس اول در ماتریس دوم بدست می آید. یعنی داریم

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & & a_{2n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

همچنین اگرماتریس های $A_{m\times m}$ و $B_{n\times n}$ را در نظر بگیریم جمع کرونکر یا جمع مستقیم آن ها به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

---

۲ [illegible]

که ماتریسی $[(m+n)\times(m+n)]$ می باشد.

تذکر: اگر $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ مقادیر ویژه $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ و $\mu_1,\cdots,\mu_m$ مقادیر ویژه $B\in\mathbb{C}^{m\times m}$ باشند آنگاه مقادیر ویژه $A\otimes B$ ، mn عدد $\lambda_i\mu_j$ هستند و مقادیر ویژه $A\oplus B$ ، $m+n$ عدد μ_j , λ_i می باشند.

$i=1\cdots n,\ j=1\cdots m$

مطلب : $kron(A,B)$ ضرب کرونکر ماتریس های A و B را می دهد.

۱—۳ برخی ماتریس های خاص

ماتریس های مثلثی : ماتریس $A=(a_{ij})$ یک ماتریس بالا مثلثی است اگر برای $i>j$ داشته باشیم $(a_{ij})=0$. ترانهاده یک ماتریس بالا مثلثی ماتریسی پایین مثلثی است . یعنی $A=(a_{ij})$ پایین مثلثی است اگر برای $i<j$ داشته باشیم $(a_{ij})=0$.

$$\begin{pmatrix} \backslash & 0 \\ * & \backslash \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} \backslash & * \\ 0 & \backslash \end{pmatrix}$$

پایین مثلثی　　　　بالا مثلثی

مطلب : $tril(A)$ قسمت پایین مثلثی ماتریس A و $triu(A)$ قسمت بالا مثلثی ماتریس A را می دهد.

ماتریس متعامد: ماتریس مربعی U **متعامد** نامیده می شود اگر $U^TU=UU^T=I$ باشد. ماتریس های متعامد نقش مهمی در محاسبات عددی ایفا میکنند.در زیر به دو خاصیت مهم ماتریس های متعامد اشاره می کنیم.

- معکوس یک ماتریس متعامد Q ترانهاده آن است. یعنی $Q^{-1}=Q^T$
- ضرب دو ماتریس متعامد یک ماترس متعامد است.

ماتریس هسنبرگ : ماتریس مربعی $A=(a_{ij})$ بالا هسنبرگ نامیده می شود اگر برای $i>j+1$ داشته باشیم $(a_{ij})=0$. ترانهاده یک ماتریس بالا هسنبرگ ، ماتریس پایین هسنبرگ است یعنی ماتریس مربعی $A=(a_{ij})$ پایین هسنبرگ نامیده می شود اگر برای $j>i+1$ داشته باشیم $(a_{ij})=0$.

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ * & \cdots & * & * \\ & \ddots & \vdots & * \\ O & & * & * \end{pmatrix}$$
بالا هسنبرگ

$$\begin{pmatrix} * & * & & O \\ \vdots & & \ddots & \\ * & & & * \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$
پایین هسنبرگ

مطلب :دستور $[P, H] = hess(A)$ یک ماتریس متعامد P و یک ماتریس بالا هسنبرگ H محاسبه می کند به طوری که $PAP^T = H$.

شکل کانونی جردن یک ماتریس : برای یک ماتریس مختلط $A_{n\times n}$ ماتریس نامنفرد T وجود دارد به طوری که $T^{-1}AT = J = diag(J_1, \ldots, J_k)$ که

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

ماتریسی $m_i \times m_i$ می باشد و $m_1 + \ldots + m_k = n$ است .

ماتریس های J_i **ماتریس های جردن** یا **بلوک های های جردن** نامیده می شوند و J شکل کانونی جردن (JFC) ماتریس A نام دارد. برای هر $j = 1, 2, \ldots, k$ ، λ_j مقدار ویژه A با چند گانگی m_j است.

مطلب : دستور $jordan(A)$ شکل کانونی جردن ماتریس A را حساب می کند.

ماتریس مثبت معین : ماتریس متقارن A مثبت معین نامیده می شود اگر برای هر بردار ناصفر x ، $x^TAx > 0$ باشد.ماتریس نیمه معین مثبت به طور مشابه تعریف می شود. ماتریس متقارن A نیمه معین مثبت است اگر برای هر x ، $x^TAx \geq 0$ باشد .

مزدوج مختلط: مزدوج مختلط ماتریس A را که با $\overline{A}$ نشان می دهیم ماتریسی است که هر مولفه آن مزدوج مختلط مولفه متناظر در A باشد. ترانهاده مزدوج مختلط را با A^* نشان می دهیم یعنی $A^* = \left(\overline{A}\right)^T$.

$\overline{x}$ و x^* برای یک بردار مختلط x به طور مشابه تعریف می شوند .ماتریس مربعی A هرمیتی نامیده می شود اگر $A^* = A$ باشد. ماتریس مختلط مربعی A یکانی است اگر $A^*A = AA^* = I$.

مثبت است اگر $x^*Ax \geq 0$ برای همه $x \neq 0$ ها .

مطلب : اگر A ماتریسی مختلط باشد A' مزدوج مختلط A را نشان می دهد.

ماتریس های متشابه : دو ماتریس A و B متشابه نامیده می شوند اگر ماتریس نامنفرد T وجود داشته باشد به طوری که $T^{-1}AT = B$ باشد .

ماتریس های بلوکی : ماتریسی که هر مولفه آن یک ماتریس می باشد ماتریس بلوکی نام دارد . فرض کنید ماتریس A به شکل $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ افراز شده باشد . آنگاه A نامنفرد است اگر و فقط اگر $A_S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ ، که مکمل شور نامیده می شود ، نامنفرد باشد (فرض می کنیم که A_{11} نامنفرد است) و در این حالت معکوس ماتریس A به صورت زیر است .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}A_S^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_S^{-1} \\ -A_S^{-1}A_{21}A_{11} & A_S^{-1} \end{pmatrix}$$

ماتریس شبه بالا مثلثی : ماتریس حقیقی T شبه بالا مثلثی نامیده مَی شود اگر به شکل

$$T = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} n_1 & \cdots & n_l \end{array} & \\ \begin{pmatrix} T_{1,1} & \cdots & T_{1,l} \\ & \ddots & \vdots \\ & & T_{l,l} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ \vdots \\ n_l \end{array} \end{array}$$

باشد با بلوک های قطری $T_{i,i}$, $i = 1\ldots,l$, که بلوک های قطری ۱ × ۱ و یا ۲ × ۲ با یک زوج مقدار ویژه مزدوج مختلط می باشند [۲۹] .

۱—۴ نرم های برداری و ماتریسی

۱—۴—۱ نرم های برداری

فرض کنید $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ یک n بردار در $\mathbb{R}^n$ باشد . آنگاه یک نرم برداری که با علامت $\|x\|$ نشان داده

۱ – برای هر بردار ناصفر x $\|x\| > ۰$ می باشد و $\|x\| = ۰$ است اگر و فقط اگر $x = ۰$ باشد

۲ –.به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و همه اسکالرهای α داریم $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

۳ – برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ داریم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

نرم های برداری که زیاد مورد استفاده قرار می گیرند عبارتنداز

(نرم جمع یا ۱ —نرم) $\|x\|_۱ = |x_۱| + |x_۲| + \cdots + |x_n|$

(نرم اقلیدسی یا ۲ —نرم) $\|x\|_۲ = \sqrt{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲}$

(نرم ماگزیمم یا ∞ —نرم) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \qquad i = ۱ = \ldots n$

به طور کلی اگر p یک عدد حقیقی و $p \geq ۱$ باشد p—نرم یاهولدر نرم به صورت زیر تعریف می شود :

$$\|x\|_p = (|x_۱|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{۱}{p}}$$

۱—۴—۲ نرم های ماتریسی

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد.آنگاه همانند نرم برداری ، نرم ماتریسی $\|A\|$ را با خواص زیر در نظر می گیریم:

۱ – $\|A\| > ۰$ ؛ $\|A\| = ۰$ است اگر و فقط اگر A یک ماتریس صفر باشد .

۲ – برای هر اسکالر دلخواه α داریم $\|\alpha A\| = |\alpha|\,\|A\|$

۳ – $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

نرم های ماتریسی وابسته: فرض کنید ماتریس A ویک نرم برداری $\|.\|_p$ داده شده است .عدد نامنفی داده شده با

$$\|A\|_p = \max_{x \neq ۰} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

در همه خواص نرم ماتریسی صدق می کند. این نرم ، نرم ماتریسی وابسته به p—نرم (نرم القایی) نامیده