

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

ایجاد و کنترل مواد چپگرد با استفاده از میدان های لیزری

سمیه تاران

استاد راهنما
دکتر محمد محمودی

مهر ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

قدردانی

با سپاس به درگاه الهی

از استاد محترم و معلم بلند پایه خود جناب آقای دکتر محمد محمودی که در طی مراحل تحقیق و تدوین این رساله همراه و راهنمای من بودند و مطالب بسیار ارزنده‌ای را در عرصه علم و زندگی به من آموختند نهایت امتنان را دارم.

از دوستان صمیمی‌ام که کشف‌های ارزنده‌ای در این روزگار بوده‌اند هم به خاطر تمام روزهایی که یار من بودند و در کنارم ممنونم.

از داوران محترم جناب آقای دکتر درونه و جناب آقای دکتر نجاری از این که داوری این پایان نامه را تقبل کردند کمال تشکر را دارم.

در پایان امیدوارم که این رساله آن چنان که شایسته است برای حل فن سودمند باشد.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا ضریب شکست یک سیستم چهار ترازوی مورد بررسی قرار گرفته است. با اعمال سه میدان لیزری یک سیستم حلقه بسته تشکیل شده و باعث شده است که خواص اپتیکی سیستم به فاز نسبی وابسته باشد. با استفاده از فاز نسبی میدان‌های اعمالی، ضریب شکست در حالت ساکن و در حالت حضور پهن شدگی دوپلری مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که در حالت ساکن سیستم دارای ضریب شکست منفی است که با حضور پهن شدگی دوپلری این ضریب شکست منفی حذف می‌شود.

سپس یک سیستم سه ترازوی کایرال حلقه-بسته با دو میدان اعمالی، مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که می‌توان با استفاده از کنترل فازی ضریب شکست را از مثبت به منفی کلید زنی کرد که سیستم با تغییر فاز نسبی میدان‌های اعمالی از محیط با ضریب شکست مثبت به محیط با ضریب شکست منفی تبدیل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ضریب شکست منفی، مواد چپگرد، گذردهی الکتریکی، پذیرفتاری مغناطیسی، مواد کایرال.

فهرست مطالب

پ	لیست تصاویر
ج	مقدمه
۱	۱ برهم کنش نور با ماده
۲	۱.۱ نظریه کلاسیکی
۵	۲.۱ نظریه نیمه کلاسیک
۶	۱.۲.۱ هامیلتونی سیستم
۷	۲.۲.۱ معادلات ماتریس چگالی
۱۱	۲ مواد با ضریب شکست منفی
۱۱	۱.۲ مواد چپگرد یا متامواد
۱۲	۱.۱.۲ ضریب شکست مواد
۱۳	۲.۱.۲ معکوس شدن بردار موج
۱۵	۳.۱.۲ تقسیم بندی مواد بر اساس علامت ϵ و μ و نحوه ی انتشار موج
۱۵	۴.۱.۲ انتشار موج در مواد با ضریب شکست منفی
۱۷	۵.۱.۲ قانون اسنل در ضریب شکست منفی
۱۹	۶.۱.۲ اثر دوپلر معکوس
۱۹	۷.۱.۲ سرعت فاز، گروه و انتشار انرژی

۱۹	۸.۱.۲	عدسی کامل
۲۳	۳	بررسی ضریب شکست سیستم چهار ترازی
۲۳	۱.۳	معرفی سیستم اتمی و معادلات ماتریس چگالی
۲۷	۲.۳	بررسی ضریب شکست محیط
۲۸	۱.۲.۳	رسم نمودارهای گذردهی الکتریکی و مغناطیسی و ضریب شکست
۲۹	۳.۳	نقش پهن شدگی دوپلری بر ضریب شکست منفی
۲۹	۱.۳.۳	اثر دوپلر در سیستم سه ترازی
۳۳	۲.۳.۳	بررسی ضریب شکست نسبت به فاز نسبی میدان‌های اعمالی
۳۷	۴	بررسی ضریب شکست در سیستم سه ترازی کایرال
۳۷	۱.۴	مقدمه‌ای بر مواد کایرال
۳۷	۱.۱.۴	ضریب شکست در مواد کایرال
۳۹	۲.۴	سیستم سه ترازی کایرال
۳۹	۱.۲.۴	مدل سیستم اتمی و معادلات ریاضی
۴۴	۲.۲.۴	کنترل فازی ضریب شکست از منفی به مثبت
۴۶	۳.۲.۴	بررسی ضریب شکست برای پارامترهای مختلف
۵۰		مراجع

لیست تصاویر

- ۱.۱ سیستم سه ترازی Λ با دو میدان کاوشگر و جفت کننده ۵
- ۱.۲ شکل سمت راست دستگاه \vec{E} ، \vec{H} و \vec{K} راستگرد و شکل سمت چپ دستگاه \vec{E} ، \vec{H} و \vec{K} چپگرد است. ۱۴
- ۲.۲ تقسیم بندی مواد براساس ویژگی های الکتریکی و مغناطیسی. در ناحیه ۱ و ۳ امواج می توانند درون این مواد انتشار یابند. در ناحیه ۲ و ۴ امواج درون این مواد ناپایدارند و به صورت نمایی افت پیدا می کنند. [۱۲] ۱۶
- ۳.۲ عبور نور در مرز بین دو محیط با ضریب شکست مثبت و منفی ۱۸
- ۴.۲ عدسی وسلاگو که شامل یک تیغه از NIM با ضخامت d است. ضریب شکست این تیغه ۱- است [۱۲]. ۲۱
- ۱.۳ مدل اتمی سیستم چهار ترازی با میدان های دمشی، جفت کننده و کاوشگر ۲۴
- ۲.۳ نمودارهای گذردهی الکتریکی و پذیرفتاری مغناطیسی با پارامترهای $\gamma_{۳۲} = \gamma_{۳۱} = ۱$ ، $\Omega_s = ۲\gamma_{۳۱}$ ، $\Omega_m = ۰/۰۱\gamma_{۳۱}$ ، $\Omega_p = ۰/۰۱\gamma_{۳۱}$ ، $\gamma_{۳۴} = ۰/۱۳\gamma_{۳۱}$ ، $\lambda = ۷۵۹nm$ ، $\Delta_s = ۰/۵\gamma_{۳۱}$ و $\Delta_c = -۰/۵\gamma_{۳۱}$ ، $\Omega_c = ۲/۲۵\gamma_{۳۱}$ ، $N = ۵ \times ۱۰^{۲۴}$ و $\Delta_m = ۰/۵\gamma_{۳۱}$ برحسب نامیزانی میدان کاوشگر Δ_p ۲۹
- ۳.۳ نمودار ضریب شکست با استفاده از پارامترهای به کار برده شده برای شکل ۲.۳. ۳۰
- ۴.۳ یک سیستم Λ با دو میدان کاوشگر و جفت کننده. ۳۰

- ۵.۳ زاویه تقاطع بین پرتو کاوشگر وجفت کننده است. جهت انتشار اتم‌ها در محیط زاویه α دارد. چارچوب مختصات موازی و عمود بر نیمساز پرتوهای کاوشگر و جفت کننده می‌باشند [۲۶]. ۳۱
- ۶.۳ قسمت حقیقی گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی برحسب فاز نسبی میدان‌های اعمالی در حالت ساکن اتمی. ۳۴
- ۷.۳ قسمت حقیقی گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی برحسب فاز نسبی میدان‌های اعمالی در حضور پهن شدگی دوپلری. ۳۶
- ۱.۴ مدل سیستم سه ترازوی حلقه بسته با دو میدان جفت کننده و کاوشگر ۴۰
- ۲.۴ قسمت‌های حقیقی و موهومی ضریب شکست منفی n نسبت به فاز نسبی φ پارامترها: $\gamma_3 = 10^{-2} \gamma_1$ ، $\Omega_c = \gamma_1 e^{i\varphi}$ ، $\Delta_c = 0$ ، $\Delta_p = 4 \times 10^{-3} \gamma_1$ ، ۴۵
- ۳.۴ قسمت‌های حقیقی و موهومی ضریب شکست منفی n نسبت به نامیزانی میدان کاوشگر Δ_p به ازای $\gamma_3 = 10^{-3} \gamma_1$ (خط)، $\gamma_3 = 10^{-2} \gamma_1$ (خط چین)، $\gamma_3 = 10^{-1} \gamma_1$ (نقطه چین) و $\Omega_c = 10^{-2} \gamma_1$ (نقطه خط). $N = 10^{27}$ ، $\mu_{cb}/c = 10^{-2} \times d_{ab}$ ، $d_{ab} = 1/2 \times 10^{-31}$ ، $\Delta_m = -\Delta_p$ ۴۷
- ۴.۴ قسمت‌های حقیقی و موهومی ضریب شکست منفی n نسبت نامیزانی میدان کاوشگر Δ_p برای $N = 0.5 \times 10^{27}$ و $\Omega_c = 10^{-2} \gamma_1$ (خط)، $N = 0.5 \times 10^{27}$ و $\Omega_c = 5 \times 10^{-2} \gamma_1$ (خط چین) و $N = 1 \times 10^{27}$ (خط چین) $\Omega_c = 5 \times 10^{-2} \gamma_1$ ۴۷
- دیگر پارامترها با شکل ۲.۴ یکسان است. ۴۷

۵.۴ قسمت‌های حقیقی و موهومی ضریب شکست منفی n نسبت نامیزانی میدان کاوشگر

$$\Delta_p \text{ برای } \varphi = -\pi/2, \varphi = -\pi/4, \varphi = 0, \varphi = \pi/2, \varphi = \pi/4$$

$$N = 0.5 \times 10^{27}, \gamma_3 = 0.5\gamma_1, \Omega_c = 0.5\gamma_1 \text{ دیگر پارامترها با شکل ۲.۴}$$

۴۸ یکسان است.

۶.۴ قسمت‌های حقیقی و موهومی ضریب شکست منفی n نسبت نامیزانی میدان کاوشگر

$$\Delta_p \text{ برای } \varphi = \pi/2, \varphi = 5\pi/6, \varphi = \pi, \varphi = 4\pi/3, \varphi = 3\pi/2$$

$$N = 0.5 \times 10^{27}, \Omega_c = 0.5\gamma_1, \gamma_3 = 0.001\gamma_1 \text{ دیگر پارامترها با شکل}$$

۴۹ ۲.۴ یکسان است.

مقدمه

یکی از راه‌های بررسی خواص اپتیکی مواد، شناخت و بررسی ضریب شکست آن‌ها می‌باشد. ضریب شکست یک ماده، نسبت سرعت فازی نور در خلاء به سرعت آن در ماده است. تا چندی پیش مردم به مواد با ضریب شکست مثبت توجه داشتند و آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دادند. اما در سال ۱۹۶۷ وسلایگوی^۱ روسی نظریه منفی شدن ضریب شکست نور را مطرح کرد و اثبات کرد که با منفی شدن هم‌زمان بخش حقیقی ضرایب گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی در یک فرکانس خاص، بخش حقیقی ضریب شکست فازی ماده منفی می‌شود [۱]. این موضوع با این‌که ایده جالبی بود به دلیل دور از ذهن بودن ساخت چنین موادی از استقبال چندانی مواجه نشد. این روند تا سال ۱۹۹۰ ادامه داشت تا این‌که پندری^۲ در سال ۱۹۹۶ موفق شد آرایه‌ای بسازد که ضریب گذردهی آن در تابش با فرکانس‌های گیگا هرتز، منفی می‌شود [۲]. مطابق نظریه وسلایگو برای ساخت مواد با ضریب شکست منفی، منفی شدن گذردهی الکتریکی به تنهایی کافی نبود. لذا در سال ۱۹۹۹ پندری توانست آرایه‌ای بسازد که در اثر تابش امواج با فرکانس گیگا هرتز، ضریب تراوایی مغناطیسی منفی شود [۳]. در سال ۲۰۰۰ اسمیت^۳ و همکارانش توانستند با ترکیب دو آرایه‌ی پیشنهادی پندری آرایه‌ای را بسازند که بخش حقیقی ضریب شکست فازی آن برای تابش در محدوده گیگا هرتز، منفی شود [۴]. بعد از این واقعه مواد با ضریب شکست منفی پا به عرصه وجود نهادند و سبب کشف و به‌وجود آمدن ایده‌های جدید و جالب مانند موج‌برها [۵، ۶]، تشدیدگرها [۷] و ابزار نامرئی کردن [۸] شدند.

در فصل اول ابتدا یک مثال ساده نظریه کلاسیک مورد بررسی قرار گرفته سپس نظریه نیمه کلاسیک، برای یک سیستم سه ترازی Λ مطرح شده است. در فصل دوم توضیح مختصری از مواد چپگرد^۴ ارائه شده و اثرات آن بر ضریب شکست، انتشار موج، سرعت فاز و گروه، قانون اسنل و اثر دوپلر بررسی شده است. در انتهای فصل نیز یک مثال ساده مطرح شده است. در فصل سوم یک سیستم چهار ترازی در نظر گرفته شده و نمودارهای گذردهی الکتریکی، تراوایی مغناطیسی و ضریب شکست رسم شده

^۱ Veselago

^۲ Pendry

^۳ Smith

^۴ Left Handed Material (LHM)

است. در بخش بعدی این فصل ضریب شکست سیستم در حالت ساکن اتمی و در حضور پهن شدگی دوپلری مورد بررسی قرار گرفته شده است. در فصل آخر یک سیستم سه ترازی در ماده کایرال با دو میدان در نظر گرفته شده است که با استفاده از کنترل فازی می‌توان این سیستم را از مواد چپگرد به مواد راستگرد تبدیل کرد. در انتهای فصل نیز نمودار ضریب شکست این سیستم، به ازای تغییر برخی از پارامترها مورد بررسی قرار گرفته شده است.

فصل ۱

برهم کنش نور با ماده

برهم کنش نور با ماده از مهم ترین مباحث اپتیک کوانتومی می باشد که امروزه مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است. با بررسی چگونگی برهم کنش نور با ماده می توان تابش نور از مواد، حرکت یونها تحت تاثیر میدان، چگونگی حرکت مولکول های مواد مغناطیسی تحت اثر میدان مغناطیسی، ضریب شکست مواد و بسیاری موارد دیگر را مورد بحث قرار داد. سه روش متفاوت برای بررسی برهم کنش نور با ماده وجود دارد. در روش اول اتم به صورت دوقطبی در نظر گرفته می شود که با امواج الکترومغناطیسی دارای انرژی پیوسته برهم کنش می کند و این برهم کنش از قوانین کلاسیکی و معادلات ماکسول پیروی می کند بنابراین به آن نظریه کلاسیکی گفته می شود.

در روش دوم اتم به صورت یک هسته و تعدادی الکترون در ترازهای گسسته در نظر گرفته می شود و با میدان الکترومغناطیسی که انرژی پیوسته دارد برهم کنش می کند. این روش نظریه شبه کلاسیکی نامیده می شود.

در روش سوم که نظریه کاملاً کوانتومی نامیده می شود اتم با ترازهای گسسته انرژی با فوتون های میدان مغناطیسی برهم کنش می کنند.

۱.۱ نظریه کلاسیکی

مدل درود-لورنتس یک مدل کلاسیکی ساده‌ای از برهم‌کنش نور با ماده می‌باشد. در این مدل الکترون‌ها و یون‌ها به صورت یک نوسانگر هماهنگ که میرا هستند در نظر گرفته می‌شود که برای هر یک نیروی میرانده‌ای متناسب با سرعت در نظر گرفته شده است. معادله حرکت کلاسیک را برای نوسانگر یک بعدی میرای واداشته به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + G \frac{dx}{dt} + Cx = eE_m \quad (1.1)$$

یا

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = e \frac{E_m}{m} \quad (2.1)$$

که e و m بار و جرم ذره و E_m میدان مولکولی می‌باشد. G ضریب میرا کننده است که $\gamma = \frac{G}{m}$ از بعد فرکانس می‌باشد. C ثابت نیرو و ω_0 فرکانس طبیعی مربوط به نوسانگر نامیرا هستند. در حالت ایستا x به t بستگی ندارد بنابراین معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$\omega_0^2 x = \frac{eE_m}{m} \quad (3.1)$$

از قانون گاوس داریم:

$$\frac{(ze)(zex^3/R_0^3)}{4\pi\epsilon_0 x^2} = zeE_m \quad (4.1)$$

با استفاده از روابط ۳.۱ و ۴.۱ داریم:

$$\omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R_0^3} \quad (5.1)$$

می‌توان فرض کرد که E_m به میدان الکتریکی موج E و قطبش P مربوط می‌شود:

$$E_m = E + \frac{\nu}{\epsilon_0} P \quad (6.1)$$

که برای فلزات $\nu = 0$ و برای دی‌الکتریک همسانگرد غیر قطبی $\nu = 1/3$ می‌باشد. E_m و p را مانند E به‌طور سینوسی وابسته به زمان و مکان در نظر گرفته می‌شود:

$$E_m = \hat{E}_m e^{-i(\omega t - kr)} \quad (7.1)$$

از آن‌جا که طول موج $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ در مقایسه با ابعاد اتمی بسیار بزرگ است می‌توان از تقریب دو قطبی الکتریکی استفاده کرد بنابراین از تغییرات مکانی E_m در ناحیه مکان‌های ذره چشم‌پوشی کرده در نتیجه k برابر صفر می‌شود در نتیجه E_m به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E_m = \hat{E}_m e^{-i\omega t} \quad (8.1)$$

بنابراین جواب‌های حالت پایای معادله ۲.۱ با جاگذاری زیر

$$x = \hat{x} e^{-i\omega t} \quad (9.1)$$

و تعیین دامنه مجهول به‌دست می‌آید:

$$\hat{x} = \frac{eE_m/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (10.1)$$

دامنه حرکت ذره با میدان واداشته متناسب و به ازای $\omega = \omega_0$ خیلی بزرگ است. که به این حالت، حالت تشدید گفته می‌شود. چگالی قطبش P به صورت زیر با جابه‌جایی متناسب است:

$$P = Ne x \quad (11.1)$$

که N چگالی اتمی می‌باشد. برای محیط خطی رابطه زیر برقرار است:

$$P = \chi E \quad (12.1)$$

که

$$\chi = \varepsilon - \varepsilon_0 \quad (13.1)$$

از معادلات ۱۰.۱ تا ۱۲.۱ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\chi E = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E_m \quad (14.1)$$

از معادله ۶.۱ و ۱۲.۱ می‌توان نوشت:

$$E_m = (1 + \nu\chi/\epsilon_0)E$$

بنابراین

$$\frac{\chi}{1 + \nu\chi/\epsilon_0} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (15.1)$$

از معادله ۱۳.۱ می‌توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$\chi = \epsilon(K - 1) \quad (16.1)$$

ثابت دی‌الکتریک بدون بعد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{K - 1}{1 + \nu(K - 1)} = \frac{Ne^2/\epsilon_0 m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (17.1)$$

با قرار دادن $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$ (که فرکانس پلاسما نامیده می‌شود) در معادله ۱۷.۱ می‌توان نوشت:

$$\frac{K - 1}{1 + \nu(K - 1)} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (18.1)$$

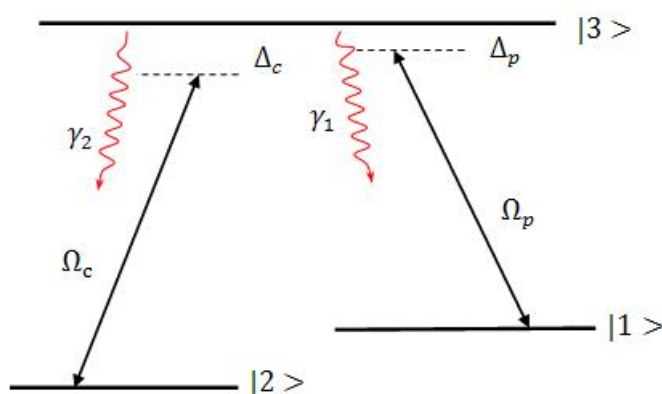
رابطه ۱۸.۱ رابطه‌ی بین ثابت دی‌الکتریک ماکروسکوپی K و خواص میکروسکوپی ذرات باردار تشکیل دهنده محیط می‌باشد. در این رابطه مشاهده می‌شود که K مختلط و وابسته به فرکانس است که دو ویژگی مهم این نتیجه می‌باشد. یک مدل ساده را می‌توان در نظر گرفت که در آن محیط پاشنده و رسانا فرض شده است، با انجام یک سری محاسبات ثابت دی‌الکتریک به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{K} - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad (19.1)$$

که در رابطه بالا قسمت موهومی جذب و قسمت حقیقی پاشندگی محیط را نشان می‌دهد [۹].

۲.۱ نظریه نیمه کلاسیک

همان‌طور که در ابتدای فصل بیان شد در نظریه نیمه کلاسیک اتم، به صورت یک هسته و تعدادی الکترون در ترازهای گسسته که با میدان کلاسیکی برهم‌کنش می‌کند در نظر گرفته می‌شود. برای این منظور یک سیستم ساده سه تراز به صورت Λ در نظر گرفته می‌شود که دارای یک تراز



شکل ۱.۱: سیستم سه تراز Λ با دو میدان کاوشگر و جفت کننده

تحریکی $|3\rangle$ و دو تراز پایه $|1\rangle$ و $|2\rangle$ می‌باشد. دو میدان لیزری ترازهای $|1\rangle$ و $|2\rangle$ را به تراز $|3\rangle$ کوپل می‌کند. یک میدان قوی با فرکانس ω_c و دامنه \vec{E}_c به گذار $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ با فرکانس ω_{32} و یک میدان لیزری کاوشگر ضعیف با فرکانس زاویه‌ای قابل تنظیم ω_p و دامنه \vec{E}_p به گذار $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ اعمال شده است. فرض بر این است که سیستم بسته است بنابراین از واهلش خودبه‌خودی $|1\rangle$ و $|2\rangle$ و $|3\rangle$ به سایر ترازها صرف‌نظر شده است. گسیل خودبه‌خودی از تراز $|3\rangle$ به ترازهای $|1\rangle$ و $|2\rangle$ به ترتیب با γ_1 و γ_2 نشان داده شده‌اند.

۱.۲.۱ هامیلتونی سیستم

هامیلتونی سیستم در تصویر شرودینگر به صورت $H = H_0 + H_I$ است، که H_0 هامیلتونی مختل نشده و H_I هامیلتونی برهم‌کنش سیستم با میدان می‌باشد.

$$H_0 = \hbar\omega_1|1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2|2\rangle\langle 2| + \hbar\omega_3|3\rangle\langle 3| \quad (20.1)$$

$$H_I = -e\vec{r}\cdot\vec{E}(t) \quad (21.1)$$

میدان الکترومغناطیسی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\vec{E} = \vec{E}_p e^{-i(\omega_p t + \vec{k}\cdot\vec{r})} + \vec{E}_c e^{-i(\omega_c t + \vec{k}\cdot\vec{r})} + C.C. \quad (22.1)$$

فرض بر این است که طول موج میدان‌های برهم‌کنش از ابعاد اتمی بزرگتر باشد [۱۰]، بنابراین می‌توان از تقریب دوقطبی الکتریکی استفاده کرد و $\vec{k}\cdot\vec{r}$ را از معادله ۲۲.۱ حذف کرد. عناصر ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$H_{I31} = -e\langle 3|\vec{r}|1\rangle\vec{E}_p(t)$$

$$H_{I32} = -e\langle 3|\vec{r}|2\rangle\vec{E}_c(t)$$

$$H_{I33} = H_{I22} = H_{I11} = H_{I21} = 0 \quad (23.1)$$

هامیلتونی کل سیستم در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H = e^{iH_0 t/\hbar} H_I e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (24.1)$$

با قرار دادن روابط ۲۲.۱ و ۲۳.۱ در رابطه ۲۴.۱، عناصر ماتریس را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{r}_1} &= -\vec{d}_{\mathfrak{r}_1} \cdot (\vec{E}_p e^{-i(\omega_p - \omega_{\mathfrak{r}_1})t} + \vec{E}_p^* e^{i(\omega_p + \omega_{\mathfrak{r}_1})t}) \\ H_{\mathfrak{r}_2} &= -\vec{d}_{\mathfrak{r}_2} \cdot (\vec{E}_c e^{-i(\omega_c - \omega_{\mathfrak{r}_2})t} + \vec{E}_c^* e^{i(\omega_c + \omega_{\mathfrak{r}_2})t}) \end{aligned} \quad (25.1)$$

که ممان دوقطبی‌های $d_{\mathfrak{r}_1}$ و $d_{\mathfrak{r}_2}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{r}_1} &= e \langle \mathfrak{r} | \vec{r} | 1 \rangle \\ d_{\mathfrak{r}_2} &= e \langle \mathfrak{r} | \vec{r} | 2 \rangle \end{aligned} \quad (26.1)$$

می‌توان از تقریب موج چرخان و تعریف فرکانس رابی به صورت $\Omega_c = \frac{\vec{d}_{\mathfrak{r}_2} \cdot \vec{E}_c}{\hbar}$ و $\Omega_p = \frac{\vec{d}_{\mathfrak{r}_1} \cdot \vec{E}_p}{\hbar}$ استفاده کرد و معادلات بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{r}_1} &= -\hbar \Omega_p e^{-i\Delta_p t} \\ H_{\mathfrak{r}_2} &= -\hbar \Omega_c e^{-i\Delta_c t} \end{aligned} \quad (27.1)$$

که $\Delta_c = \omega_c - \omega_{\mathfrak{r}_2}$ و $\Delta_p = \omega_p - \omega_{\mathfrak{r}_1}$ نامیزانی میدان‌های اعمالی می‌باشد.

۲.۲.۱ معادلات ماتریس چگالی

برای هر سیستم فیزیکی یک بردار حالت تعریف می‌شود (مانند $|\psi\rangle$)، که برای دریافت اطلاعات موجود در سیستم باید مقدار چشم‌داشتی عملگر موردنظر را محاسبه کرد.

$$\langle O_Q \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle \quad (28.1)$$

اگر $|\psi\rangle$ ناشناخته باشد و فقط احتمال این که سیستم در حالت $|\psi\rangle$ است، مشخص باشد (P_ψ)، در این صورت باید متوسط گیری آنسامبلی انجام شود.

$$\langle\langle O_Q \rangle\rangle_{ensemble} = Tr(O_\rho)$$

که عملگر چگالی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = \sum p_{\psi} |\psi\rangle\langle\psi|$$

می‌توان معادله حرکت را برای ماتریس چگالی از معادله شرودینگر به دست آورد:

$$\dot{\rho}(t) = \frac{-i}{\hbar} [H(t), \rho(t)] \quad (29.1)$$

این معادله به معادله لیوویل معروف است. اگر عملگر فوق به صورت ماتریس در نظر گرفته شود، در این صورت عناصر قطری نشان دهنده جمعیت سیستم‌های اتمی و عناصر غیرقطری نشان دهنده همدوسی اتمی است [۱۰، ۱۱].

حال می‌توان با استفاده از معادله لیوویل ماتریس چگالی این سیستم را به دست آورد. معادله اصلی حاکم بر سیستم به صورت زیر است:

$$\dot{\rho}(t) = \frac{-i}{\hbar} [H(t), \rho(t)] + \Gamma\rho \quad (30.1)$$

که $\Gamma\rho$ مربوط به جملات پدیده شناختی ناشی از برهم‌کنش مد خلاء میدان مغناطیسی با اتم می‌باشد. نظریه نیمه کلاسیک قادر به محاسبه این جملات نیست، بنابراین باید این جملات را به صورت دستی وارد کرد.

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{11} &= \frac{-i}{\hbar} \langle 1 | [H, \rho] | 1 \rangle + \gamma_1 \rho_{33} \\ \dot{\rho}_{22} &= \frac{-i}{\hbar} \langle 2 | [H, \rho] | 2 \rangle + \gamma_2 \rho_{33} \\ \dot{\rho}_{33} &= \frac{-i}{\hbar} \langle 3 | [H, \rho] | 3 \rangle - (\gamma_1 + \gamma_2) \rho_{33} \\ \dot{\rho}_{21} &= \frac{-i}{\hbar} \langle 2 | [H, \rho] | 1 \rangle \\ \dot{\rho}_{31} &= \frac{-i}{\hbar} \langle 1 | [H, \rho] | 3 \rangle - \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \rho_{31} \\ \dot{\rho}_{32} &= \frac{-i}{\hbar} \langle 3 | [H, \rho] | 2 \rangle - \frac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \rho_{32} \end{aligned} \quad (31.1)$$