به نام خداوند بخشنده و مهربان

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (آنالیز)

دنباله‌های درونیابی تعمیم داده شده برای فضاهای برگمن

توسط:

سمیه میرزاده کوهشاهی

استاد راهنما:

دکتر بهرام خانی رباطی

شهریور ۱۳۸۷

به نام خدا

دنباله‌های درونیابی تعمیم داده شده برای فضاهای برگمن

به وسیله‌ی:

سمیه میرزاده کوهشاهی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه : عالی

دکتر بهرام خانی، دانشیار ریاضی (رئیس کمیته) ....

دکتر کریم هدایتیان، دانشیار ریاضی ....

دکتر محسن تقوی، دانشیار ریاضی ....

شهریور ۱۳۸۷

تقدیم به آنانیکه دوستشان دارم

پدرم

مادرم

همسرم

سپاسگزاری

خداوند قادر و متعال را شاکرم که این مجال را برای اینجانب فراهم کرد که ایـن اثـر را بـه پایان برسانم، نگارنده در انجام این اثر بی‌شک خود را مدیون همکاری و راهنمایی استاد گرانقدر جناب دکتر بهرام خانی می‌داند، لذا از ایشان کمال قدردانی را دارم.

بر خود لازم می‌دانم از اساتید محترم جناب آقایان دکتر هدایتان و دکتر تقوی – اساتید مشاور- که در به انجام رساندن این رساله مرا یاری نمودند، کمال تشکر را بنمایم.

همچنین سپاسی بی‌شائبه دارم از خانواده مهربانم، که همواره مشوق اصلی من در تمام دوران تحصیل بوده‌اند. موفقیت خویش را قطعاً مرهون زحمات بی‌دریغ و حمایتهای عاشقانه ایشان بوده و هستم.

تشکر ویژه‌ای دارم از همسر عزیزم که اگر محبتهای بی‌دریغ ایشان نبود، مطمئناً این رساله به پایان نمی‌رسید.

چکیده

دنباله‌های درونیابی تعمیم داده شده برای فضاهای برگمن

به وسیله‌ی:

سمیه میرزاده کوهشاهی

در این پایان‌نامه به مشخصه سازی دنباله‌های درونیابی برای فضاهای برگمن می‌پردازیم که در اغلب مشخصه سازی‌ها فرض می‌کنیم که دنباله‌ها با متر شبه-هذلولوی گسسته یکنواخت باشند. نشان داده خواهد شد که اگر مفهوم درونیابی به‌طور مناسبی تعمیم داده شود، دو مورد از این مشخصه سازی‌ها بدون شرط گسسته یکنواخت معتبر باقی می‌مانند.

مفهوم درونیابی تعمیم داده شده که در اینجا در نظر گرفته می‌شود، درونیابی‌های ساده و چندگانه را نیز، به عنوان موارد خاص در بر می‌گیرد.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

۱- مقدمه

در این فصل از پایان نامه به بیان تعاریف و قضایایی می‌پردازیم که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. اثبات قضایای مورد نظر را می‌توان در مراجع یافت.

تعریف ۱-۱: فرض کنید dA اندازه مساحتی را نمایش دهد و G یک دامنه در صفحه مختلط باشد. فضای تمام توابع اندازه‌پذیر f که $\|f\|_{p,G}^{p} = \int_G |f|^p dA < \infty$ با $L^p(G) = L^p(G, dA)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۲: فضای برگمن $A^p(G)$ زیر فضای از $L^p(G)$ است که شامل توابع تحلیلی می‌باشد.

تعریف ۱-۳: اگر $0 < p < \infty$ باشد، نماد $\|\cdot\|_{p,G}$ برای نُرم روی A^p بکار می‌رود (این مطلب در بخش ۲-۱ به‌طور کامل توضیح داده می‌شود). حالتی که $G = U$ ،قرص باز یکه باشد، قرار می‌دهیم:

$$L^p = L^p(U) \text{ و } A^p = A^p(U) \text{ ، } \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{p,U}$$

تعریف ۱-۴: فرض کنید $\psi(z,\zeta)$ متر شبه-هذلولوی با ضابطه زیر باشد:

$$\psi(z,\zeta) = \left|\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right|$$

تعریف ۱-۵: نماد $D(z,r)$ را برای گوی شبه-هذلولوی به مرکز z و شعاع r بکار می‌بریم $(r<1)$. فرض کنید $\rho(z) = 1-|z|$، فاصله یک نقطه تا مرز U را نشان می‌دهد. برای یک مجموعه S ، قرار دهید $\rho(S) = \sup\{\rho(z) : z \in S\}$.

قضیه ۱-۶: اگر $1 \le p < \infty$ باشد آنگاه L^p یک فضای باناخ می‌باشد.

اثبات: ببینید ([۱۰] ، صفحه ۱۸۳، قضیه ۶. ۶) .

لم ۱-۷: اگر z_0 ، z_1 و z_2 سه نقطه دلخواه در U باشند آنگاه

$$\frac{\psi(z_0,z_2)-\psi(z_2,z_1)}{1-\psi(z_0,z_2)\psi(z_2,z_1)}\le\psi(z_0,z_1)\le\frac{\psi(z_0,z_2)+\psi(z_2,z_1)}{1+\psi(z_0,z_2)\psi(z_2,z_1)}$$

اثبات: ببینید ([۱۱] ، صفحه ۴، لم ۴. ۱).

تعریف ۱-۸: اگر f یک تابع تحلیلی و نا صفر باشد، مجموعه صفر f (با تکرار صفرها بر حسب مرتبه‌شان) را با $Z(f)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۹: دنباله $Z=(a_n:n\in N)$ یک دنباله صفر برای A^p است اگر یک تابع ناصفر $f\in A^p$ وجود داشته باشد بطوریکه $Z(f)=Z$.

تعریف ۱-۱۰: اگر w یک تابع اندازه‌پذیر و موضعا انتگرال‌پذیر باشد (نه لزوما انتگرال‌پذیر) و به ازای هر $z\in U$، $w(z)>0$ باشد آنگاه به w تابع وزن روی U گفته می‌شود. همچنین مجموعه توابع اندازه‌پذیر f که $\| f\|_{p,w}^p=\iint |f|^p wdA<\infty$ باشد، را فضای وزن‌دار می‌نامند و آن را با نماد $L^p(w)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۱۱: فرض کنید $Z=\{z_k:k=1,2,3,\ldots\}$ یک دنباله بدون نقاط حدی در U باشد، دنباله Z گسسته یکنواخت است اگر دارای یک کران پایین با متر شبه-هذلولوی روی فاصله بین اعضایش باشد، یعنی $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $k\neq n$, $\psi(z_k,z_n)>\varepsilon$.

تعریف ۱-۱۲: مساله درونیابی ساده A^p برای دنباله Z بصورت زیر است:

دنباله $w=(w_k)$ از اعداد مختلط که دارای شرط $\sum_{j=1}^{\infty}|w_j|^p(1-|z_j|^2)^2<\infty$ می‌باشد، داده شده هدف یافتن یک تابع $f\in A^p$ بطوریکه برای همه kها، $f(z_k)=w_k$.

دنباله Z یک دنباله درونیابی برای A^p است اگر هر چنین مساله درونیابی دارای جواب باشد.

تعریف ۱-۱۳: مساله درونیابی چندگانه بصورت زیر می‌باشد:

یک دنباله $w=(w_k)$ از n-تایی‌های $w_k=(w_k^{(0)},w_k^{(1)},\dots,w_k^{(n-1)})$ که دارای شرط $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\left|w_k^{(l)}\right|^p(1-|z_k|^2)^{lp+2}<\infty$ می‌باشد، داده شده است. هدف یافتن تابع $f\in A^p$ بطوریکه برای هر $0\le l\le n-1$ و $k\ge 1$ ، $f^{(l)}(z_k)=w_k^{(l)}$.

یک دنباله Z ، دنباله درونیابی چند گانه از مرتبه n برای A^p است، اگر هر چنین مساله درونیابی چند گانه دارای جواب باشد.

تعریف ۱-۱۴: عملگرهای ∂ و $\bar{\partial}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\partial}u=\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\partial u=\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

تعریف ۱-۱۵: فرض کنید $k_a(\zeta)=\frac{|\zeta|^2}{2}\frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\bar{a}\zeta|^2}$ ، $k_Z(\zeta)=\sum_{a\in Z}k_a(\zeta)$ ، L_Z^p برای $L^p(U,\exp(pk_z)dA)$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۱۶: $\bar{\partial}$ -مساله بصورت زیر مطرح می‌شود:

تابع $f\in L_Z^p$ داده شده، هدف یافتن یک تابع $u\in L_Z^p$ است بطوریکه:

$$(1-|z|^2)\bar{\partial}u(z)=f(z)\ (\forall z\in U).$$

گوییم $\bar{\partial}$ - مساله دارای جوابهایی با کران در L_Z^p است اگر ثابت C وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $f\in L_Z^p$ ، یک جواب u در L_Z^p موجود باشد که در رابطه بالا صدق کند و $\|u\|_{p,Z}\le C\|f\|_{p,Z}$.نماد $\|.\|_{p,Z}$ ، نرم واضح برای فضاهای L_Z^p می‌باشد.

تعریف ۱-۱۷: فرض کنید $d\lambda(z)=(1-|z|^2)^{-2}dA(z)$ اندازه مساحتی پایا روی U باشد و اندازه اقلیدسی یک مجموعه S را با نماد $|S|$ نشان می‌دهیم.در اینجا $|U|=1$ است.

تعریف ۱-۱۸: دنباله Z چگال گراندار نامیده می‌شود، اگر ثابت‌های M و $0<R<1$ موجود باشند بطوریکه به ازای هر $z\in U$، گوی $D(z,R)$ شامل حداکثر M تا جمله از دنباله Z باشد (با شمارش تکرار).

تعریف ۱-۱۹: به ازای هر $z\in U$ ، $M_a(z)=\dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$ که a را به ۰ و ۰ را به a می‌نگارد، تبدیل موبیوس از U نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۲۰: فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد، X فضای شبه-باناخ نامیده می‌شود اگر وجود داشته باشد تابع حقیقی مقدار کامل $\|.\|$ روی X بطوریکه برای هر $x,y\in X$ و همه اسکالرهای α، شرایط زیر برقرار باشند:

الف) $\|x\|=0$ اگر و تنها اگر $x=0$؛

ب) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$؛

ج) وجود دارد $k\geq 1$ مستقل از x و y بطوریکه $\|x+y\|\leq k(\|x\|+\|y\|)$.

به تابع $\|.\|$، شبه-نرم گفته می‌شود. توجه داشته باشید اگر $k=1$ باشد، فضای X و تابع $\|.\|$ به ترتیب همان فضای باناخ و نرم می‌باشند.

قضیه ۱-۲۱: (قضیه نگاشت باز)

اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و تابع $\Lambda: X\to Y$ پیوسته، خطی، یک به یک و پوشا باشد، آنگاه اعداد حقیقی مثبت a و b وجود دارند بطوریکه به ازای هر $x\in X$ ، $a\|x\|\leq\|\Lambda(x)\|\leq b\|x\|$.

اثبات: ببینید ([۲۲] ، صفحه ۴۹، قضیه ۱۲. ۲).

توجه کنید که با توجه به ساختار فضاهای شبه-باناخ می‌توان به راحتی دید که این قضیه برای فضاهای شبه-باناخ نیز درست می‌باشد. زیرا هیچ جا در اثبات از $k=1$ استفاده نشده است.

قضیه ۱-۲۲: فرض کنید $p>0$ باشد، آنگاه هر زیر مجموعه از مجموعه صفر A^p، یک مجموعه صفر A^p می‌باشد.

اثبات: ببینید ([۱۳] ، صفحه ۶۹۴، قضیه ۳).

قضیه ۱-۲۳: (قضیه مقدار میانگین در $\mathbb{R}^p$)

مجموعه باز $\Omega \subseteq IR^p$ و تابع $f:\Omega \to IR^q$ مفروض اند، فرض کنید که نقاط a و b و قطعه خط S واصل بین دو نقطه، در Ω باشند و f در هر نقطه از S مشتق‌پذیر باشد. آنگاه نقطه ای مانند c روی S وجود دارد به قسمی که

$$\| f(b) - f(a)\| \le \| f'(c)(b-a)\|$$

اثبات: ببینید ([۱]، صفحه ۴۶۳، قضیه ۴۰. ۵).

تعریف ۱-۲۴: دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مفروضند به قسمی که به ازای n ، $b_n \ge 0$ باشد. هرگاه عدد پایائی چون $M>0$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر مقدار n، $|a_n| \le M|b_n|$ گوییم a_n اوی بزرگ b_n است و می‌نویسیم $a_n = O(b_n)$.

تعریف ۱-۲۵: نگاشت f را همدیس گویند هر گاه f تحلیلی باشد و زاویه را نیز حفظ کند.

قضیه ۱-۲۶: فرض کنید f ناحیه Ω را به توی صفحه بنگارد. هر گاه $f'(z_0)$ در نقطه‌ای مانند $z_0 \in \Omega$ موجود بوده و $f'(z_0) \ne 0$ ، آنگاه f زوایا را در z_0 حفظ می‌کند. به عکس، هر گاه دیفرانسیل f در z_0 موجود و مخالف صفر بوده و f در z_0 زوایا را حفظ نماید، آنگاه $f'(z_0)$ موجود و مخالف صفر می‌باشد.
اثبات: ببینید ([۳]، صفحه ۳۲۶، قضیه ۱۴. ۲).

قضیه ۱-۲۷: متر شبه-هذلولوی ψ تحت نگاشت‌های همدیس پایا است. به عبارتی به ازای هر نگاشت همدیس φ و هر z و w در U داریم:

$$\psi (z, w) = \psi (\varphi(z), \varphi(w)).$$

اثبات: ببینید ([۱۱]، صفحه ۲، لم ۲. ۱).

تعریف ۱-۲۸: تکیه‌گاه تابع (حقیقی یا مختلط) f بر IR^p، بست مجموعه تمام نقاطی چون $x \in IR^p$ است که در آن $f(x) \ne 0$.

تعریف ۱-۲۹: نگاشت f را $I'-$ نگاشت گوییم، هرگاه f' نگاشتی پیوسته باشد.

قضیه ۱-۳۰: (قضیه تغییر متغیر)

فرض کنید T یک $-1'$ نگاشت یک به یک از مجموعه باز $E \subset I\!R^p$ به توی $I\!R^p$ باشد بطوریکه به ازای هر $x \in E$، $J_T(x) \neq 0$ (به یاد آورید که J_T ژاکوبی T است). هرگاه f یک تابع پیوسته بر $I\!R^p$ باشد که تکیه‌گاهش فشرده و در $T(E)$ جای داشته باشد،آنگاه:

$$\int_{T(E)} f(y)dy = \int_E f(T(x))|J_T(x)|dx$$

اثبات: ببینید ([۲]، صفحه ۳۰۵، قضیه ۹.۱۰).

تعریف ۱-۳۱: رده تمام توابع تحلیلی در Ω را (که Ω یک مجموعه باز در صفحه است)

با $H(\Omega)$ نشان می دهیم.

قضیه ۱-۳۲: فرض کنید $\varphi \in H(\Omega)$، $\varphi'(z_0) \neq 0, z_0 \in \Omega$. در این صورت Ω یک همسایگی از z_0 مانند V را شامل است بطوریکه:

الف) φ در V یک به یک است؛

ب) $W = \varphi(V)$ یک مجموعه باز است؛ و

ج) هر گاه $\psi : W \to V$ با $\psi(\varphi(z)) = z$ تعریف شده باشد، آنگاه $\psi \in H(\Omega)$.

اثبات: ببینید ([۳]، صفحه ۲۵۵، قضیه ۳۰.۱۰).

تعریف ۱-۳۳: فرض کنیم f یک تابع حقیقی (یا حقیقی وسعت یافته) بر یک فضای توپولوژیک باشد. اگر $\{x: f(x) > \alpha\}$ به ازای هر αی حقیقی باز باشد، گوییم f نیمه پیوسته پایینی است و اگر $\{x: f(x) < \alpha\}$ به ازای هر αی حقیقی باز باشد، گوییم f نیمه پیوسته بالایی می‌باشد.

تعریف ۱-۳۴: گوییم تابع u تعریف شده در مجموعه باز Ω در صفحه زیرتوافقی است اگر از چهار خاصیت زیر برخوردار باشد:

الف) به ازای هر $z \in \Omega$ ، $-\infty < u(z) < \infty$؛

ب) u در Ω نیم پیوسته بالایی باشد؛

ج) هر گاه $\overline{D}(a;r) \subset \Omega$ ، آنگاه؛ $u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + re^{i\theta})\,d\theta$

د) انتگرال مذکور در (ج) مساوی $-\infty$ نباشد.

قضیه ۱-۳۵: هرگاه Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$ و f متحد صفر نباشد، آنگاه $\log|f|$ در Ω زیر توافقی است؛ همچنین $\log^{+}|f|, |f|^{p}$ $(1 \le p < \infty)$ چنین‌اند($f^{+} = \max\{f,0\}$).
اثبات: ببینید ([۳]، صفحه ۳۹۴، قضیه ۳.۱۷).

قضیه ۱-۳۶: (قضیه مقدار میانی)
فرض کنید $f : X \to Y$ نگاشتی پیوسته از فضای همبند X به مجموعه مرتب Y باشد. اگر a و b دو نقطه از X و r نقطه‌ای از Y باشد که بین $f(a)$ و $f(b)$ واقع است، آنگاه نقطه‌ای از X مانند c وجود دارد بطوریکه $f(c) = r$.
اثبات: ببینید ([۴]، صفحه ۱۹۹، قضیه ۲. ۳).

قضیه ۱-۳۷: (فرمول ینسن)
فرض کنید $\Omega = D(0;R)$، $f \in H(\Omega)$ ، $f(0) \neq 0$ ، $0 < r < R$ و α_1 ،...، α_N صفرهای f در $\overline{D}(0;r)$ باشند که بر طبق بستاییهایشان لیست شده‌اند. در این صورت:

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta\right\}.$$

اثبات: ببینید ([۳]، صفحه ۳۸۱، قضیه ۱۸.۱۵).

قضیه ۱-۳۸: فرض کنید d یک متر روی مجموعه X باشد، آنگاه $d : X \times X \to I\!R$ با توپولوژی که متر d در X القا می‌کند، تابعی پیوسته است.
اثبات: ببینید ([۴]، صفحه ۱۶۱).

تعریف ۱-۳۹: در فضای مفروض X ، رابطه هم ارزی $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم:
$x \sim y$ هرگاه زیر مجموعه همبندی وجود داشته باشد که شامل هر دوی y, x باشد. رده‌های هم ارزی حاصل از آن را مولفه‌های X می‌خوانند.

قضیه ۱-۴۰: مولفه‌های X زیر مجموعه‌های جدا از هم و همبند هستند، که اجتماع آنها مساوی X می‌باشد و هر زیر مجموعه همبند X فقط یکی از آنها را قطع می‌کند.
اثبات: ببینید ([۴]، صفحه ۲۰۷، قضیه ۳. ۱).

قضیه ۱-۴۱: (قضیه مقدار ماکزیمم و مینیمم)

فرض کنید Y مجموعه‌ای مرتب با توپولوژی ترتیبی و تابع $f: X \to Y$ پیوسته باشد. اگر X فشرده باشد، آنگاه نقاطی مانند d,c در X وجود دارند بطوریکه به ازای هر $x \in X$، $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.

اثبات: ببینید ([۴]، صفحه ۲۲۶، قضیه ۶. ۴).

تعریف ۱-۴۲: فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند، نگاشت $T: X \to Y$ را ایزومورفیسم گویند هرگاه T خطی، یک به یک، پوشا ،پیوسته و T^{-1} پیوسته باشد.

قضیه ۱-۴۳: (قضیه نگاشت معکوس)

اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و $A: X \to Y$ یک نگاشت خطی، پیوسته و دوسوئی باشد، آنگاه A^{-1} پیوسته است.

اثبات: ببینید ([۵]، صفحه ۹۱، قضیه ۵. ۱۲).

قضیه ۱-۴۴: (آزمون وایرشتراس)

فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر E تعریف شده‌اند، و گیریم که $|f_n(x)| \leq M_n (x \in E, n=1,2,3,...)$، در این صورت اگر $\sum M_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum f_n$ بر E بطور یکنواخت همگراست.

اثبات: ببینید ([۲]، صفحه ۱۸۰، قضیه ۷. ۱۰).

قضیه ۱-۴۵: فرض کنیم به ازای $j=1,2,3,...$، $f_j \in H(\Omega)$ و $f_j \to f$ به طور یکنواخت بر زیرمجموعه های فشرده. در این صورت $f \in H(\Omega)$ و $f'_j \to f'$ به طور یکنواخت بر زیرمجموعه های فشرده Ω.

اثبات: ببینید ([۳]، صفحه ۲۵۳، قضیه ۱۰. ۲۸).

قضیه ۱-۴۶: فرض کنید $p > 0$ و $0 < \beta < \frac{1}{4}$ و μ و ν اندازه‌های مثبتی روی U باشند، بطوریکه $\mu(D(a)) < C_1 m(D(a))$ و $\nu(D_\beta(a)) < C_2 m(D_\beta(a))$. آنگاه ثابت B فقط وابسته به p وجود دارد به‌طوری‌که

$$\iint \frac{\chi_\beta(w,z)}{m(D_\beta(z))}\left| f(w)-f(z)\right|^p d\mu(z)d\nu(w) \le B\beta^p C_1C_2 \int \left| f\right|^p dm$$

که $\chi_\beta(z,w)=\begin{cases}1 & if\ \psi(z,w)<\beta \\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$ ، $D_\beta(a)=D(a,\beta)$ (گوی شبه-هذلولوی) و $D(a)=D(a,\frac{1}{2})$.

اثبات: ببینید ([۱۵]، صفحه ۹۲، قضیه ۳. ۲).

قضیه ۱-۴۷: فرض کنید u_n یک دنباله از توابع اندازه‌پذیر نامنفی و $f=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ باشند، در اینصورت $\int f=\sum_{n=1}^{\infty}\int u_n$.

اثبات: ببینید ([۲۱]، صفحه ۸۷، نتیجه ۱۱).

قضیه ۱-۴۸: فرض کنید f یک تابع نامنفی و اندازه‌پذیر باشد و $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله از مجموعه‌های اندازه‌پذیر مجزا و $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$ باشد. در این صورت:

$$\int_E f=\sum_{j=1}^{\infty}\int_{E_j} f$$

اثبات: ببینید ([۲۱]، صفحه ۸۷، قضیه ۱۲).

تعریف ۱-۴۹: برای $0\le p<\infty$ ، فرض کنید H^p فضای تمام توابع تحلیلی باشد که

$$\sup_{r<1}\int_0^{2\pi}\left| f(re^{i\theta})\right|^p d\theta<+\infty .$$

تعریف ۱-۵۰: فرض کنید $\alpha>-1$ عددی حقیقی باشد، مجموعه تمام توابع تحلیلی f که دارای شرط $\| f\|_{p,\alpha}=\left[\int_U \left| f\right|^p dA_\alpha\right]^{\frac{1}{p}}<\infty$ می‌باشند، فضای برگمن وزن‌دار نامیده می‌شود و آن را با نماد $A^{p,\alpha}$ نشان می‌دهیم که $dA_\alpha(z)=(1-|z|^2)^\alpha dA$.

نکته ۱-۵۱: اگر $a>0$، $b>0$ و $0<p<1$ باشد، آنگاه $(a+b)^p \le a^p + b^p$

اثبات: ببینید ([۱۰]، صفحه ۱۸۲).

نکته ۱-۵۲: اگر g, f متعلق به $L^p(0<p<\infty)$ باشند، آنگاه

$$|f+g|^p \le \left[2\max(|f|,|g|)\right]^p \le 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

اثبات: ببینید ([۱۰]، صفحه ۱۸۱).

قضیه ۱-۵۳: گوی شبه هذلولوی $D(z,r)$ به مرکز z و شعاع r، با متر اقلیدسی گوی اقلیدسی است که دارای مرکز c و شعاع R به صورت زیر می‌باشد:

$$c=\frac{1-r^2}{1-r^2|z|^2}z,\ R=\frac{1-|z|^2}{1-r^2|z|^2}r.$$

اثبات: ببینید ([۱۱]، صفحه ۳، روابط(۶. ۱) و (۷. ۱)).

قضیه ۱-۵۴: اگر X یک فضای نرم‌دار باشد و $M \le X$ (منیفلد خطی بسته در X) و $\|x+M\|$ بصورت $\|x+M\| = \inf\{\|x+y\| : y\in M\}$ تعریف شده و Q یک نگاشت خارج قسمتی از X بتوی $\frac{X}{M}$ با ضابطه $Q(x)=x+M$ باشد، آنگاه $\|.\|$ یک نرم روی $\frac{X}{M}$ است. همچنین ،

الف) به ازای هر $x\in X$، $\|Q(x)\| \le \|x\|$ و بنابرین Q پیوسته است.

ب) اگر X باناخ باشد، آنگاه $\frac{X}{M}$ باناخ است.

ج) یک زیر مجموعه W از $\frac{X}{M}$ نسبت به نرم باز است اگر و تنها اگر $Q^{-1}(W)$ در X باز باشد.

د) اگر B باز در X باشد، آنگاه $Q(B)$ در $\frac{X}{M}$ باز است.

اثبات: ببینید ([۵]، صفحه ۷۰، قضیه ۲. ۴).

تعریف ۱-۵۵: فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند. نگاشت $T: X\to Y$ را ایزومتری می‌گویند، هرگاه به ازای هر $x\in X$، $\|T(x)\| = \|x\|$.

تعریف ۱-۵۶: فرض کنید f یک تابع مختلط در مجموعه باز Ω در صفحه باشد به طوری که f_{xx} و f_{yy} در هر نقطه Ω موجود باشند. هرگاه f در Ω پیوسته بوده و در هر نقطه Ω، $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$، آنگاه گوییم f در Ω توافقی است.

تعریف ۱-۵۷: یک اندازه τ، اندازه کارلسون برای $A^{p,\alpha}$ نامیده می‌شود، اگر ثابت C_1 وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $f \in A^{p,\alpha}$، $\iint_U |f|^p d\tau \le C_1 \| f\|_{p,\alpha}^p$. همچنین قرار دهید $Ç$ را مجموعه تمام اندازه‌های μ که $\tau = (1-|z|^2)^{2+\alpha}\mu$ یک اندازه کارلسون برای $A^{p,\alpha}$ باشد.

قضیه ۱-۵۸: فرض کنید Z یک مجموعه صفر برای $A^{p,\alpha}$ باشد و اندازه شمارشی روی Z متعلق به $Ç$ است.قرار دهید $0<\gamma<1$ و فرض کنید مجموعه دیگر Z' و یک تناظر یک به یک $\sigma : Z \to Z'$ وجود دارند به‌طوری که $1-|\sigma(a)|^2 = \gamma(1-|a|^2)$ و $\psi(a,\sigma(a))$ روی Z کراندار باشد. آنگاه Z' یک مجموعه صفر برای $A^{p/\gamma,\alpha}$ است.

اثبات: ببینید ([۱۷]، صفحه ۶۷۰، قضیه ۴).

قضیه ۱-۵۹: فرض کنید $0 \notin Z$ و $Z \cup \{0\}$ با متر شبه-هذلولوی گسسته یکنواخت باشد. قرار دهید η را ثابت جداسازی ، $0<\lambda<1$ و فرض کنید $p_\lambda(Z)$ مجموعه همه $p_\lambda(a)$ ($p_\lambda(a)$ نقطه‌ای را نشان می‌دهد که دارای شرط $1-|p_\lambda(a)|^2 = \lambda(1-|a|^2)$ می‌باشد) را برای $a \in Z$ نشان دهد. اگر Z دنباله صفر برای A^p باشد، آنگاه $p_\lambda(Z)$ یک مجموعه صفر برای $A^{p/\lambda}$ است.علاوه بر آن،اگر $f \in A^p$ و $Z = Z(f)$ باشد،آنگاه $h \in A^{p/\lambda}$ و ثابت $C>0$ فقط وابسته به λ و η وجود دارند به طوری که $\|h\|_{p/\lambda} \le \| f\|_p$ و $|h(0)| > | f(0)|^\lambda / C$.

اثبات: ببینید ([۱۸]، صفحه ۹، قضیه ۷. ۲).

لم ۱-۶۰: اگر $f \in A^p$ دارای شرایط $\| f\|_p = 1$ ، $|f(0)| \ge \delta$ و $W \subset Z(f)$ باشد، آنگاه تابع $g \in A^p$ وجود دارد به طوری که $W = Z(g)$ ، $\|g\|_p = 1$ و $|g(0)| > \delta / C_p$ ،که C_p یک ثابت مثبت فقط وابسته به p می‌باشد.

اثبات: ببینید ([۱۸]، صفحه ۸، قضیه ۳. ۲).

قضیه ۱-۶۱: فرض کنید Z یک مجموعه صفر برای A^p ، $p>0$ و $0\notin Z$.آنگاه یک جواب f^* از مساله اکسترمال وجود دارد: ماکسیمم‌سازی $|f(0)|$ برای $f\in A^p$ که $\|f\|_p\le 1$ و $Z(f)=Z$. این جواب دارای شرط

$$\iint |f^*|^p u dA = u(0) \qquad (۱-۱)$$

برای همه توابع توافقی u روی U می‌باشد.به‌عنوان یک نتیجه از رابطه (۱-۱) ،ثابت C وجود دارد به‌طوری که برای هر $z\in U$

$$|f^*(z)|^p(1-|z|^2)\le C \qquad (۲-۱)$$

همچنین $g=f^*/\Psi_Z$ $\left(\Psi_Z(z)=\prod_{a\in Z}\left|\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right|\exp\left[\frac{1}{2}(1-\left|\frac{a-z}{1-\bar{a}z}\right|^2)\right]e^{k_Z(z)}\right)$ برای هر $z\in U$ دارای شرط رشد

$$|g(z)|^p e^{pk_Z(z)}(1-|z|^2)\le C' \qquad (۳-۱)$$

و C' ثابت می‌باشد.

اثبات: ببینید ([۱۸]، صفحه ۱۰، قضیه ۸. ۲).

تعریف ۱-۶۲: تابع حقیقی φ تعریف شده بر بازه باز (a,b) را، که در آن $-\infty\le a<b\le\infty$ محدب نامند، اگر نامساوی

$$\varphi((1-\lambda)x+\lambda y)\le(1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y)$$

به ازای $a<x<b$ ، $a<y<b$ و $0\le\lambda\le 1$ بر قرار باشد.

قضیه ۱-۶۳: فرض کنید $\Omega=\{x+iy: a<x<b\}$ و $\overline{\Omega}=\{x+iy: a\le x\le b\}$ ، f بر $\overline{\Omega}$ پیوسته باشد، $f\in H(\Omega)$ ، و به ازای هر $z\in\Omega$ و ثابتی چون $B<\infty$ ، $|f(z)|<B$.