بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

کاربرد موجک در تحلیل امواج الکتروانسفالوگرام

استاد راهنما
دکتر احمد صفاپور

استادان مشاور
دکتر محمد دولت آبادی
دکتر عباس عسکری زاده

نگارنده
سمیه محمدی آبدر

اسفند ۱۳۹۲

تشکر و قدردانی

خدای بزرگ و مهربان را شاکر و سپاس‌گزارم که به من توفیق کسب علم را ارزانی داشت.
در ابتدا از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر صفاپور صمیمانه تشکر می‌کنم.
هم‌چنین از اساتید مشاورم جناب آقای دکتر دولت آبادی و جناب آقای دکتر عسکری‌زاده سپاس‌گزارم.
از خانواده ام که همیشه همراه و پشتیبان من بوده اند بی‌نهایت سپاس‌گزارم.

سمیه محمدی آبدر

تقدیم به

پدر و مادر
مهربانم

چکیده

هدف از اعمال تبدیل فوریه بر روی یک سیگنال، به دست آوردن اطلاعاتی از آن سیگنال است که در حوزه ی زمان قابل دسترس نیست. اما ما نیاز به ابزاری داریم که بتوان اطلاعات یک سیگنال را هم در حوزه ی زمان و هم در حوزه ی فرکانس مشاهده کرد. در سال های اخیر تبدیل موجک به عنوان یک ابزار تحلیلی فرکانس-زمان قوی برای تحلیل سیگنال های ناایستای مختلط پدیدار شده است. کاربرد تبدیل موجک برای تحلیل سیگنال های زیستی مانند تصاویر پزشکی، امواج الکتروانسفالوگرام، امواج الکتروکاردیوگرام و ... بر دیگر سیگنال ها پیشتاز بوده است. در این پایان نامه ما با استفاده از تبدیل موجک و سپس به کمک تبدیل فوریه‌ی سریع به تحلیل امواج الکتروانسفالوگرام می پردازیم. داده هایی که در این پروژه مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته اند مربوط به پایگاه داده ی بیمارستان کودکان بوستون می باشد که از سایت $physionet.org$ گرفته شده اند.

واژگان کلیدی: الکتروانسفالوگرام، تبدیل فوریه، تبدیل موجک، سیگنال

پیش‌گفتار

ایده های زیادی نشان می دهند که تبدیل های موجک برای مدت های زیادی وجود داشته اند. با این وجود، آنالیز تبدیل موجک به گونه ای که امروزه می شناسیم در اواسط دهه‌ی ۱۹۸۰ برای بررسی سیگنال های وابسته به زمین لرزه توسعه یافت.[۶] در طول بقیه‌ی این دهه در یک جمع ریاضی کوچک با فقط تعداد کمی مقاله های علمی که سالانه منتشر می‌شد علاقه به آنالیز موجک باقی ماند. در واقع کاربرد آنالیز موجک در علوم و مهندسی در آغاز دهه ی ۱۹۹۰ با افزایش سریع تعداد محققانی که توجهشان را به آنالیز موجک معطوف کردند گسترش یافت. تبدیل های موجکی که امروزه مورد استفاده قرار می گیرند دو نوع هستند: تبدیل موجک گسسته و تبدیل موجک پیوسته، که هر کدام به طور جداگانه به کار می روند. در آنالیز موجک اگر جزئیات سیگنال در مرحله ی m را به تقریب سیگنال در مرحله ی m اضافه کنیم، تقریب سیگنال در مرحله ی قبل ($m-1$) به دست می آید. یعنی

$$x_{m-1}(t) = x_m(t) + d_m(t)$$

این شیوه، نمایش چند ریزگی نامیده می شود.[۹] تبدیل موجک در طی سال های اخیر به عنوان یک ابزار موفق توسط محققان برای تحلیل سیگنال ها در زمینه های مختلفی از جمله علوم، مهندسی و پزشکی پدیدار شده است.[۲] تبدیل موجک به دلیل اینکه از پنجره ای با عرض متغیر استفاده می کند توانایی نشان دادن اطلاعات زمانی و فرکانسی یک سیگنال را به روشی قابل انعطاف تر از تبدیل فوریه‌ی زمان کوتاه ($STFT$) دارد. بنابراین تبدیل های موجک، یک تجزیه ی فرکانس-زمان از سیگنال تولید می کنند که به نسبت تبدیل فوریه ی زمان کوتاه مرسوم مؤلفه های سیگنال را به شیوه ی مؤثرتری جدا می کنند. این جنبه ی طیفی-زمانی تبدیل یک تحلیل طیفی وابسته به مقیاس از سیگنال ارائه می دهد. در این روش هر دو اطلاعات فرکانس پایین، بلند مدت و فرکانس بالا، کوتاه مدت می توانند به طور هم زمان گرفته شوند. بنابراین این شیوه به ویژه برای تحلیل سیگنال های گذرا و ناایستا

سودمند است. مزیت دیگر شیوه های موجکی، تنوع توابع موجک موجود است بنابراین می توان انتخاب مناسبی برای سیگنال تحت بررسی داشت. در تبدیل موجک گسسته با استفاده از پایه های موجکی متعامد تبدیل موجک به ویژه برای رمز گذاری سیگنال که اطلاعات داخل سیگنال را در تعدادی ضریب غالب به منظور فشرده سازی موضعی می کند، سودمند می باشد. امروزه آنالیز موجک در گستره ی وسیعی از سیگنال های پزشکی شامل EMG، EEG، ECG، صداهای بالینی، روند فشار خون، الگوهای تنفسی و دنباله های DNA به کار رفته است.[۷] ، [۱۱]، [۱۲] و [۵]

در این پایان نامه ابتدا تبدیل های فوریه و موجک و همچنین امواج الکتروانسفالوگرام را معرفی کرده سپس با کمک تبدیل موجک به تحلیل امواج الکتروانسفالوگرام پرداخته ایم.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف اولیه

در این فصل مفاهیم و تعاریفی که در طول پایان‌نامه با آن‌ها روبرو می‌شویم را بیان کرده و در برخی قسمت‌ها مثال‌هایی برای روشن‌تر شدن بحث خواهیم آورد. محتوای این فصل از کتاب‌های والنات و رودین گرفته شده است و منظور از $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ به ترتیب مجموعه‌ی اعداد حقیقی و اعداد صحیح می باشد.

۱.۱ برخی مفاهیم پایه ای آنالیز ریاضی

تعریف ۱.۱.۱. یک تابع قطعه ای پیوسته روی I انتگرال پذیر است (یا $L^۱$ است) اگر

$$\int_I \mid f(x) \mid^۱ dx,$$

متناهی باشد.

اگر $\int_I \mid f(x) \mid^P dx$ متناهی باشد نرم L^p از تابع f به صورت زیر تعریف می شود

$$\parallel f \parallel_P = (\int_I \mid f(x) \mid^p dx)^{\frac{۱}{p}}.$$

نرم $L^۱$ تابع f به صورت زیر تعریف می شود

$$\parallel f \parallel_۱ = \int_I \mid f(x) \mid dx.$$

و اگر $\int_I \mid f(x) \mid^۲ dx$ متناهی باشد نرم $L^۲$ تابع f به صورت زیر تعریف می شود

$$\parallel f \parallel_۲ = (\int_I \mid f(x) \mid^۲ dx)^{\frac{۱}{۲}},$$

اگر $\circ < p < \infty$ فضای L^p به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L^p = \{f| \parallel f \parallel_P < \infty\}.$$

و در حالت خاص به ازای $p = ۲$ فضای $L^۲(I)$ به صورت

$$L^۲(I) = \{f| \int_I |f|^۲ < \infty\}.$$

تعریف می‌شود.

فضای $l^۲$

$$l^۲ = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}|x_k \in \mathbb{R}, \sum_۱^\infty |x_k|^۲ < \infty\}.$$

تعریف ۲.۱.۱. منظور از یک پایه برای یک فضای برداری مجموعه‌ای از بردارهای موجود در آن فضا است که دو خاصیت زیر را دارا باشد

۱- مستقل خطی باشند.

۲- بتوانند فضا را تولید کنند.

تعریف ۳.۱.۱. اگر در مجموعه بردارهای پایه هر بردار مجموعه بر تمامی بردارهای دیگر این مجموعه عمود باشد این مجموعه را پایه متعامد می‌نامند.

تعریف ۴.۱.۱. پایه متعامدی که اندازه‌ی هر کدام از بردارهایش با هم برابر و به اندازه‌ی یک باشد را پایه متعامد یکه می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. یک گردایه از توابع $L^۲$ $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ روی بازه ی I، یک دستگاه متعامد روی I است اگر

$$\int_I g_n(x)\overline{g_m(x)}dx = \circ \qquad m \neq n.$$

و هم‌چنین

$$\int_I g_n(x)\overline{g_n(x)}dx = \int \mid g_n(x) \mid^۲ dx > \circ.$$

تعریف ۶.۱.۱. گردایه‌ی $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دستگاه متعامد یکه روی I است اگر آن یک دستگاه متعامد روی I باشد و در شرط زیر صدق کند

$$\int_I g_n(x)\overline{g_n(x)}dx = \int \mid g_n(x) \mid^۲ dx = ۱.$$

۲.۱ چند نکته از سیگنال ها

تعریف ۱.۲.۱. یک سیگنال دنباله‌ای از اعداد به صورت $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ است که در شرط زیر صدق می‌کند

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid x(n) \mid < \infty,$$

یا این که

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid x(n) \mid^{۲} < \infty.$$

چنین دنباله‌هایی در $l^{۲}$ قرار دارند و به آن‌ها دنباله‌ی دارای انرژی متناهی گفته می شود. که نرم $l^{۲}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|x\|_{l^{۲}} = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid x(n) \mid^{۲})^{\frac{۱}{۲}}.$$

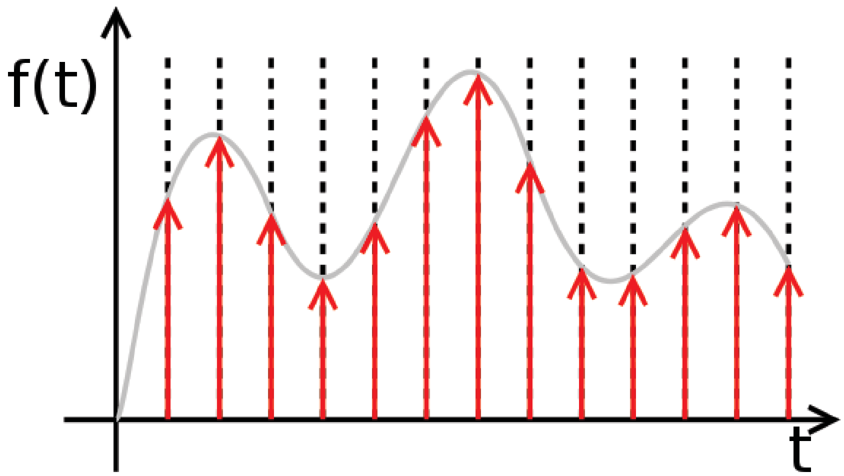
یکی از تفاوت‌های اصلی بین انواع مختلف سیگنال‌ها در زمان‌بندی گسسته یا پیوسته‌ی آن‌هاست که با سیگنال پیوسته یا گسسته شناخته می‌شوند. از لحاظ ریاضی بازه‌ی سیگنال پیوسته بازه‌ی اعداد حقیقی است در حالی که بازه‌ی سیگنال‌های گسسته بازه‌ی اعداد صحیح است و این که این اعداد صحیح چه چیزی را نشان می‌دهند بستگی به طبیعت سیگنال دارد. سیگنال‌های گسسته غالبا با نمونه‌برداری از سیگنال‌های پیوسته به دست می‌آیند. برای مثال حسگرها اطلاعات را به طور مداوم مخابره می‌کنند ولی از آن جایی که یک جریان مستقیم به سختی قابل ثبت است معمولا یک سیگنال گسسته به صورت تخمینی مورد استفاده قرار می‌گیرد. کامپیوترها و سایر ابزار دیجیتال به زمان‌های گسسته محدود هستند. در شکل ۱.۱ نمونه‌ای از گسسته سازی یک سیگنال پیوسته را مشاهده می‌کنید.

تعریف ۲.۲.۱. برای دو سیگنال f و g با طول N و برای هر عدد حقیقی c داریم

$$\begin{aligned}
۱ &: f+g = (f_۱+g_۱, f_۲+g_۲, \cdots, f_N+g_N),\\
۲ &: f-g = (f_۱-g_۱, f_۲-g_۲, \cdots, f_N-g_N),\\
۳ &: cf = (cf_۱, cf_۲, \cdots, cf_N).
\end{aligned}$$

تعریف ۳.۲.۱. انرژی سیگنال $f=(f_۱,\cdots,f_N)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_f = f_۱^۲ + \cdots + f_N^۲.$$



شکل ۱.۱: نمونه‌ای از گسسته سازی سیگنال پیوسته

۱.۲.۱ صافی ها

در پردازش سیگنال، یک صافی وسیله یا فرایندی است که بعضی ویژگی ها یا مؤلفه های ناخواسته را از سیگنال حذف می کند. مبناهای مختلف زیادی برای طبقه بندی کردن صافی ها وجود دارد که در بیشتر روش ها هم پوشانی می کنند. صافی ها را می توان به صورت زیر دسته بندی کرد

۱- خطی یا غیر خطی

۲- زمان ثابت یا زمان متغیر

۳- آنالوگ یا دیجیتال

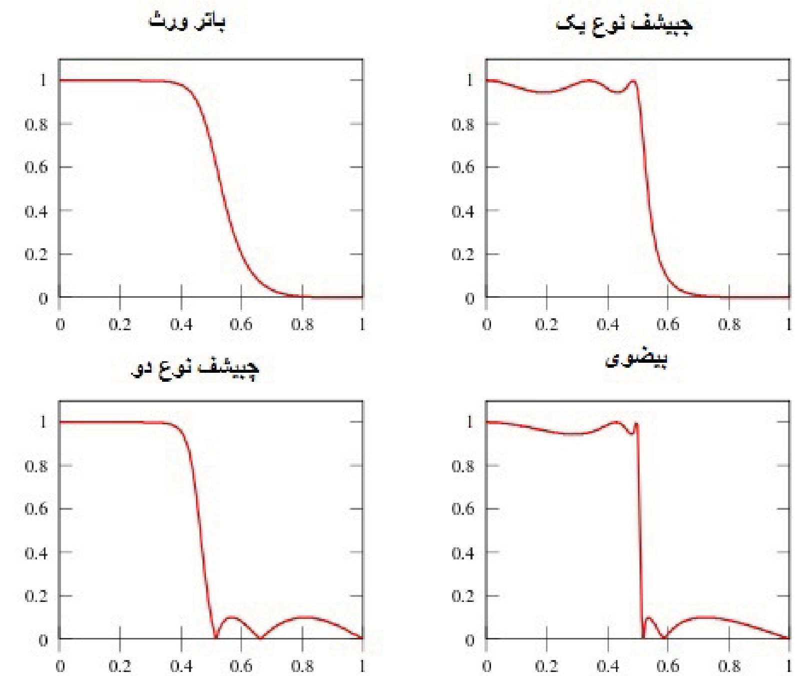
۴- زمان گسسته یا زمان پیوسته

۵- فعال یا غیر فعال

۶- پاسخ ضربه ی متناهی یا پاسخ ضربه ی نامتناهی.

روش طراحی مدرن برای صافی‌های زمان پیوسته ی خطی، ترکیب شبکه ای نامیده شده است. بعضی خانواده های صافی طراحی شده در این روش به صورت زیر است

۱- صافی چبیشف [۱]
۲-صافی باتر ورث[۲]
۳-صافی بیضوی[۳]
یک تصویر مقایسه ای از صافی‌های بیضوی، باترورث، و چبیشف در شکل زیر آمده است



شکل ۲.۱: تصویری از چند صافی

پیاده سازی نوع خاصی از صافی ها (آنالوگ یا دیجیتال، فعال یا غیرفعال) تفاوتی ایجاد نمی کند.همان طور که از شکل مشخص است صافی های بیضوی نسبت به بقیه دقیق تر

[۱] chebyshev
[۲] butterworth
[۳] elliptic

هستند اما آن ها ناهمواری هایی روی تمام پهنای باندشان نشان می دهند.
برای توصیف کردن فرکانس هایی که صافی خطی عبور می دهد و آن هایی که رد می کند از اصطلاحات زیر استفاده می کنیم
۱- صافی پایین گذر: فرکانس های پایین را عبور می دهد و فرکانس های بالا را ضعیف می کند.
۲- صافی میان گذر: فقط فرکانس هایی که در باند فرکانسی هستند را عبور می دهد.
۳- صافی بالا گذر: فرکانس های بالا را عبور می دهد و فرکانس های پایین را ضعیف می کند.
در محیط متلب برای اعمال صافی بیضوی بر روی سیگنال s از دستور زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} [b,a] &= ellip(n,Rp,Rs,Wp,'ftype'); \\ filteredsignal &= filter(b,a,s); \end{aligned}$$

که در آن n مرتبه‌ی صافی، Rpکران پایین باند فرکانسی، Rs کران بالای باند فرکانسی و Wp فرکانس گذر است. به جای $ftype$ به ترتیب از $high$ ، $bandpass$ و low برای صافی بالا گذر، میان گذر و پایین گذر استفاده می‌کنیم. در نوع میان گذر $Wp = [w۱, w۲]$ است.

۳.۱ سری فوریه

تعریف ۱.۳.۱. تابع $f(x)$ تعریف شده روی $\mathbb{R}$ دارای دوره تناوب T است اگر

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

این قبیل توابع را دوره‌ای می‌نامند.

تعریف ۲.۳.۱. به تعداد دفعاتی که یک رویداد تناوبی در واحد زمان اتفاق می‌افتد، فرکانس یا بسامد گوییم و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید که در آن T دوره‌ی تناوب است.

$$f = \frac{۱}{T}.$$

تعریف ۳.۳.۱. هنگام تعیین محدوده‌ی فرکانس سیگنال، متناظر با نوع استفاده، به بالاترین یا پایین ترین کران این محدوده فرکانس قطع گوییم. در وسایل الکترونیکی مثل صافی‌ها از

فرکانس قطع به عنوان یک آستانه در صافی بالا گذر ، پایین گذر و میان گذر استفاده می شود.

تعریف ۴.۳.۱. اگر $f(x) \in L^{۱}$ تابعی با دوره تناوب T باشد ضرایب فوریه این تابع به صورت زیر تعریف می شود

$$c(n) = \frac{۱}{T} \int_{\circ}^{T} f(x) e^{\frac{-۲\pi i n x}{T}} dx.$$

تعریف ۵.۳.۱. تابع $f(x)$ با دوره T و $L^{۱}$ روی $[\circ, T]$ داده شده است. سری فوریه وابسته به $f(x)$ به صورت $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) e^{\frac{۲\pi i n x}{T}}$ تعریف می‌شود که در آن $c(n)$ به صورت بالا تعریف شده است.

می‌توان سری فوریه یک تابع را بر حسب دستگاه مثلثاتی حقیقی بازنویسی کرد. برای دیدن این مسئله توجه کنید که

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) e^{\frac{۲\pi i n x}{T}} &= c(\circ) + \sum_{n\in\mathbb{N}} c(n)(\cos(\frac{۲\pi n x}{T}) + i\sin(\frac{۲\pi n x}{T})) \\
&+ \sum_{n\in\mathbb{N}} c(-n)(\cos(\frac{۲\pi n x}{T}) - i\sin(\frac{۲\pi n x}{T})) \\
&= c(\circ) + \sum_{n\in\mathbb{N}} (c(n) + c(-n)) \cos(\frac{۲\pi n x}{T}) \\
&+ \sum_{n\in\mathbb{N}} i(c(n) - c(-n)) \sin(\frac{۲\pi n x}{T}).
\end{aligned}$$

برعکس، یک سری به شکل

$$A_{\circ} + \sum_{n=۱}^{\infty} A_n \cos(\frac{۲\pi n x}{T}) + \sum_{n=۱}^{\infty} B_n \sin(\frac{۲\pi n x}{T}),$$

می‌تواند به صورت $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c(n) e^{\frac{۲\pi i n x}{T}}$ که در آن

$$c(\circ) = A_{\circ},$$

و

$$c(n) = \frac{A_n - iB_n}{۲} \quad n > \circ,$$

و هم‌چنین

$$c(n) = \frac{A_{-n} + iB_{-n}}{۲} \quad n < ۰.$$

که برای تابع $f(x)$داریم

$$f(x) = A_۰ + \sum_{n=۱}^{\infty} A_n \cos(\frac{۲\pi nx}{T}) + \sum_{n=۱}^{\infty} B_n \sin(\frac{۲\pi nx}{T}),$$

که در آن

$$A_۰ = \frac{۱}{T}\int_T f(x)dx,$$

و

$$A_n = \frac{۲}{T}\int_T f(x)\cos(\frac{۲\pi nx}{T})dx,$$

و نیز

$$B_n = \frac{۲}{T}\int_T f(x)\sin(\frac{۲\pi nx}{T})dx.$$

مثال ۶.۳.۱. برای مثال این ضرایب را می‌توان برای تابع زیر محاسبه نمود

$$f(t) = (\sin t + \cos ۲t)^۲.$$

دوره تناوب این تابع ۲π است $(f(t+۲\pi) = f(t))$. با توجه به دو رابطه‌ی مثلثاتی زیر

$$\sin^۲ at = \frac{۱ - \cos ۲at}{۲},$$

و

$$\cos^۲ at = \frac{۱ + \cos ۲at}{۲}.$$

و نیز

$$f(t) = \sin^۲ t + \cos^۲ ۲t + ۲\sin t \cos ۲t.$$

اکنون داریم

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{۱ - \cos ۲t}{۲} + \frac{۱ + \cos ۴t}{۲} + \sin ۳t - \sin t \\ &= ۱ - \sin t - \frac{۱}{۲}\cos ۲t + \sin ۳t + \frac{۱}{۲}\cos ۴t. \end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$A_۰ = ۱, B_۱ = -۱, B_۳ = ۱, A_۲ = -\frac{۱}{۲}, A_۴ = \frac{۱}{۲}, A۱ = A۳ = ۰, B۲ = ۰.$$

مثال ۷.۳.۱. فرض کنید $f(x)$ توسیع دو متناوب تابع $\chi_{[\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲}]}(x)$ باشد ضرایب فوریه و سری فوریه آن به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} c(n) &= \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} \chi_{[\frac{-۱}{۲},\frac{۱}{۲}]}(x) e^{\frac{-۲\pi i n x}{۲}} dx \\ &= \frac{۱}{۲}\int_{\frac{-۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} e^{-\pi i n x} dx \\ &= \frac{-۱}{۲\pi i n}\left[e^{\frac{-\pi i n}{۲}} - e^{\frac{\pi i n}{۲}} \right] \\ &= \frac{۱}{\pi n}\sin(\frac{\pi n}{۲}) \\ &= \begin{cases} ۰, & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{۱}{\pi n}(-۱)^{\frac{n-۱}{۲}}, & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \frac{۱}{۲}, & \text{اگر } n = ۰ \end{cases} \end{aligned}$$

و بنابراین سری فوریه‌ی وابسته به $f(x)$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{۱}{۲} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{۱}{\pi(۲k+۱)}(-۱)^k e^{\pi i(۲k+۱)x} \\ &\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{\pi}\cos(\pi x) - \frac{۲}{۳\pi}\cos(۳\pi x) + \cdots . \end{aligned}$$

تعریف ۸.۳.۱. برای دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ ضرب پیچشی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) dt.$$

فصل ۲

تبدیل موجک

در این فصل ابتدا تبدیل فوریه را بیان می‌کنیم و با بیان کاستی‌های آن، تبدیل فوریه‌ی زمان کوتاه را بررسی نموده و در نهایت به تبدیل موجک می‌پردازیم.

۱.۲ تبدیل فوریه

از یک دید کلی هدف از اعمال یک تبدیل ریاضی بر روی یک سیگنال، به دست آوردن اطلاعات اضافه‌ای است که در سیگنال خام اولیه قابل دسترس نیست. در اکثر مواقع منظور از سیگنال خام اولیه، سیگنال مورد نظر در حوزه‌ی زمان است. در بسیاری موارد اطلاعات سودمند سیگنال در محتوای فرکانسی آن نهفته است که اصطلاحا به آن طیف سیگنال گفته می‌شود. به بیان ساده طیف یک سیگنال نشان دهنده‌ی فرکانس‌های موجود در آن سیگنال است. فرکانس را با واحد تعداد دور در ثانیه یا همان هرتز اندازه می‌گیرند. در قرن نوزدهم میلادی ریاضی‌دان فرانسوی، ژوزف فوریه نشان داد که هر تابع متناوب را می‌توان بر حسب یک مجموع نامتناهی از توابع پایه‌ای سینوسی نوشت. سال‌ها بعد از کشف این خاصیت توابع متناوب، این ایده تحت عنوان تبدیل فوریه به سایر توابع تعمیم داده شد. در سال ۱۹۶۵ یک الگوریتم جدید به نام تبدیل فوریه‌ی سریع مطرح شد.
اگر $x \in L^۱(\mathbb{R})$ تبدیل فوریه‌ی سیگنال $x(t)$ به صورت زیر است که در آن t زمان و ω فرکانس است

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-۲\pi i \omega t} dt. \qquad (۱.۲)$$