

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

١٤٤٤ هـ



دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم  
گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

استفاده از روش گذار بی دررو SCRAP در یک کاواک ، برای تولید حالت‌های در هم تنیده

دانشجو:

جمشید اسدی

استاد راهنما:

دکتر مهدی امنیت طلب

استاد مشاور:

دکتر اکبر جعفری دولاما

مهر 1389

توسط هیئت مدیره دانشکده فیزیک

۱۳۸۹/۹/۸

۱۴۶۴۷۶



پایان نامه آقای / خانم : جمشید اسدی به تاریخ ۱۳۸۹/۰۷/۱۴ شماره

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۹ (به حروف نوزده نما) قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر مهدی امین طلبی

۲- استاد مشاور: دکتر اکبر جعفری دولاما

۳- داور خارجی: دکتر محمد طالبیان

۴- داور داخلی: دکتر آرش ثباتیان

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر اذانبیلر

تقدیم به

مادم، بخامی که فرشتگان در آسمان ما، سرد کوش یکدیگر، نغمه سوزان عشق سرمی دهند نمی توانند کلمه ای آسمانی تر از کلمه  
ماد بیانند. تقدیم به تو که تمام دلیل بودنم برای زندگی هستی.

پدرم، تو را ستایش می کنم، ای زیباترین کلمه کتاب زندگی، بوسه بردستان پر مهرت کمترین پیشگشی است که می توانم ارزانی  
دارم.

همسرم که شریک فداکاری در تمام مشکلاتم بوده است.

## تقدیر و تشکر

من لم یشکر الخالق لم یشکر المخلوق

پروردگار متعال را سپاسگزارم که فرصت داد زندگی به این سطحی شیرین رسید و توانستم پایه تحصیلات عالی گذارده و دوره‌ی کارشناسی ارشد را به اتمام رسانم. در این راه بزرگوارانی مثل راه بوده اند و راهنمایی مانوده اند بر خود فرض می دانم از یکایک عزیزان. بخصوص استاد گرامی جناب آقای دکتر مهدی امنیت طلب و دوست عزیز آقای سعادت‌ی مرآت‌ی ارادت و تشکر خود را اعلام نمایم.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	چکیده
۲	مقدمه
۴	فصل اول
	کوانتش میدان الکترومغناطیسی
۴	۱-۱ کوانتش میدان الکترومغناطیس آزاد
۵	۱-۱-۱ بسط مد میدان
۶	۲-۱-۱ کوانتش
۹	۳-۱-۱ / حالت‌های فوق یا تعداد
۱۲	فصل دوم
	اندرکنش اتم با میدان کلاسیکی و کوانتومی
۱۲	۱-۲ برهمکنش یک اتم دوترازی با یک میدان کلاسیک تک مد
۱۷	۲-۲ ساختار هامیلتونی موثر
۱۸	۳-۲ تئوری کوانتومی برهمکنش میدان-اتم
۲۱	۴-۲ برهمکنش یک اتم دوترازی با یک میدان کوانتومی تک مد
۲۲	۱-۴-۲ روش دامنه ی احتمال

۲۴ ..... ۵-۲ اندرکنش اتم سه ترازى با میدان کلاسیکی

۲۷ ..... فصل سوم

### بررسی روش SCRAP برای انتقال جمعیت در سیستم های دو و سه ترازى

۲۷ ..... ۱-۳ انتقال بی درروى جمعیت توسط تلاقی سطوح

۲۷ ..... ۱-۱-۳ تحریک همدوس

۲۸ ..... ۲-۱-۳ حالت‌های بی دررو

۳۰ ..... ۳-۱-۳ انتقال بی درروى سریع (RAP)

۳۲ ..... ۲-۳ مکانیسم انتقال جمعیت به روش SCRAP در سیستم های دو ترازى

۳۷ ..... ۱-۲-۳ نواحی SCRAP

۴۰ ..... ۳-۳ مکانیسم Half-SCRAP

۴۳ ..... ۴-۳ انتقال جمعیت همدوس در سیستم های سه ترازى  $\Lambda$  - گونه به روش SCRAP

۴۴ ..... ۱-۴-۳ دینامیک سیستم سه ترازى  $\Lambda$  - گونه تحت شرایط SCRAP

۴۷ ..... ۲-۴-۳ بررسی الگوهای جفت شدگی مختلف

۵۰ ..... ۳-۴-۳ مینیمم سازی جمعیت گذرای حالت باد درروى میانی

۵۴ ..... فصل چهارم

۵۴ ..... ۱-۴ ساختار هامیلتونی مؤثر برای سیستم دو ترازى

۵۷ ..... ۲-۴ توپولوژى سطوح ویژه انرژی حالت پوشیده



۵۹	..... ۳-۴ شیه سازی عددی
۶۲	..... ۴-۴ در هم تنیدگی اتم- فوتون
۶۳	..... ۵-۴ در هم تنیدگی اتم- اتم
۶۴	..... ۶-۴ انتقال حالت کوانتومی و شبکه بندی کوانتومی
۶۵	..... ۷-۴ ایجاد حالت‌های کوانتومی تک- فوتون فوک با روش SCRAP در سیستم اتمی $\Lambda$ - گونه و
۶۶	..... بررسی اثرات ناهمدوسی بر انتقال جمعیت سیستم
۶۶	..... ۱-۷-۴ ساختار هامیلتونی مؤثر سیستم
۶۸	..... ۲-۷-۴ روش SCRAP
۷۰	..... ۳-۷-۴ SCRAP همراه با اثرات ناهمدوسی
۷۲	..... نتیجه گیری
۷۳	..... مراجع

# فهرست اشکال

## صفحه

## عنوان

- شکل (۱-۱): میدان مغناطیسی با فرکانس  $V$  در داخل یک کاواک: فرض شده است که میدان عرضی و در جهت  $x$  قطبیده باشد. ۶
- شکل (۱-۲): برهمکنش یک اتم دو ترازوی با یک میدان تک مد ..... ۱۴
- شکل (۲-۲): یک اتم سه ترازوی را نشان می دهد که با دو میدان الکتریکی  $E_1, E_2$  اندرکنش دارد. .... ۲۴
- شکل (۱-۳): تحول زمانی انرژیها (تصاویر بالا) و جمعیت ها (تصاویر پایین) در یک سیستم دو ترازوی. در تصاویر بالایی، خطوط تیره انرژیهای غیرمختل (دررو) را نشان می دهد و منحنیهای با خط ممند انرژیهای بی دررو را نشان می دهند. تصاویر سمت چپ برای حالت غیر مقاطع و تصاویر سمت راست برای حالت مقاطع سطوح هستند. .... ۳۱
- شکل (۲-۳): الگوی جفت شدگی برای سیستم دو ترازوی در روش SCRAP ..... ۳۲
- شکل (۳-۳): تحول زمانی پالس های لیزری (نمودار بالایی)، انرژی های سطوح بی دررو و بادررو (نمودار میانی) و جمعیت های سطوح بادررو (نمودار پایینی). در این شکل دو پالس همزمان با هم به کار رفته اند، به عبارتی  $\tau = 0$ . پارامترهای لیزری دیگر به این ترتیب هستند: ..... ۳۷
- شکل (۴-۳): همانند شکل (۳-۳). اما برای پارامترهای لیزری  $T_p = T_s = \tau$ ،  $\Omega_s = 2\Delta T_p^{-1}$ ،  $S_s = 4\Delta T_p^{-1}$  و  $\Delta_s = 1\Delta T_p^{-1}$  در نظر گرفته شده است. .... ۳۸
- شکل (۵-۳): جمعیت حالت تحریکی در مقابل نامیزانی ثابت  $\Delta_s$ . نمودارهای کوچک بالایی وابستگی زمانی فرکانس رابی  $\Omega(t)$  و نامیزانی  $\Delta(t) = \Delta_s - S(t)$  را برای پنج مقدار متفاوت  $\Delta_s$  که به وسیله بردارها مشخص شده نشان می دهند. نمودارهای کوچک در ردیف میانی نیز تحول زمانی جمعیت ها را در این موارد نشان می دهد. در اینجا نیز شکل های گاوسی  $\Omega(t) = \Omega_s e^{-\frac{t^2}{T_p^2}}$  و ..... ۳۹
- شکل (۶-۳): ایجاد برهم نهی همدوس با دامنه های مساوی به روش Half-SCRAP برای ترتیب پالس پمپ-استارک. پارامترهای لیزری به کار رفته در اینجا  $T_p = T_s$ ،  $\tau = 1\Delta T_p^{-1}$ ،  $\Omega_s = 2\Delta T_p^{-1}$ ،  $S_s = 3\Delta T_p^{-1}$  و  $\Delta_s = 0$  می باشد. .... ۴۲
- شکل (۷-۳): ایجاد برهم نهی همدوس با دامنه های مساوی به روش Half-SCRAP برای ترتیب پالس استارک-پمپ. پارامترهای لیزری شبیه شکل ۶-۳ بوده با این تفاوت که در اینجا  $\tau = -1\Delta T_p^{-1}$  است. .... ۴۳
- شکل (۸-۳): سیستم سه ترازوی  $\Lambda$  - گونه تحت شرایط SCRAP ..... ۴۴

شکل (۳-۴): تحول زمانی پالس ها ( نمودار های بالایی)، ویژه انرژیهای بی دررو و بادررو (نمودارهای میانی) و جمعیت شای حالات بادررو (نمودارهای پایینی). نمودار های (a) مربوط به نامیزانی هایی است که شرط (۳-۶۰) را ارضا کرده و برای آن  $\Delta_r = -\frac{\Delta_r}{\gamma}$  است.

نمودار های (b) مربوط به نامیزانی هایی است که شرط (۳-۶۱) را ارضا کرده و برای آن  $\Delta_r = \frac{\Delta_r}{\gamma}$  است. بردارها از چپ به راست انرژی ها را در ترتیب پالس شهودی ( پمپ-استارک-استوکس ) نشان داده و بردارها از راست به چپ انرژی ها را در ترتیب پالس غیرشهودی (استوکس-استارک-پمپ) نشان می دهد. سایر پارامترها  $\Omega_s = \Delta_r, S_s = 2.5 \Delta_r, T = 2T_p, \Omega_s = \Delta_r, S_s = 2.5 \Delta_r$  و

۴۸ .....  $\tau_s = -\tau_p, \tau_p = -2T_p, T_s = T_p$  می باشد.

شکل (۳-۱۰): مشابه با شکل (۳-۹) اما برای پالس های پمپ و استوکس همزمان، به عبارتی  $\tau_s = \tau_p = -2T_p$ . سایر پارامترها نیز شبیه شکل (۳-۹) می باشد. ۵۰ .....

شکل (۳-۱۱): تحول زمانی پالس ها (نمودار بالایی)، ویژه انرژی های بی دررو و بادرروی هامیلتونی (۳-۵۱) (نمودار میانی) و جمعیت حالات بادررو (نمودار پایینی). در اینجا نامیزانی شرط (۳-۶۰) را ارضا کرده و هر دو پالس پمپ و استوکس طی بخش افزایشی پالس استارک فرا می رسند. بردارها از چپ به راست روی نمودار میانی، مسیر بی درروی مناسب برای انتقال جمعیت را نشان می دهد. پارامترهای لیتری

۵۱ .....  $\tau_s = t_{rr}, \tau_p = t_{rr}, \Delta_r = -\frac{\Delta_r}{\gamma}, T_s = T_p, T = 2T_p, \Omega_s = 2\Delta_r, S_s = 2.5\Delta_r$  می باشند.

شکل (۳-۱۲): همانند شکل (۳-۱۱). با این تفاوت که در اینجا  $\tau_s = \tau_p, \tau_p = \frac{(t_{rr} + t_{rr})}{\gamma}$ . ۵۲ .....

شکل (۳-۱۳): همانند شکل (۳-۱۱). با این تفاوت که در اینجا  $\tau_s = t_{rr}, \tau_p = t_{rr}$ . ۵۲ .....

شکل (۴-۱): ساختار آزمایشگاهی و الگوی پیوندی سیستم. مسیرهای (a) و (b) مربوط به مسیرهای رسم شده در شکل (۴-۲) می باشند. ۵۵ .....

شکل (۴-۲): (سطوح رنگی) سطوح ویژه انرژی (در واحدهای  $\delta$ )  $H^{eff}$  به صورت تابعی از فرکانس رابی  $G$  و جابه جایی استارک  $S$ .

خطوط مشکی مشخص کننده ی تحولات بی درربی هستند که از حالت  $|+, 0\rangle$  شروع می شود و در  $|-, 1\rangle$  پایان می پذیرد. ۵۷ .....

شکل (۴-۳): شکل بالایی: ترتیب پالسی کاواک-استارک پالسهای گاوسی را با طول پالس  $T$  و پارامترهای پالسی  $S = \frac{2.0}{T}, G = \frac{1.0}{T}, \tau = 1.5T, \delta = \frac{1.0}{T}$

شکل پایینی جمعیت ترازهای  $|+, 0\rangle$  و  $|-, 1\rangle$  را به صورت تابعی از زمان که متناظر با مسیر (a) در شکل (۴-۲) است. ۶۰ .....

شکل (۴-۴): همانند شکل (۴-۳) با این تفاوت که اینجا ترتیب پالسی استارک-کاواک است که متناظر با مسیر (b) در شکل (۴-۲) می باشد.

بخش پایینی نشان می دهد که در پایان حالت سیستم همانند شکل (۴-۳)  $|-, 1\rangle$  خواهد بود. ۶۰ .....

شکل (۴-۵): همانند شکل (۴-۳) با ای تفاوت که اینجا ما اتلاف کاواک را در هامیلتونی موثر به صورت  $T_{cav} = 1.0 T_{int}$  دخیل کرده ایم.

بخش پایینی شکل نشان می دهد که حالت نهایی سیستم  $|-, 1\rangle$  و با جمعیت ۵۷ خواهد شد. ۶۱ .....

شکل (۶-۴): همانند شکل (۴-۳) با ای تفاوت که اینجا ما اتلاف کاواک را در هامیلتونی موثر به صورت  $T_{env} = 3000 T_{int}$  دخیل کرده ایم.

بخش پایینی شکل نشان می دهد که حالت نهایی سیستم  $|-, 1\rangle$  و با جمعیت ۹۹ خواهد شد. ۶۱

شکل (۷-۴): بخش بالایی: ترتیب پالسی استارک- کاواک را با پالسهای گاوسی و با پارامترهای یکسان با شکل ۴-۳ و  $\delta = 0$  نشان می دهد.

بخش پایینی: جمعیت را به صورت تابعی از زمان که یک انتقال جمعیت را از حالت  $|+, 0\rangle$  به حالت برهم نهی  $|+, 0\rangle$  و  $|-, 1\rangle$  با

جمعیت های یکسان (حالت در هم تنیده ی ماکزیمم) در پایان فرآیند Half-SCRAP نشان میدهد. ۶۴

شکل (۸-۴): دیاگرام شماتیک برای پروتکل QST بین دو اتم معین توسط یک مد کاواک و برای شبکه ی کوانتومی بین دو کاواک دور از هم

توسط کانال اتمی ..... ۶۵

شکل (۹-۴): الگوی جفت شدگی سیستم اتم - لیزر - کاواک. ۶۶

شکل (۱۰-۴): (a) نمودار تحول زمانی پالس ها (b) تحول زمانی انرژی (c) تحول زمانی جمعیت براساس پارامترهای

۶۹ .....  $\Omega_r = 2\Delta_r, S_r = 2,5\Delta_r, \Delta_r = -\frac{\Delta_r}{\gamma}, \tau_p = \tau_{r3}, \tau_r = \tau_{r1}$

شکل (۱۱-۴): الگوی جفت شدگی اتم - لیزر - کاواک با در نظر گرفتن اثرات گسیل خودبخودی و اتلاف کاواک. ۶۹

شکل (۱۲-۴): نمودار جمعیت نهایی حالت  $|g_2, 1\rangle$  نسبت به نرخ گسیل خودبه خودی و اتلاف کاواک که براساس پارامترهای شکل (۴-۱۰)

رسم شده است. مشاهده می کنیم که اثر ناهمدوسی اتلاف کاواک ( $K$ ) نسبت به گسیل خود به خودی اتمی ( $\Gamma$ ), بر جمعیت نهایی

سیستم بیشتر اثر می گذارد و آن را بیشتر کاهش می دهد. ۷۰

## چکیده

روش SCRAP یکی از روشهای گذار بی دررو می باشد که می تواند در سیستمهای دو ترازوی و سه ترازوی برای انتقال کامل جمعیت همدوس سیستم از یک حالت اولیه به حالت نهایی یا به یک بر هم نهی همدوس از حالت اولیه و نهایی استفاده شود. مزیت این روش آن است که بازده گذار جمعیت آن، چندان تحت تاثیر افت و خیزهای کوچک پارامترهای موجود در هامیلتونی از جمله دامنه ی پالسها و نامیزانی بسامدها و تأخیر زمانی پالسها قرار نمی گیرد. در این روش با فرض اینکه سیستم نخست در حالت اولیه  $|\psi_1\rangle$  قرار دارد، جمعیت سیستم از طریق حالت  $|\psi_2\rangle$  به حالت نهایی  $|\psi_3\rangle$  انتقال پیدا می کند. بدین منظور از سه پالس استفاده می شود: دو پالس شبه تشدید پمپ و مدکاواک که باعث انتقال جمعیت شده و یک پالس استارک غیر تشدید و نسبتاً "قوی که باعث جابجایی ترازهای انرژی اتم شده، و بدین ترتیب شرط تشدید به صورت دینامیکی برآورده می شود.

در این پایان نامه با استفاده از روش گذار بی درروی SCRAP در اتمهای سه ترازوی  $\Lambda$ -گونه که با دو پالس لیزری و یک مد کاواک برهم کنش دارند، حالت های تک- فوتون فوک را ایجاد می کنیم که نمونه ای از حالات کوانتومی می باشند و با بررسی ویژگی های توپولوژیکی سطوح هامیلتونی مؤثر سیستم اتم - کاواک و روش SCRAP، حالات در هم تنیده اتم - فوتون و اتم - اتم را ایجاد کرده و همچنین اثرات ناهمدوسی شامل اتلاف کاواک و گسیل خود به خودی اتمی را بر انتقال جمعیت سیستم به حالت مطلوب سیستم بررسی می کنیم.

## مقدمه

مهندسی حالت کوانتومی (QSE) که شامل کنترل فعال روی دینامیک هم‌دوس سیستم های مکانیک کوانتومی مناسب برای رسیدن به حالت های از پیش تعیین شده ی سیستم ( برای مثال حالت های در هم تنیده یا حالت های میدان چند فوتونی ) است، موضوع بسیار جذابی برای فیزیک مدرن به حساب می آید و با پیشرفت مفاهیم در فیزیک اتمی و مولکولی، میدان کاری بیشتری توسط جوانب مختلف محاسبه و ارتباط کوانتومی ایجاد شده است.

حالات تک- فوتون به عنوان کیوبیت<sup>1</sup> های متحرک در رمزگذاری کوانتومی عمل می کنند. کیوبیت ها را می توان در راستای حالات قطبیده ی تک- فوتون ها رمز گذاری کرد؛ امنیت انتقال بر این واقعیت استوار است که یک تک فوتون قابل مشاهده و حالت کوانتومی نامعلوم آن قابل کپی کردن نیستند.

در الکترو دینامیک کوانتومی کاواک (CQED)، حالات فوک تک- فوتون توسط تکنیک  $\pi$ - پالس در یک کاواک مایکروویو و توسط تکنیک STIRAP در یک کاواک اپتیکی تولید می شود. ولی توجه داریم که تکنیک  $\pi$ - پالس در برابر تغییرات پارامترهای پالسی و شرط تشدید کامل ابزار قوی ای به شمار نمی آید. در فرآیند STIRAP با سه پایه<sup>2</sup> در یک سیستم اتمی چهار تراز ی که با یک مد کاواک و دو پالس لیزری برهمکنش دارد و در طرح جفتیدگی خود دارای دو حالت تاریک تبهگن کلی می باشد، مورد مطالعه قرار می گیرد. فرآیند STIRAP کسری نیز در یک کاواک اپتیکی برای ایجاد در هم تنیدگی اتم- فوتون و اتم- اتم به کار می رود. انتقال بی درروی بیکروماتیک<sup>3</sup> در یک کاواک مایکروویو نیز تکنیک قوی دیگری برای تولید تعداد کنترل شده ای از فوتون ها در یک مد کاواک است. SCRAP نیز تکنیک قدرتمندی است که در آن انرژی تراز هدف  $|+\rangle$  از طریق تشدید توسط یک جابه جایی استارک دینامیک کند- تغییر جاروب می شود و انتقال کامل جمعیت را از تراز پایه ی  $|-\rangle$  به حالت تحریکی  $|+\rangle$  سبب می گردد. در این روش از یک پالس لیزر ( پمپ ) که طوری تنظیم گردیده است که به مقدار جزئی از تشدید تک فوتونی بین ترازها فاصله دارد و از یک پالس غیر تشدید ی نسبتاً قوی ( میدان استارک ) که ترازها را از طریق تشدید توسط یک جابه جایی استارک دینامیک جاروب می کند، استفاده می شود. تأخیر زمانی میان پالس های استارک و پمپ باعث می شود که در پایان فرآیند تمام جمعیت در تراز تحریکی قرار گیرند.

<sup>1</sup> qubit

<sup>2</sup> tripod

<sup>3</sup> Bichromatic

این روش می تواند یک حالت کوانتومی را توسط شبکه بندی کوانتومی انتقال دهد. ایده اساسی در یک شبکه کوانتومی انتقال تراز کوانتومی از یک گره به گره دیگر به کمک یک حامل (کانال کوانتومی) می باشد. در این میان برای انجام فرآیند انتقال حالت کوانتومی (QST) ابتدا حالت کوانتومی از یک گره به حامل و دوباره از حامل به گره هدف انتقال داده می شود. در این پایان نامه، یک روش به کارگیری CQED برای تولید حالت های تبهگنی تک- فوتون، فوتون-اتم و اتم- اتم بر پایه ی روش SCRAP به منظور به کارگیری در سیستم های لیزری ارائه و با استفاده از روش SCRAP در یک کاواک، یک روش قوی برای QST برای انتقال تراز نامعلوم یک اتم دو تراز به اتم دیگری که در آن اتم ها به طور مستقیم با هم در ارتباط نیستند، پیشنهاد شده است. همچنین ایده ی QST را به یک شبکه کوانتومی گسترش می دهیم، جایی که انتقال تراز از یک کاواک به کاواک دیگر را به طور فضایی از هم جدا می کند. برای این منظور ما از اتم های با طول عمر طولانی به عنوان حامل استفاده نموده و فرآیند QST را برای انتقال حالت کاواک به یک اتم و از آنجا به کاواک هدف به کارگیری می کنیم. بدین منظور در فصل اول از این پایان نامه به بررسی کوانتش میدان الکترومغناطیس پرداخته ایم. در فصل دوم اندرکنش اتم با میدان های کلاسیکی و کوانتومی بررسی شده و برخی از مفاهیم اساسی مکانیک کوانتومی که در فصول بعدی کاربرد دارد بیان گردیده است. در فصل سوم روش SCRAP به طور کامل برای اتم های دو و سه تراز بررسی گردیده است و در نهایت در فصل چهارم از روش SCRAP برای تولید حالت های در هم تنیده و تشریح اثرات ناهمدوسی بر انتقال جمعیت بهره گرفته شده است.

# فصل اول

## کوانتش میدان الکترومغناطیسی

### مقدمه

این فصل را با بحث در مورد کوانتش میدان الکترومغناطیسی شروع و در مورد بعضی از خواص میدان کوانتیزه صحبت خواهیم نمود. به همین منظور نخست در بخش ۱-۱ هامیلتونی یک میدان کوانتومی را به دست آورده و در بخش ۱-۲ ویژه حالتها و ویژه مقادیرهای این میدان را بررسی خواهیم کرد و در نهایت در بخش ۱-۳ حالت‌های فوک را به دست می آوریم.

### ۱-۱ کوانتش میدان الکترومغناطیس آزاد:

با توجه به موضوع کوانتش میدان الکترومغناطیسی در فضای آزاد، بهتر است که با تشریح کلاسیکی میدان براساس معادلات ماکسول شروع کنیم. این معادلات بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی  $\vec{E}$  و  $\vec{H}$  را به ترتیب با بردارهای جابجائی و القائی  $\vec{D}$  و  $\vec{B}$  مرتبط می سازند و دارای روابط زیر می باشند (در واحدهای mks) [۱]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1-1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2-1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3-1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0. \quad (4-1)$$

با روابط ترکیبی زیر:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (5-1)$$



$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E}. \quad (6-1)$$

به طوری که  $\epsilon_0$  و  $\mu_0$  به ترتیب گذردهی فضای آزاد و نفوذپذیری هستند و داریم  $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$  که  $c$  نشان دهنده سرعت نور در خلأ است [۱].

در ادامه با به کارگیری کرل معادله ی (۲-۱) و با استفاده از معادلات (۱-۱)، (۴-۱)، (۵-۱) و (۶-۱) متوجه می شویم که  $\bar{E}(\vec{r}, t)$  معادله موجی زیر را برآورده می کند:

$$\nabla^2 \bar{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (7-1)$$

در بدست آوردن رابطه ی (۷-۱) از رابطه ی  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E}$  نیز استفاده کرده ایم.

### ۱-۱-۱ بسط مد میدان

ابتدا میدان الکتریکی را طوری در نظر می گیریم که این میدان وابستگی فضایی مناسب را برای یک تشدید گر کاواکی به طول  $L$  داشته باشد (شکل ۱-۱) و به شکل خطی در جهت  $x$  قطبیده و در جهت مدهای نرمال کاواک بسط داده شده باشد:

$$E_x(z, t) = \sum_j A_j q_j(t) \text{Sin}(k_j z). \quad (8-1)$$

به طوری که  $q_j$  دامنه ی مد نرمال با بعد طول است،  $k_j = \frac{j\pi}{L}$  با  $j = 1, 2, 3, \dots$  و

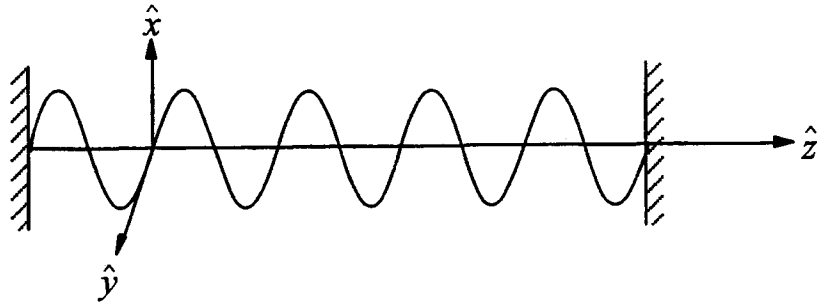
$$A_j = \left( \frac{2v_j^2 m_j}{V \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9-1)$$

به طوری که  $v_j = \frac{j\pi c}{L}$  فرکانس ویژه کاواک و  $V = AL$  (سطح مقطع تشدیدگر ایتمیکی است) حجم تشدیدگر

است و  $m_j$  یک ثابت با بعد جرم است. دلیل حضور ثابت  $m_j$  ایجاد یک تشابه بین مسئله دینامیکی یک تک-مد

میدان مغناطیسی و یک مثال ساده نوسانگر هارمونیک است. نوسانگر مکانیکی معادل، جرم  $m_j$  خواهد داشت و  $q_j$

مختصات کارترین است. مؤلفه ی غیرصفر میدان مغناطیسی  $H_y$  در کاواک از معادله ی (۸-۱) به دست می آید:



شکل (۱-۱): میدان مغناطیسی با فرکانس  $\nu$  در داخل یک کاواک: فرض شده است که میدان عرضی و در جهت  $x$  قطبیده باشد.

$$H_y = \sum_j A_j \left( \frac{q_j \epsilon_0}{k_j} \right) \cos(k_j z). \quad (10-1)$$

همیلتونی کلاسیک برای میدان به صورت زیر است:

$$H = \frac{1}{2} \int_V d\tau (\epsilon_0 E_x^2 + \mu_0 H_y^2) \quad (11-1)$$

به نحوی که انتگرال روی کل حجم کاواک است. در ادامه با جایگذاری  $H_y, E_x$  به ترتیب از معادلات (۸-۱) و (۱-۱)

(۱۰) در معادله (۱۱-۱) داریم:

$$H = \frac{1}{2} \sum_j (m_j \nu_j^2 q_j^2 + m_j q_j'^2) = \frac{1}{2} \sum_j \left( m_j \nu_j^2 q_j^2 + \frac{p_j^2}{m_j} \right). \quad (12-1)$$

به طوری که  $P_j = m_j q_j'$  تکانه ی کانونیکی مد  $j$  ام است. معادله ی (۱۲-۱) همیلتونی میدان تابشی را به صورت انرژی نوسانگرهای مستقل تشریح می کند. بنابراین هر مد میدان معادل دینامیکی برای یک نوسانگر هارمونیک مکانیکی است.

### ۲-۱-۱ کوانتس

مسئله دینامیکی حاضر را می توان با در نظر گرفتن  $P_j, q_j$  به عنوان عملگرهایی که از روابط جابجایی زیر پیروی می

کنند، کوانتیزه کرد:

$$[q_j, P_{j'}] = i \hbar \delta_{jj'}, \quad (13-1)$$

$$[q_j, q_{j'}] = [P_j, P_{j'}] = 0. \quad (14-1)$$

برای راحتی تبدیل های کانونیکی  $a_j, a_j^\dagger$  را در نظر می گیریم:

$$a_j e^{-i\nu_j t} = \frac{1}{\sqrt{2m_j \hbar \nu_j}} (m_j \nu_j q_j + iP_j), \quad (15-1)$$

$$a_j^\dagger e^{i\nu_j t} = \frac{1}{\sqrt{2m_j \hbar \nu_j}} (m_j \nu_j q_j - iP_j). \quad (16-1)$$

همیلتونی (12-1) با در نظر گرفتن عبارتهای  $a_j, a_j^\dagger$  به شکل زیر تبدیل می شود:

$$H = \hbar \sum_j \nu_j (a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2}). \quad (17-1)$$

روابط جابجایی بین  $a_j, a_j^\dagger$  از روابط جابجایی بین  $P_j, q_j$  پیروی می کند:

$$[a_j, a_{j'}^\dagger] = \delta_{jj'}, \quad (18-1)$$

$$[a_j, a_{j'}] = [a_j^\dagger, a_{j'}^\dagger] = 0. \quad (19-1)$$

عملگرهای  $a_j, a_j^\dagger$  به ترتیب به عنوان عملگرهای نابودی و خلق شناخته می شوند. دلیل این نامگذاری در بخش بعد به وضوح مشخص می شود. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی (معادلات (1-8) و (1-10)) براساس عبارتهای  $a_j, a_j^\dagger$  فرم زیر را به خود می گیرند:

$$E_x(z, t) = \sum_j \varepsilon_j (a_j e^{-i\nu_j t} + a_j^\dagger e^{i\nu_j t}) \text{Sin}(k_j z), \quad (20-1)$$

$$H_y(z, t) = -i \varepsilon_0 z \sum_j \varepsilon_j (a_j e^{-i\nu_j t} - a_j^\dagger e^{i\nu_j t}) \text{Cos}(k_j z). \quad (21-1)$$

به طوری که کمیت

$$\varepsilon_j = \left( \frac{\hbar \nu_j}{\varepsilon_0 V} \right)^2. \quad (22-1)$$

دارای ابعاد میدان الکتریکی است.

تاکنون ما کوانتس میدان تابشی را در یک کاواک یک بعدی محدود در نظر گرفته بودیم ولی حالا می توانیم میدان را در یک فضای نامحدود به صورت زیر کوانتیزه کنیم.

میدان را در یک کاواک مکعبی محدود ولی بزرگ به ضلع  $L$  و کاواک را صرفاً به عنوان یک منطقه از فضا، بدون مرز مشخصی در نظر می گیریم. در این حالت جوابهای موج جاری را به جای جوابهای موج ایستا در بالا قرار می دهیم و شرایط مرزی دوره ای را وارد می کنیم.

میدانهای الکتریکی و مغناطیسی کلاسیک را می توان براساس عبارتهایی از امواج مسطح بسط داد:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_k \hat{\epsilon}_k \epsilon_k \alpha_k e^{-i\nu_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} + c.c., \quad (23-1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_k \frac{\vec{k} \times \hat{\epsilon}_k}{\nu_k} \epsilon_k \alpha_k e^{-i\nu_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} + c.c., \quad (24-1)$$

جایی که جمع روی یک مجموعه ی نامحدود از مقادیر بردار موج  $\vec{k} \equiv (k_x, k_y, k_z)$  گرفته شده و  $\hat{\epsilon}_k$  بردار واحد پولاریزاسیون و  $\alpha_k$  یک دامنه ی بدون بعد است و

$$\epsilon_j = \left( \frac{\hbar \nu_j}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (25-1)$$

می باشد. در معادلات (23-1) و (24-1)،  $c.c.$  به عنوان مزدوج مختلط قرار داده شده است و شرایط مرزی دوره ای این نتیجه را می دهند که:

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (26-1)$$

جایی که  $n_x, n_y, n_z$  اعداد صحیح هستند  $(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ . یک مجموعه از اعداد  $(n_x, n_y, n_z)$  به عنوان یک مد الکترومغناطیسی تعریف می شوند.

میدان تابشی به خاطر مشخص کردن  $\alpha_k, \alpha_k^*$  به ترتیب با عملگرهای نوسانگر هارمونیک  $a_k, a_k^\dagger$  کوانتیزه شده است و این دو عملگر رابطه جابجایی  $[a_k, a_k^\dagger] = 1$  را ارضاء می کنند. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی کوانتیزه شکل زیر را به خود می گیرند: