به نام خداوند بخشنده مهربان

همه‌ی امتیازات این پایان‌نامه به دانشگاه لرستان تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب آن در مجلات، کنفرانس‌ها یا سخنرانی‌ها، باید نام دانشگاه لرستان (یا استاد یا اساتید راهنمای پایان‌نامه) و نام دانشجو با ذکر منبع، ضمن کسب مجوز رسمی تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر اینصورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

دانشگاه لرستان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

تجزیه و تحلیل عددی مدل ریاضی تشکیل مویرگ در تومور رگزایی با استفاده از روش بدون شبکه‌ای

نگارنده:
امین شاه‌کرمی

اساتید راهنما:
دکتر بهمن غضنفری
دکتر مجید یاراحمدی

استاد مشاور:
دکتر ناصر عباسی

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
در زمینه ریاضی کاربردی

بهمن ۱۳۹۲

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

تقدیم به

پدر دلسوز

مادر مهربان

برادر عزیزتر از جانم

تشکر و قدردانی

خداوندا؛ آفریدی رایگان؛ روزی دادی رایگان، بیامرز رایگان، که تو خدایی نه بازرگان...

با تشکر از اساتید ارجمند دکتر بهمن غضنفری و دکتر مجید یاراحمدی که با صبر و شکیبایی خود، مرا در انجام این پایان‌نامه یاری فرمودند. از جناب دکتر ناصر عباسی بخاطر مشاوره های سودمندشان کمال تشکر را دارم. در آخر بوسه می زنم بر دستان پر مهر پدر و مادر بزرگوارم که در تمام مراحل زندگی پشتوانه محکمی برای من بوده‌اند.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

چکیده

نام خانوادگی: شاه‌کرمی **نام:** امین
عنوان پایان‌نامه: تجزیه و تحلیل عددی مدل ریاضی تشکیل مویرگ در تومور رگزایی با استفاده از روش بدون شبکه‌ای
اساتید راهنما: دکتر بهمن غضنفری، دکتر مجید یاراحمدی **استاد مشاور:** دکتر ناصر عباسی
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **محل تحصیل:** دانشگاه لرستان **دانشکده:** علوم پایه **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** ۱۳۹۲ **تعداد صفحه:** ۸۳
کلیدواژه ها: روش بدون شبکه‌ای، توابع پایه‌ای شعاعی، تشکیل مویرگ، تومور رگزایی
چکیده: در این پایان‌نامه، بعد از معرفی اجمالی از روش بدون شبکه‌ای، مدل ریاضی تومور رگزایی را بیان می‌کنیم، سپس آن را با تغییر متغییری جدید و تقریب گسسته سازی زمانی با مشتق کسری وزندار دو سطر زمانی حل کرده و همچنین در باره همگرایی آن بحث می‌نماییم. سپس به تحلیل مدل ریاضی مشتق کسری می‌پردازیم. در پایان، نتایج حاصل را با استفاده از نرم افزار متلب شبیه سازی کامپیوتری نموده‌ایم.

مقدمه

درسال ۲۰۰۱ ، لوین [۱] مدلی ریاضی برای تومور رگزایی ارایه داد. چندین روش مختلف عددی، برای تجزیه و تحلیل مدل ارایه شده، از جمله روشهایی مانند، روش خطوط ۱ توسط پاموک [۲] و روش تاو ۲ توسط سعادتمندی [۳] در سال ۲۰۰۸ . اخیرا عباسبندی [۴] نیز این معادله را به روش بدون شبکهای مبتنی بر توابع پایهای شعاعی، حل نموده است که در آن از تقریب گسسته سازی زمانی وزندار دو سطر زمانی استفاده شده است. در این پایاننامه، مدل کسری شده تومور رگزایی را با تغییر متغیری جدید و تقریب گسسته سازی زمانی کسری وزندار دو سطر زمانی حل نموده و آن را با نرم افزار متلب ۳ شبیه سازی کامپیوتری کرده و با مقایسه‌های عددی و همچنین رسم شکل، مشاهده خواهیم کرد که به روش کلاسیکارایه شده توسط عباسبندی [۴] همگراست.

فصل ۱
تعاریف و مقدمات اولیه

۱.۱ مقدمه

امروزه با پیشرفت علم، دانشمندان پی برده‌اند که قوانین حاکم بر بسیاری از پدیده‌های طبیعی را می‌توان به زبان ریاضی بیان نمود که این قوانین معمولا از روابط دیفرانسیلی و یا انتگرالی تبعیت می‌کنند. هر چند با وجود روشهایی تحلیلی، می‌توان جواب برخی از این معادلات را بدست آورد، اما در خیلی از موارد این کار دشوار و حتی گاهی عملا غیرممکن است. برای رفع چنین مشکلی، آن معادلات را با روشهای عددی حل می‌نمایند.

در این پایان‌نامه، در مورد یک معادله دیفرانسیل جزیی بحث می‌نماییم. این نوع معادلات را می‌توان به روشهای مرسومی مانند روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی و روشهایی از این قبیل حل نمود که در همه‌ی این روش ها معادلات، بعد از تشکیل یک شبکه حاصل از وابستگی یک نقطه به نقاطی در یک یا چند سطر که نقاط بدست آمده از شرایط آغازین و مرزی با پراکندگی یکنواخت بروی دامنه‌ای منظم، بصورت تقریبی حل می‌شوند.

۲.۱ تعاریف و مقدمات اولیه

در این بخش، چند تعریف و قضیه مقدماتی که در این فصل و فصل‌های بعدی به آن نیاز داریم را بیان می‌نماییم. این تعاریف و قضایای مقدماتی از مراجع [۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹] گرفته شده‌اند.

تعریف ۱.۲.۱. یک متریک (یا فاصله) روی مجموعه‌ی ناتهی X، تابعی مانند

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$

است هرگاه

(۱) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) \geq 0$.

(۲) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$.

(۳) برای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$.

(۴) برای هر $x, y, z \in X$، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

هرگاه d یک متر روی X باشد، آنگاه زوج مرتب (X,d) را یک فضای متریک می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

را یک گوی باز به مرکز x و با شعاع $r > 0$ در فضای متریک (X,d) می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. $x \in X$ را یک نقطه بستار زیرمجموعه $A \subseteq X$ می‌نامیم هرگاه هر گوی باز به مرکز x، شامل حداقل یک عنصر از A باشد؛ به عبارتی، برای هر $r > 0$، $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

مجموعه تمام نقاط بستار A را با $\bar{A}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. زیرمجموعه‌ی $A \subseteq X$ را در فضای متریک (X, d) چگال گوییم هرگاه $\bar{A} = X$.

تعریف ۵.۲.۱. دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک[۱] (X, d)، همگرا (به $x \in X$) گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n_0 موجود باشد بطوریکه $n \geq n_0$، $d(x_n, x) < \epsilon$ را ایجاب کند.

تعریف ۶.۲.۱. دنباله $\{x_n\}$ را در فضای متریک (X, d) کوشی گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n_0 موجود باشد بطوریکه $n, m \geq n_0$، $d(x_n, x_m) < \epsilon$ را نتیجه دهد.

هر دنباله همگرا، یک دنباله کوشی است ولی عکس این مطلب لزوما برقرار نیست.

تعریف ۷.۲.۱. فضای متریک (X, d) را فضایی کامل گوییم هرگاه در آن فضا هر دنباله کوشی یک دنباله همگرا باشد.

تعریف ۸.۲.۱. تابع $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ بین دو فضای متریک (X, d) و (Y, ρ) را در نقطه $a \in X$ پیوسته گوییم هرگاه برای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد بطوریکه $d(x, a) < \delta$ رابطه $\rho(f(x), f(a)) < \epsilon$ را ایجاب کند.

تابع f را بر $\Omega \subseteq X$ پیوسته گوییم هرگاه در تمام نقاط Ω پیوسته باشد. گردایه همه توابع حقیقی پیوسته روی $\Omega \subseteq X$ را با نماد $C(\Omega)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. تابع $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ بین دو فضای متریک (X, d) و (Y, ρ) را طولپا می نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ رابطه‌ی $\rho(f(x), f(y)) = d(x, y)$ برقرار باشد.

واضح است که هر طولپا بین دو فضای متریک، تابعی پیوسته (بر X) است.

[۱] هر تابع از $\mathbb{N}$ به X را یک دنباله در فضای متریک (X, d) می‌گوییم و اعضای برد آن را به ازای هر n با x_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فضای متریک (Y,ρ) را یک فضای تکمیل شده فضای متریک (X,d) گوییم چنانچه طولپایی مانند $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ وجود داشته باشد که $f(X)$ در Y چگال باشد.

قضیه ۱۱.۲.۱. *هر فضای متریک، فضای تکمیل شده یکتا دارد.*

تعریف ۱۲.۲.۱. مجموعه X را یک فضای برداری روی R[1] گوییم هرگاه اعمال دوتایی

$$+:X\times X\to X$$

و

$$.^{2}:\mathrm{R}\times X\to X$$

بقسمی موجود باشند که شرایط زیر برقرار باشند.

(۱) برای هر $x,y,z\in X$، $(x+y)+z=x+(y+z)$.

(۲) عنصر 0 در X موجود باشند بطوریکه برای هر $x\in X$، $x+0=0+x=x$.

(۳) برای هر $x\in X$، عضو $-x\in X$ موجود است بطوریکه $x+(-x)=(-x)+x=0$.

(۴) برای هر $x,y\in X$، $x+y=y+x$.

(۵) برای هر $x\in X$، $1x=x$.

(۶) برای هر $x\in X$ و هر $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$، $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$.

(۷) برای هر $x,y\in X$ و هر $\alpha\in\mathrm{R}$، $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

[1] یا برای راحتی همان فضای برداری

[2] این ضرب، ضرب اسکالر "Scalar product" نام دارد. برای راحتی، بجای $\alpha.x$ از نماد αx استفاده می‌کنیم.

(۸) برای هر $x \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$، $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

تعریف ۱.۲.۱۳. تابع حقیقی $\|.\|_X : X \to \mathrm{R}$ را روی فضای برداری X نرم گوییم هرگاه

(۱) برای هر $x \in X$، $\|x\|_X \geq 0$.

(۲) برای هر $x \in X$، $\|x\|_X = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(۳) برای هر $x \in X, \alpha \in \mathrm{R}$، $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X$.

(۴) برای هر $x, y \in X$، $\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$.

هرگاه $\|.\|_X$ یک نرم روی فضای برداری X باشد، آنگاه $d(x,y) = \|x-y\|_X$ یک متر روی X تعریف می‌کند که به آن متر القایی توسط نرم می‌گوییم.

تعریف ۱.۲.۱۴. فضای نرمدار X با نرم $\|.\|_X$ را یک فضای باناخ گوییم هرگاه متر القایی توسط نرم، در X کامل باشد.

تعریف ۱.۲.۱۵. فرض کنیم X یک فضای برداری روی R باشد. دراینصورت تابع

$$T : X \to \mathrm{R}$$

را تابعک خطی گوییم اگر برای هر $X, Y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$، رابطه

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

برقرار باشد.

تابعک خطی T را روی فضای نرمدار X کراندار گوییم هرگاه مقدار

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_{\mathrm{R}} : \|x\|_X = 1\}$$

متناهی باشد. در غیر اینصورت تابعک خطی T را بیکران گوییم.

قضیه ۱۶.۲.۱. *برای هر تابعک خطی روی یک فضای نرمدار، پیوسته بودن و کراندار بودن معادل است.*

گردایه همه‌ی توابع خطی و پیوسته از فضای نرمدار X به R که X را با X^* نمایش می‌دهیم. $\|T\|$، یک نرم روی X^* تعریف می‌کند.

قضیه ۱۷.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. دراینصورت X^* نیز یک فضای نرمدار باناخ است.*

قضیه ۱۸.۲.۱. *فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. دراینصورت برای هر $x \in X$، تابعک خطی $f \in X^*$ وجود دارد بطوریکه $\|f\|_{X^*} = ۱$ و $\|x\|_X = f(x)$.*

هرگاه X یک فضای نرمدار باشد، بنا به ۱۷.۲.۱، X^{**} که دوگان دوم X نامیده و بصورت $X^{**} = (X^*)^*$ تعریف می‌کنیم، یک فضای باناخ خواهد بود. فرض کنیم $x \in X$، آنگاه برای هر $f \in X^*$ تعریف می‌کنیم $\delta_x(f) = f(x)$. ازاینرو

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|.\|x\|$$

پس $\|\delta_x\| \leq \|x\|$. از طرف دیگر بنا به ۱۸.۲.۱، $f \in X^*$ هست که $\|f\| = ۱$. در نتیجه

$$\|x\| = f(x) = |\delta_x(f)| \leq \|\delta_x\|$$

بنابراین $\|\delta_x\| = \|x\|$. لذا نگاشت $x \longmapsto \delta_x$ یک طولپای خطی از X به X^{**} است که آن را نشانده طبیعی می‌نامیم.

تعریف ۱۹.۲.۱. تابع حقیقی $<.,.>_X: X \times X \to \mathrm{R}$ را روی فضای برداری X ضرب داخلی گوییم هرگاه

(۱) برای هر $x \in X$، $<x,x>_X \geq 0$.

(۲) برای هر $x \in X$، $<x,x>_X = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(۳) برای هر $x,y \in X$، $<x,y>_X = <y,x>_X$.

(۴) برای هر $x,y,z \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$،

$$< \alpha x + \beta y, z >_X = < \alpha x, z >_X + < \beta y, z >_X .$$

اگر $<.,.>_X$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری X باشد، آنگاه $\|x\|_X = \sqrt{<x,x>_X}$ یک نرم تعریف می‌کند که به آن نرم القایی توسط ضرب داخلی می‌گوییم.

تعریف ۲۰.۲.۱. هر فضای برداری که تحت نرم القا شده توسط ضرب داخلی تعریف شده روی آن فضا، کامل باشد را فضای هیلبرت می‌نامیم.

قضیه ۲۱.۲.۱ (کوشی-شوارتس[۱]). *برای هر دو بردار x,y در یک فضای هیلبرت داریم*

$$| < x, y >_X | \leq \|x\|_X \|y\|_X.$$

قضیه ۲۲.۲.۱. *تکمیل شده‌ی هر فضای هیلبرت، فضایی هیلبرت است.*

بینهایت که با نماد ∞ نشان داده می شود، یک مفهوم تعریف نشده در ریاضیات است و می توان آن را بصورت $\ll$ چیزی از هر عدد طبیعی بزگتر $\gg$ در نظر گرفت. با این تفاسیر، دستگاه

[۱] Couchy-Schwarz's theorem

توسعه یافته اعداد حقیقی را بصورت $\mathrm{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ تعریف کرده و با نماد R^* نشان می‌دهیم، یعنی $\mathrm{R}^* = \mathrm{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ و همچنین $[۰,\infty] = [۰,\infty)\cup\{\infty\}$.

اگر X یک مجموعه باشد، آنگاه گردایه همه‌ی زیرمجموعه‌های آن مجموعه را با نماد $P(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{S}\subseteq P(X)$. دراینصورت $\mathcal{S}$ را یک $\sigma-$جبر روی X می‌نامیم هرگاه

(۱) نسبت به اشتراک متناهی بسته باشد، یعنی برای هر $A_۱,\dots,A_n$ متعلق به $\mathcal{S}$،

$$A_۱\cap A_۲\cap\cdots\cap A_n$$

متعلق به $\mathcal{S}$ باشد.

(۲) نسبت به متمم بسته باشد، یعنی برای هر A متعلق به $\mathcal{S}$،

$$A^c = X\setminus A$$

متعلق به $\mathcal{S}$ باشد.

(۳) نسبت به اجتماع شمارا بسته باشد، یعنی برای هر دنباله از اعضای $\mathcal{S}$ مانند $\{A_n\}$،

$$\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$$

متعلق به $\mathcal{S}$ باشد.

واضح است که برای هر $\sigma-$جبر روی X، مانند $\mathcal{S}$، $\emptyset, X\in\mathcal{S}$. همچنین اگر $X=\mathrm{R}^n$ و $\mathcal{S}\subseteq\mathrm{R}^n$، $\sigma-$جبر بوجود آمده توسط گوی‌های باز باشد، آنگاه $\mathcal{S}$ را $\sigma-$جبر بورل[۱] می‌نامیم.

[۱] Borel