بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش آنالیز

عنوان:

تقریب نقطه‌ی ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت‌های غیرانبساطی

استاد راهنما:

دکترعلی آبکار

استاد مشاور:

دکتر عزیزالله عزیزی

توسط:

فائزه گلکار

مهر ۱۳۸۸

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به
دانشگاه‌بین المللی امام خمینی است.

ریاضیات نازیبا در جهان ماندنی نیست.

(هاردی)

تقدیم به‌او که مرا از آسمان به زمین آورد، مادر

و او که به آسمان هجرت گزید و مرا میزبان جشن ستارگان کرد، پدر.

تشکر و قدردانی

ستایش آفریدگار جان و خرد راست که رخصت اندیشیدن و زیستن به ما عطا فرموده تا بتوانیم در راه رسیدن به حقیقت گامی نهاده باشیم. در این بادیه راه خوف انگیز که معانی از واژگان جدا مانده‌اند از او یاری می‌طلبم تا قدرت تمیز و تشخیص درست را از نادرست بر من عطا فرماید.

وای بر من اگر دانشم رهزنم شود و کتابم حجابم....

لازم است در ابتدا از تمام کسانی که مرا در نوشتن این پایان نامه یاری نموده‌اند، خصوصاً استاد ارجمند جناب آقای دکتر علی آبکار که در تمام این مدت با صبر و شکیبایی ایشان توانستم از تجربیاتشان بهره‌مند گردم تشکر کنم. همچنین ازاستاد مشاورم جناب آقای دکتر عزیزی، داور داخلی جناب آقای دکتر رازانی و داور خارجی جناب آقای دکتر رکنی نهایت تشکر را دارم. باری تلاش من همیشه بر این بوده که شایستگی توجه و محبت اساتید و دوستان و توان به انجام رساندن وظیفه‌ای را که بر عهده گرفته‌ام داشته باشم، پس با خرسندی از آنچه که توانسته‌ام و پوزش از آنچه نتوانسته‌ام.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا تعدادی متناهی نگاشت غیرانبساطی $T_1, T_2, ..., T_N$ را روی یک فضای هیلبرت درنظر گرفته و به تقریب یک نقطه‌ی ثابت مشترک آن ها براساس روشی که توسط یااو معرفی شد می‌پردازیم. سپس یک تعمیم از این مطلب به حالت فضای باناخ را ارائه خواهیم کرد. این قسمت از پایان نامه مشتمل بر کاری جدید است. نهایتاً در فصل آخر به تقریب نقطه‌ی ثابت مشترک تعدادی نامتناهی شمارا از نگاشت‌های غیرانبساطی روی یک فضای هیلبرت می‌پردازیم. در همه‌ی این موارد نشان خواهیم داد که نقطه‌ی ثابت مشترک نگاشت‌ها در یک نامعادله‌ی تغییراتی خاصی صدق می‌کند.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت حقیقی باشد، عملگر خطی و کراندار A را روی H قویاً مثبت [1] گوییم هرگاه عدد $\bar{\gamma} > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\langle Ax, x\rangle \geq \bar{\gamma}\|x\|^2 \qquad x \in H$$

خود نگاشت T بر H را غیرانبساطی [2] نامیم هرگاه برای هر $x, y \in H$ داشته باشیم

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

همچنین یک انقباض روی H خودنگاشت f بر H می‌باشد به طوری که

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\| \qquad x, y \in H$$

که در آن $\alpha \in [0, 1)$ عدد ثابتی است.
فرض کنید $\{T_i\}_{i=1}^N$ خانواده‌ای متناهی از خودنگاشت‌های غیرانبساطی روی H باشند. مجموعه نقاط ثابت T_i را با $Fix(T_i)$ نمایش می‌دهیم یعنی

$$Fix(T_i) := \{x \in H : T_i x = x\}$$

مجموعه نقاط ثابت مشترک $\{T_i\}_{i=1}^N$ را با $F = \bigcap_{i=1}^N Fix(T_i)$ نشان می‌دهیم. در سراسر این پایان‌نامه فرض بر این است که $F \neq \emptyset$.
پیدا کردن یک نقطه‌ی مطلوب در مجموعه نقاط ثابت مشترک خانواده‌ای از نگاشت‌های غیرانبساطی

[1] Strongly Positive
[2] Nonexpansive

از نظر کاربردی بسیار حائز اهمیت می‌باشد و در بخش‌های مختلفی از علوم ریاضی و مهندسی ظاهر می شود. برای مثال یک مسئله رایج که کاربردهای عملی فراوانی دارد تلاش برای پیدا کردن نقطه‌ای در اشتراک مجموعه‌های محدب می‌باشد که به مسئله‌ی امکان‌پذیری محدب [۳] معروف است که به صورت زیر بیان می‌شود:

فرض کنید X یک فضای هیلبرت و $C_1, \dots, C_N$ زیرمجموعه‌های محدب و بسته‌ی X با اشتراک ناتهیِ C باشند یعنی: $C = C_1 \bigcap \dots \bigcap C_N \neq \emptyset$. مسئله‌ی امکان پذیری محدب یعنی پیداکردن نقطه‌ای در C.

اگر نگاشت‌های غیرانبساطی تصاویری روی مجموعه‌های محدب و بسته داشته باشند، در این صورت مسئله‌ی نقطه‌ی ثابت برای این نگاشت‌ها به مسئله‌ی امکان پذیری محدب تبدیل می‌شود برای آشنایی با کاربردها و جزئیات بیشتر به منبع [۲] رجوع کنید.

یکی دیگر از مسائلی که در این زمینه حائز اهمیت است، مسئله‌ی پیدا کردن نقطه‌ی مطلوبی می‌باشد که تابع هزینه‌ی داده شده‌ی θ که از فضای هیلبرت به روی مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌شود را روی مجموعه نقاط ثابت مشترک نگاشت‌های غیرانبساطی مینیمم می‌کند. به منابع [۳, ۱۴] مراجعه کنید.

در سال‌های اخیر تعدادی از ریاضیدانان با به کاربردن روش‌های تکراری برای نگاشت‌های غیرانبساطی به دنبال جوابی برای مسائل مینیمم‌سازی [۴] بوده‌اند. یک مسئله مینیمم‌سازی رایج روی مجموعه نقاط ثابت مشترک نگاشت‌های غیرانبساطی به صورت زیر می‌باشد:

$$\min_{u \in F} \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle u, b\rangle \qquad (1)$$

که در آن $b \in H$ و A عملگری قویاً مثبت و خودالحاق است. برای $u \in H$ و دنباله‌ی عددی مناسب $\{\lambda_n\}$، دنباله بازگشتی $\{x_n\}$ را با نقطه‌ی آغازی دلخواه $x_0 \in H$ به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_{n+1} = (I - \lambda_{n+1} A)T_{n+1}x_n + \lambda_{n+1}u \qquad n \geq 0 \qquad (2)$$

[۳] Convex Feasibility
[۴] Minimization Problem

که در آن $T_n = T_{n \ mod \ N}$ و تابع mod مقادیر $\{1, 2 \ldots N\}$ را می‌گیرد.
شی [5] در [11] نشان داده است دنباله‌ی $\{x_n\}$ به طور قوی به جواب یکتای مسئله مینیمم‌سازی (1) همگراست که در آن $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ در خاصیت زیر صدق می‌کند:

$$F = Fix(T_N \cdots T_2 T_1) = Fix(T_1 T_N \cdots T_3 T_2) = \cdots = Fix(T_{N-1} \cdots T_1 T_N) \qquad (3)$$

به علاوه $\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای در $(0, 1)$ می‌باشد که درشرط‌های زیر صدق می‌کند:

(C_1) $\quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$

(C_2) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$

(C_3) $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+N}} = 1$ یا $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| < \infty$

تذکر ۱: باید توجه کرد که شرط‌های (C_1) و (C_2) برای همگرایی قوی الگوریتم (2) لازم می‌باشند اما واضح نیست که آن‌ها کافی نیز هستند.
تذکر ۲: نگاشت‌های غیرانبساطی زیادی هستند که در رابطه‌ی (3) صدق نمی‌کنند برای مثال اگر $X = [0, 1]$ و T_1 و T_2 به صورت $T_1 x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ و $T_2 x = \frac{3x}{4}$ تعریف شوند در این صورت $Fix(T_1 T_2) = \{\frac{2}{5}\}$ درحالی که $Fix(T_2 T_1) = \{\frac{3}{10}\}$.
مسئله همگرایی روش تکرار (2) برای خانواده‌ای متناهی یا نامتناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی $T_1, T_2, \ldots$ در فضاهای هیلبرت یا برخی از فضاهای باناخ خاص به وسیله افراد زیادی مطالعه و بررسی شده است. یکی از این موارد قضیه‌ای است که توسط باشکه [6] در سال ۱۹۹۴ به صورت زیر ارائه شده است:
فرض کنید K زیرمجموعه‌ی محدب، بسته و ناتهی از H باشد و $T_1, \cdots, T_N$ خانواده‌ای متناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی از K به K باشند به طوری که $F \neq \emptyset$ و در رابطه‌ی (3) صدق کند.

[5] X.u
[6] Bauschke

دنباله‌ی بازگشتی $\{x_n\}$ را با این فرض که u و $x_\circ$ در K داده شده باشند به صورت زیر درنظر بگیرید

$$x_{n+1} = \lambda_{n+1}u + (1 - \lambda_{n+1})T_{n+1}x_n \quad n \geq 0$$

که در آن $T_n = T_{n \ mod \ N}$ و $\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای در $(0, 1)$ می‌باشد که درشرط‌های $(C_1), (C_2)$ و $(C'_3) : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - \lambda_{n+1}| < \infty$ صدق می‌کند. در این صورت $\{x_n\}$ به طور قوی به $P_F u$ همگراست که $P_F : H \to F$ متر تصویر است.

افراد زیادی روش هایی مشابه قضیه‌ی باشکه را در فضاهای باناخ و یا با استفاده از شرایط متنوعی روی دنباله‌ی $\{\lambda_n\}$ بررسی نموده‌اند. برای مثال تاکاهاشی[7] و دیگران در [10] قضیه‌ی باشکه را به فضای باناخ یکنواخت محدب تعمیم داده‌اند.

اوهارا[8] شرط (C'_3) در قضیه‌ی باشکه را با شرط $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+N}} = 1$ عوض کرد و همگرایی دنباله‌ی داده شده را در فضای هیلبرت به دست آورد.

مودافی[9]در [8] روش تقریب چسبندگی [10] را برای نگاشت‌های غیرانبساطی به صورت زیر معرفی کرد: فرض کنیم f یک انقباض روی H باشد، با در نظر گرفتن $x_\circ \in H$ به عنوان نقطه‌ی آغازی دلخواه، دنباله‌ی بازگشتی $\{x_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{n+1} = \sigma_n f(x_n) + (1 - \sigma_n)Tx_n \qquad n \geq 0 \tag{4}$$

که در آن $\{\sigma_n\}$ دنباله‌ای در $(0, 1)$ می‌باشد. با اعمال شرایطی روی $\{\sigma_n\}$، دنباله‌ی $\{x_n\}$ به طور قوی به یک نقطه‌ی ثابت x^* از T همگراست که جواب نامعادله‌ی تغییراتی زیر است

$$\langle (I - f)x^*, p - x^* \rangle \geq 0 \qquad p \in F$$

لازم به ذکر است الگوریتم‌هایی که با استفاده از روش تقریب چسبندگی به دست می آیند در بسیاری از موارد به جواب نامعادلات تغییراتی همگرا هستند که این جواب نیز تحت شرایطی برای حل مسائل

[7] Takahashi
[8] O'Hara
[9] Moudafi
[10] Viscosity Approximation Method

مینیمم سازی به کار می‌رود.

یونگونگ یااو [11] با ترکیب روش تکرار (۲) و روش تقریب چسبندگی (۴) الگوریتمی تکراری را بدون فرض هیچ نوع جابجایی برای خانواده‌ای متناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی به صورت زیر به‌دست آورده است.

$$u_{n+1} = \lambda_n \gamma f(u_n) + \beta u_n + ((1-\beta)I - \lambda_n A)W_n u_n \tag{5}$$

که در آن f خودنگاشتی انقباضی روی H با ضریب α، A عملگری قویاً مثبت و خودالحاق با ضریب $\overline{\gamma} > 0$ و γ و β اعداد حقیقی مثبت با شرط $0 < \beta < 1$ و $0 < \gamma < \frac{\overline{\gamma}}{\alpha}$ می‌باشند. همچنین W_n خودنگاشتی بر H است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
U_{n,1} &= \alpha_{n,1}T_1 + (1-\alpha_{n,1})I \\
U_{n,2} &= \alpha_{n,2}T_2U_{n,1} + (1-\alpha_{n,2})I \\
&\vdots \\
U_{n,N-1} &= \alpha_{n,N-1}T_{N-1}U_{n,N-2} + (1-\alpha_{n,N-1})I \\
W_n := U_{n,N} &= \alpha_{n,N}T_NU_{n,N-1} + (1-\alpha_{n,N})I
\end{aligned}$$

با اعمال شرط‌هایی روی پارامترها نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{u_n\}$ تولید شده به وسیله‌ی (۴) به طور قوی به جواب یکتای نامعادله تغییراتی

$$\langle (A-\gamma f)u^*, u-u^* \rangle \geq 0 \qquad u \in F \tag{6}$$

همگراست که شرط بهینگی برای مسئله‌ی مینیمم‌سازی

$$\min \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - h(u) \tag{7}$$

می‌باشد که در آن h تابع پتانسیل برای γf می‌باشد؛ یعنی $h'(u) = \gamma f(u)$.

در فصل دوم جزئیات اثبات این همگرایی را مورد بررسی قرار خواهیم داد. لازم به ذکر است که در

[11] Yonghong Yao

اثبات این قضیه روشی را ارائه داده‌ایم که بدون استفاده از حد باناخ و با روشی متفاوت و ساده‌تر به نتیجه‌ی مطلوب رسیده‌ایم. در واقع این اثبات از گام سوم به بعد متفاوت با اثبات ارائه شده توسط یااو می‌باشد.

در فصل سوم با قراردادن نگاشت همانی به جای عملگر قویاً مثبت A همگرایی این الگوریتم جدید را در فضای باناخ به طور یکنواخت هموار به دست آورده‌ایم و نشان می‌دهیم که این نقطه‌ی همگرایی جواب یکتای نامعادله‌ی تغییراتی زیر نیز می‌باشد.

$$\langle (I-f)u^*, J(u-u^*)\rangle \geq 0 \quad \forall u \in F.$$

بنابراین مطالب فصل سوم را هم می‌توان پژوهشی کاملاً جدید به حساب آورد.

در سال ۲۰۰۶ مارینو و شی[۱۲] در [۷] الگوریتمی تکراری را برای یک نگاشت غیرانبساطی T به صورت زیر در نظر گرفته‌اند:

$$x_{n+1} = \lambda_n \gamma f(x_n) + (I - \lambda_n A)Tx_n \qquad n \geq 0 \tag{8}$$

که در آن f یک انقباض، A عملگری قویاً مثبت و $x_0 \in H$ یک نقطه‌ی آغازی دلخواه می‌باشد، به‌علاوه $\gamma > 0$ عددی ثابت و$\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای در $(0,1)$ است که در شرایط $(C_1), (C_2), (C_3)$ با $N = 1$ صدق می‌کند. آنها ثابت کردند که دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده به وسیله‌ی (۸) به طور قوی به جواب یکتای نامعادله‌ی تغییراتی (۶) همگراست که شرط بهینگی برای مسئله مینیم سازی (۷) نیز می‌باشد.

براساس کارهای اخیر، یااو، لیو و چن[۱۳] الگوریتمی تکراری را برای تقریب نقطه‌ی ثابت مشترک خانواده‌ای نامتناهی و شمارش‌پذیر از نگاشت‌های غیر انبساطی $T_1, T_2 \ldots$ به صورت زیر ارائه کرده‌اند:

$$u_{n+1} = \alpha_n \gamma f(u_n) + \beta_n u_n + ((1-\beta_n)I - \alpha_n A)W'_n u_n \qquad n \geq 0$$

[۱۲] Marino,X.u

[۱۳] Yao,Liou,Chen

که در آن f یک انقباض با ثابت α و $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ خانواده‌ای نامتناهی و شمارش‌پذیر از نگاشت‌های غیرانبساطی روی H می‌باشد به طوری که $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$، A عملگری قویاً مثبت و خودالحاق با ضریب $\overline{\gamma} > 0$ و $0 < \gamma < \frac{\overline{\gamma}}{\alpha}$ و W'_n خودنگاشتی از H می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
U_{n,n+1} &= I,\\
U_{n,n} &= \lambda_n T_n U_{n,n+1} + (1-\lambda_n)I,\\
U_{n,n-1} &= \lambda_{n-1} T_{n-1} U_{n,n} + (1-\lambda_{n-1})I,\\
&\vdots\\
U_{n,k} &= \lambda_k T_k U_{n,k+1} + (1-\lambda_k)I,\\
U_{n,k-1} &= \lambda_{k-1} T_{k-1} U_{n,k} + (1-\lambda_{k-1})I,\\
&\vdots\\
U_{n,2} &= \lambda_2 T_2 U_{n,3} + (1-\lambda_2)I,\\
W'_n = U_{n,1} &= \lambda_1 T_1 U_{n,2} + (1-\lambda_1)I.
\end{aligned}
$$

با اعمال شرایطی روی $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ که در فصل چهارم خواهیم دید، نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{u_n\}$ به طور قوی به یک نقطه ثابت مشترک $p \in F$ همگراست که جواب یکتای نامعادله تغییراتی (٦) می‌باشد.

این پایان نامه متشکل از چهار فصل می‌باشد. در فصل اول به بیان لم‌ها و تعاریفی که در فصل های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت می‌پردازیم. در فصل دوم تقریب نقطه‌ی ثابت مشترک خانواده‌ای متناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی را در فضای هیلبرت بررسی می نماییم. در فصل سوم با ارائه‌ی الگوریتمی جدید، همگرایی این الگوریتم را در فضای باناخ یکنواخت هموار به دست می‌آوریم. این فصل کار جدید پژوهشی این پایان نامه است. و نهایتاً در فصل چهارم دو روش تکرار برای خانواده‌ای نامتناهی از نگاشت‌های غیرانبساطی ارائه داده و به تقریب نقطه‌ی ثابت آنها تحت شرایط داده شده می‌پردازیم.

منابع اصلی این پایان نامه مقالات زیر می‌باشد

[1] Y. Yao, A General iterative method for a finite family of nonexpansive mappings, Nonlinear Analysis 66(2007) 2676-2687.

[2] Y. Yao,Y. Lio, R. chen, Ageneral iterative method for an infinite family of nonexpansive mappings, Nonlinear Analysis 69(2008) 1644-1654.

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ مقدمات

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم H یک فضای هیلبرت حقیقی باشد، عملگر خطی و کراندار A را روی H قویاً مثبت گوییم هرگاه عدد $\bar{\gamma} > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in H$ $\quad \langle Ax, x\rangle \geq \bar{\gamma}\|x\|^2$

تعریف ۲.۱.۱ نگاشت T از H به H را غیرانبساطی نامیم هرگاه برای هر $x, y \in H$ داشته باشیم

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

تعریف ۳.۱.۱ یک انقباض روی H خودنگاشت f از H می‌باشد به طوری که

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\| \qquad x, y \in H$$

که در آن $\alpha \in [0, 1)$ عدد ثابتی است.

تعریف ۴.۱.۱ تابع پیوسته و اکیداً افزایشی $\phi : R^+ \to R$ را که $\phi(0) = 0$ و $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$، یک

تابع وزن [۱] می‌نامند.

فرض کنید X فضای باناخ حقیقی و X^* فضای دوگان X باشد، نگاشت $J : X \longrightarrow 2^{X^*}$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود، نگاشت دوگانی با تابع وزن ϕ می‌نامند

$$Jx = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle = \|x^*\|\|x\|, \|x^*\| = \phi(\|x\|)\}$$

نگاشت فوق خوش تعریف است زیرا طبق قضیه‌ی هان باناخ برای هر $x \in X$ وجود دارد $f \in X^*$ به طوری که $f(x) = \|x\|, \|f\| = 1$ حال کافیست قرار دهیم $x^* = f.\phi(\|x\|)$ دراین صورت به وضوح $x^* \in Jx$.

اگر تابع وزن به صورت $\phi(t) = t$ باشد، آن گاه J نگاشت دوگانی نرمال شده نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید X یک فضای خطی و تابع $F : M \subset X \to R$ داده شده باشد. مجموعه‌ی M محدب است اگر و فقط اگر برای هر $u, v \in M$ و $t \in [0, 1]$، $(1-t)u + tv \in M$ باشد. اگر M محدب باشد، در این صورت F محدب است اگر و فقط اگر

$$F((1-t)u + tv) \leq (1-t)F(u) + tF(v) \quad \forall u, v \in M, t \in (0, 1)$$

تعریف ۶.۱.۱ فضای باناخ X را به طور یکنواخت محدب نامیم هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متعلق به X که $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ و $\|x_n + y_n\| \to 2$، داشته باشیم $\|x_n - y_n\| \to 0$.

تعریف ۷.۱.۱ فضای برداری توپولوژیکی X را موضعاً محدب نامیم هرگاه یک پایه‌ی موضعی مانند β برای آن وجود داشته باشد به طوری که اعضای آن محدب باشند.

تعریف ۸.۱.۱ فضای باناخ X را اکیداً محدب نامیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ و $\|x\| = \|y\| = 1$ داشته باشیم:

[۱] Weight Function

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1 \qquad \forall \lambda \in (0,1)$$

اگر X یک فضای باناخ اکیداً محدب باشد و برای هر $x,y \in X$ و $\lambda \in (0,1)$ داشته باشیم

$$\|x\| = \|y\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|$$

آن گاه $x = y$ است.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری نرم دار باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در آن باشد. گوییم $\{x_n\}$ به طور ضعیف به $x \in X$ همگراست و می‌نویسیم $x_n \rightharpoonup x$ هرگاه برای هر $f \in X^*$، $f(x_n) \to f(x)$.

تعریف ۱۰.۱.۱ گوییم فضای باناخ X در شرط آپیال [۲] صدق می‌کند هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X که به طور ضعیف به $x \in X$ همگراست نامساوی

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

برای هر $x \neq y$ در X برقرار باشد.

لم ۱.۱.۱ اگر در فضای هیلبرت H، دنباله‌ی $\{x_n\}$ به طور ضعیف به x_0 همگرا باشد، در این صورت برای هر $x \neq x_0$ داریم:

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| > \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|$$

بنابراین می‌توان گفت فضای هیلبرت در شرط آپیال صدق می‌کند.

اثبات: می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= \|x_n - x_0 + x_0 - x\|^2 \\ &= \|x_n - x_0\|^2 + \|x_0 - x\|^2 + 2Re\langle x_n - x_0, x_0 - x\rangle \end{aligned}$$

و چون $x_n \rightharpoonup x_0$ بنابراین $\langle x_n - x_0, x_0 - x\rangle \to 0$ از طرفی چون

[۲] Opial's Condition

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 \geq \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|^2 + \|x_0 - x\|^2$$

و از آن جا که $x \neq x_0$، می توان نتیجه گرفت

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 > \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|^2$$

بنابراین $\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| > \liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|$

قضیه ۱.۱.۱ فضای باناخ X انعکاسی است اگر و فقط اگر گوی واحد بسته‌ی X به طور ضعیف فشرده باشد

اثبات: به‌صفحه‌ی ۱۳۲ از منبع [٦] مراجعه کنید.

قضیه ۲.۱.۱ (ابرلین —شمولیان[۳]) اگر X یک فضای باناخ و $A \subseteq X$ باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱) هر دنباله از عناصر A زیردنباله‌ای به طور ضعیف همگرا دارد.

۲) هر دنباله از عناصر A یک نقطه‌ی انباشتگی ضعیف دارد.

۳) A به طور ضعیف فشرده است.

نتیجه ۱.۱.۱ فضای باناخ X انعکاسی است اگر و فقط اگر هر دنباله‌ی کراندار در X، زیردنباله‌ای به طور ضعیف همگرا داشته باشد.

این مطلب با توجه به قضیه‌ی ۱.۱.۱ و با توجه به این که در قضیه‌ی ابرلین—شمولیان برای زیرمجموعه‌ی A از X، فشردگی ضعیف و فشردگی دنباله‌ای ضعیف معادلند به دست می آید.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید D زیرمجموعه‌ی بازی ازX باشد عملگر $F : D \longrightarrow Y$ را در x مشتق پذیر گاتو نامیم هرگاه عملگری در $L(X,Y)$ که آن را با $F'(x)$ نشان می‌دهیم موجود باشد به طوری که

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x+ty)-F(x)}{t} = F'(x)y \qquad \forall y \in X$$

[۳] Eberlein-Smulian