

دانشگاه یزد  
دانشکده فیزیک  
گروه اتمی و مولکولی

پایان نامه  
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد  
فیزیک اتمی و مولکولی

مطالعه شتاب دهنده‌های خطی الکترواستاتیک و طراحی یک نمونه با  
انرژی ۲ مگا الکترون ولت

استاد راهنما:

دکتر عباس بهجت

استاد مشاور:

سید مصطفی ساداتی

پژوهش و نگارش: سید خلیل موسوی

زمستان ۱۳۸۹

تقدیم بہ

دروماہ  
♦

عزیزم  
♦

## شکر و قدردانی

بعد از پاس حق، بر خود لازم می‌دانم که از کلیه کسانی که به انجمنی مختلف در تهیه و اعتلا بخشیدن به این پژوهش و امور مربوط به آن مرایاری نموده -

اند، تقدیر و شکر نمایم.

پیشاپیش از استاد ارجمند و با اخلاق، جناب آقای دکتر عباس بخت استاد راهنمای پایان نامه که بارها بهمانی های عالمانه و دلسوزانه ی خویش در تمامی

مراحل انجام کار مرایاری فرموده اند، کمال شکر و قدردانی را دارم.

همچنین از جناب آقای مهندس سید مصطفی ساداتی استاد مشاور پایان نامه که از راهنمایی های ارزنده شان در طول مراحل تحقیق استفاده نموده ام،

تقدیر و شکر می‌نمایم.

از اساتید محترم دانشکده فیزیک و از سایر دوستان و عزیزانی که در انجام مراحل تحقیق همکاری صمیمانه ای داشته اند کمال شکر و سپاسگزاری را دارم.

## چکیده

در این پایان‌نامه یک شتاب‌دهنده الکترواستاتیک با انرژی ۲ مگا الکترون ولت طراحی و ارائه شده است. پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد که در سه فصل اول آن به ترتیب به بررسی دینامیک ذرات باردار، اپتیک ذرات باردار و عدسی‌های الکترواستاتیکی و مغناطیسی پرداخته شده است. در فصل چهارم با استفاده از نرم افزارهای SIMION 3D و Matlab به شبیه‌سازی و طراحی سیستم‌های استخراج‌کننده، سیستم همگراکننده و همچنین سیستم شتاب‌دهی و لوله رانش پرداخته‌ایم. در نهایت یک سیستم شتاب‌دهنده الکترواستاتیکی برای شتاب الکترون تا انرژی ۲ مگا الکترون ولت با آمیتانس کم طراحی کرده و ارائه داده‌ایم.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول
۱	دینامیک ذرات باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی
۲	۱-۱- مقدمه
۲	۲-۱- تعیین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی
۳	۳-۱- تعیین مولفه‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی
۳	۳-۱-۱- روشهای تحلیلی و میدان‌های پتانسیل متقارن محور
۴	۳-۱-۱-۱- پتانسیل و میدان یک عدسی استوانه‌ای دو عنصری
۷	۳-۱-۱-۲- پتانسیل و میدان یک عدسی دهانه‌ای
۱۰	۳-۱-۲- روشهای محاسبات عددی
۱۰	۳-۱-۲-۱- روش جداسازی متغیرها
۱۰	۳-۱-۲-۲- روش اختلاف محدود FDM
۱۱	۳-۱-۲-۳- روش اجزای محدود FEM
۱۱	۳-۱-۲-۴- روش عنصرمرزی BEM یا روش چگالی بار
۱۱	۴-۱- شکل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در عدسی‌ها
۱۳	۵-۱- معادله حرکت ذرات باردار در میدان الکتروستاتیک
۱۳	۵-۱-۱- معادله حرکت باریکه ذرات پیرامحور
۱۵	۶-۱- دینامیک نسبیتی
۱۵	۶-۱-۱- جرم نسبیتی

۱۶	۱-۶-۲- تکانه نسبی ذره
۱۷	۱-۶-۳- انرژی نسبی
۱۸	۱-۷- تصحیح معادله حرکت در میدان الکترواستاتیکی با در نظر گرفتن اثرات نسبی ..... ۱۸
	۱-۸- معادله مسیر نهایی برای یک ذره باردار در میدان الکتریکی و مغناطیسی با در
۲۰	نظرگرفتن اثرات نسبی
۲۳	فصل دوم
۲۳	باریکه‌های یونی و الکترونی با انرژی بالا
۲۴	۲-۱- مقدمه
۲۴	۲-۲- مقایسه بین اپتیک ذرات باردار و اپتیک نوری
۲۴	۲-۲-۱- اپتیک هندسی و اپتیک فیزیکی ذرات باردار
۲۴	۲-۲-۱-۱- اپتیک هندسی
۲۴	۲-۲-۱-۲- اپتیک فیزیکی
۲۶	۲-۳- عدسی‌ها در اپتیک نوری و الکترونی
۲۷	۲-۳-۱- عدسی الکترواستاتیک به عنوان یک عدسی ضخیم
۲۸	۲-۳-۲- عدسی‌های الکترواستاتیک به عنوان یک عدسی نازک
۲۸	۲-۴- پارامترهای باریکه ذرات باردار شدید
۲۸	۲-۴-۱- جریان باریکه
۲۹	۲-۴-۱-۱- حد جریان باریکه‌های الکترونی نسبی شدید
۳۰	۲-۴-۲- پروینس
۳۱	۲-۴-۳- درخشندگی
۳۱	۲-۴-۴- امیتانس
۳۳	۲-۵- اپتیک باریکه خطی با بار فضایی

۳۳	..... ۱-۵-۲- تئوری باریکه با بار فضایی
۳۵	..... ۲-۵-۲- روش تقریبی برای محاسبه بارفضایی
۳۶	..... ۳-۵-۲- انتشار باریکه الکترونی نسبیتی تحت عمل میدان‌های خودی در کانال خلاء
۳۹	..... فصل سوم
۳۹	..... عدسی‌های الکترواستاتیک و مغناطیسی
۴۰	..... ۱-۳- مقدمه
۴۰	..... ۲-۳- انواع عدسی‌ها
۴۱	..... ۱-۲-۳- عدسی الکترواستاتیک
۴۲	..... ۱-۱-۲-۳- عدسی‌های دو الکتروودی
۴۳	..... ۲-۱-۱-۳- عدسی‌های سه الکتروودی
۴۴	..... ۳-۱-۱-۳- عدسی‌های چهار الکتروودی
۴۵	..... ۴-۱-۱-۳- عدسی‌های پنج الکتروودی
۴۷	..... ۱-۲-۳- عدسی‌های مغناطیسی
۴۷	..... ۱-۱-۲-۳- عدسی مغناطیسی سلونوئیدی
۴۹	..... ۲-۱-۲-۳- عدسی قطاع مغناطیسی
۵۳	..... ۳-۱-۲-۳- عدسی دو قطبی مغناطیسی
۵۴	..... ۴-۱-۲-۳- عدسی چهار قطبی مغناطیسی
۵۹	..... فصل چهارم
	طراحی و شبیه‌سازی شتاب‌دهنده الکتروستاتیکی الکترون با انرژی ۲ مگا الکترون
۵۹	..... ولت ( 2MeV )
۶۰	..... ۱-۴- مقدمه
۶۰	..... ۱-۲-۴- منابع الکترونی
۶۱	..... ۲-۲-۴- سیستم استخراج‌کننده باریکه الکترونی



- ۷۰-۳-۲-۴- مقدار پذیرش باریکه در سیستم استخراج کننده .....
- ۷۳-۳-۴- طراحی و شبیه‌سازی سیستم‌های همگراکننده باریکه ذرات باردار .....
- ۸۴-۴-۴- سیستم‌های موازی کننده (خنک کننده) باریکه های الکترونی .....
- ۸۵-۵-۴- سیستم‌های شتاب‌دهنده باریکه‌های الکترونی .....
- ۸۶-۱-۵-۴- تقسیم پتانسیل بین الکترودهای شتاب‌دهنده .....
- ۸۷-۲-۵-۴- اثرات هندسه و لبه‌های الکترودها بر باریکه الکترونی .....
- ۹۰-۳-۵-۴- اثرات شتاب بر امیتانس باریکه .....
- ۹۴-۶-۴- سیستم‌های انتقال باریکه‌های الکترونی .....
- ۹۶-۷-۴- شبیه‌سازی و طراحی چند نمونه از سیستم شتاب‌دهنده .....
- ۱-۷-۴- سیستم شتاب‌دهنده تشکیل شده از سیستم‌های استخراج کننده ، همگرا کننده و چند الکترودهای شتاب .....
- ۱۰۰-۲-۷-۴- استفاده از یک سیستم خنک کننده در سیستم شتاب‌دهنده .....
- ۳-۷-۴- شبیه‌سازی و طراحی ستون شتاب دهنده نهایی با مونتاژ قسمت‌های تشکیل دهنده ستون .....
- ۱۰۳-۴-۷-۴- بررسی تغییرات سطح مقطع باریکه و مساحت اشغال شده در فضای فاز توسط ذرات باریکه .....
- ۱۱۳-۱-۴-۷-۴- بررسی سطح مقطع باریکه .....
- ۱۱۵-۲-۴-۷-۴- بررسی مساحت اشغال شده توسط ذرات در فضای فاز .....
- ۱۱۸-۸-۴- نتیجه گیری .....
- ۱۱۹-۹-۴- پیشنهادات .....
- ۱۲۰- منابع و مآخذ .....

## فصل اول

دینامیک ذرات باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

## ۱-۱- مقدمه

آگاهی از چگونگی حرکت ذرات باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی از اطلاعات مهم مورد نیاز در شتاب‌دادن ذرات می‌باشد. به عبارت دیگر باید بدانیم که دقیقاً چه عواملی باعث شتاب، جهت‌دادن، همگرا نمودن و واگرایی ذرات باردار می‌شود. در این فصل ضمن بدست آوردن معادله‌ی کلی حاکم بر حرکت ذره در میدان الکترومغناطیسی، دینامیک نسبیتی (دینامیک ذرات با سرعت‌های بالا) را نیز بررسی خواهیم کرد.

## ۱-۲- تعیین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

می‌توان از معادله نیوتن، لاگرانژی، هامیلتونی، و معادلات اولر برای بدست آوردن معادله‌ی حاکم بر حرکت ذرات باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی استفاده کرد [۱ و ۲ و ۳]. یکی از هدف‌های اصلی ایجاد میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی هدایت، کانونی کردن، منحرف کردن و، شتاب دادن و شتاب گرفتن از ذرات باردار می‌باشد. بنابراین باید به این موضوع توجه داشت که چه موقعی و برای چه کاری از کدام میدان‌ها استفاده کنیم. از مقایسه انرژی مغناطواستاتیکی در واحد حجم برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی داریم:

$$\frac{F_M}{F_E} = \frac{V}{C} \quad (1-1)$$

همان‌طور که از رابطه (۱-۱) مشاهده می‌کنیم در سرعت‌های پایین میدان الکتریکی موثرتر از میدان مغناطیسی است. به همین دلیل اغلب در سرعت‌های پایین ذرات از میدان الکتریکی و در سرعت‌های نسبیتی از میدان‌های مغناطیسی استفاده می‌شود. معادله لورنتس به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (2-1)$$

رابطه (۱-۲) نشان می‌دهد که فقط میدان الکتریکی می‌تواند به ذرات باردار نیرو وارد کند و باعث افزایش سرعت، و در نتیجه شتاب ذره باردار شود.

از میدان مغناطیسی بیشتر برای جهت دادن به ذرات باردار استفاده می‌شود، اما در انرژی-های بالا این میدان برای همگرایی ذرات باردار نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد در حالی که تندی ذره در میدان مغناطیسی تغییر نمی‌کند.

### ۱-۳- تعیین مولفه‌های میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

به طور کلی برآورد و تعیین پتانسیل، میدان الکتریکی و مغناطیسی به سه روش انجام می‌گیرد:

۱. روش تحلیلی

۲. اندازه‌گیری میدان‌ها و روش‌های مقایسه‌ای

۳. روش‌های محاسبات عددی

روش‌های تحلیلی و روش‌های اندازه‌گیری میدان‌ها به طور مفصل در مراجع [۳ و ۲] توضیح داده شده است. در اینجا تنها به چند مسئله که با روش تحلیلی حل شده‌اند اشاره خواهیم کرد و یک نگاه کلی هم به روش محاسبات عددی خواهیم داشت.

### ۱-۳-۱- روش‌های تحلیلی و میدان‌های پتانسیل متقارن محور

در مراجع مختلف نشان داده شده است که برای بدست آوردن مولفه‌های پتانسیل در تمام نقاط فضا بدست آوردن و داشتن پتانسیل محوری  $U(Z)$  کافی می‌باشد. بیشتر ابزار کانونی‌کننده در اپتیک یونی و الکترونی، شامل میدان‌های مغناطیسی و یا الکتریکی متقارن محور هستند که می‌توانند بوسیله یک تابع پتانسیل اسکالر نشان داده شوند. از روش‌های ساده و سریعی که برای چنین پتانسیل‌هایی می‌توان استفاده نمود روش جداسازی متغیرها است. اغلب ابزار اپتیک یونی دارای تقارن سمتی می‌باشند. به عبارتی مستقل از مختصه  $\alpha$  هستند. به همین دلیل می‌توان معادله لاپلاس را در غیاب بار فضایی به صورت زیر نشان داد:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3-1)$$

با استفاده از عملیات‌های ریاضی و با کمک توابع بسل و نیومن پتانسیل در تمام فضا به

شکل زیر به دست می‌آید:

$$u(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U(z + jr \cos \xi) d\xi \quad (4-1)$$

این عبارت، حقیقت مهمی را نشان می‌دهد و آن این که یک میدان متقارن محوری را می‌-

توان به وسیله توزیع پتانسیل آن در طول محور به طور کامل تعیین نمود.

### ۱-۳-۱- پتانسیل و میدان یک عدسی استوانه‌ای دو عنصری

به طور کلی پتانسیل محوری برای عدسی‌های دو الکترودی با پتانسیل  $V_1$  و  $V_2$ ، به صورت

رابطه زیر تعریف می‌شوند.

$$V(Z) = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) + \frac{1}{2}(V_2 - V_1)U(z) = V_1 + (V_2 - V_1)\Psi(Z) \quad (5-1)$$

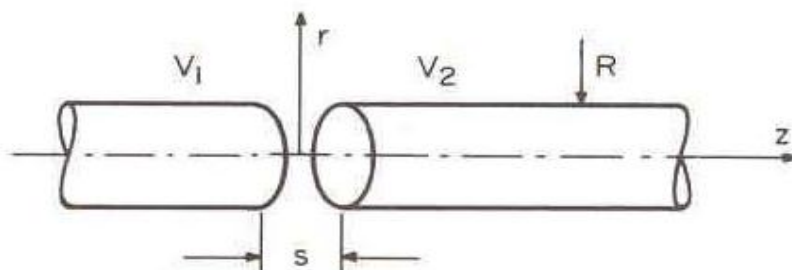
که در  $Z \rightarrow \mp\infty$  تابع‌های  $\Psi(Z)$  و  $U(z)$  به ترتیب دارای مقادیر بین 0، 1 و  $\pm 1$  می‌باشند،

$U(z)$  و  $\Psi(Z)$  برای عدسی‌ها مختلف (مثلاً با فاصله متفاوت بین دو الکترود برای عدسی‌ها) دارای

شکل متفاوت می‌باشد [4]. به عنوان یک مثال بسیار ساده دو استوانه هم محور به طول بی‌نهایت،

هم قطر، با ضخامت نازک و شعاع  $R$  که با فاصله  $s$  از یکدیگر جدا شده‌اند را بررسی می‌کنیم.

استوانه چپ دارای پتانسیل  $V_1$  و استوانه راست دارای پتانسیل  $V_2$  است.

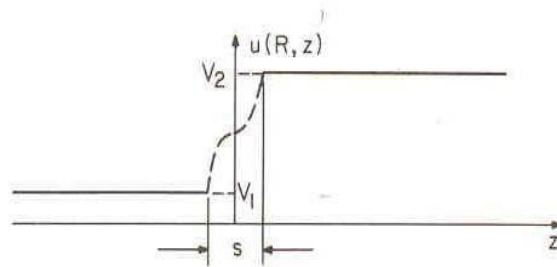


شکل ۱-۱: دو استوانه هم قطر و هم محور با فاصله  $s$

هیچ سیستم حقیقی بی‌نهایت نازک نیست، اما از تاثیر ضخامت‌های متناهی اقلأ در نسبت-

های  $\frac{s}{R}$  کوچک می‌توان صرف‌نظر کرد [۵ و ۴].

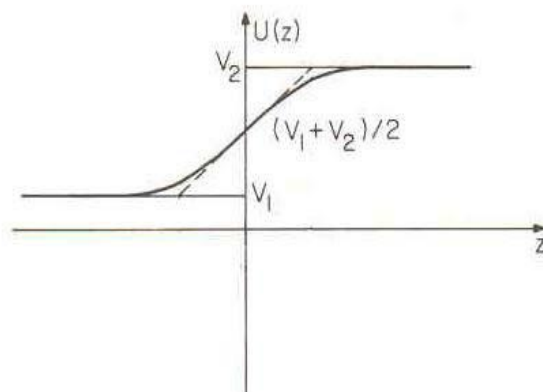
ما پتانسیل را در سطح استوانه‌ها می‌دانیم، اما در فاصله میان الکترودها باید توزیع پتانسیل را بدست آورد. البته روشن است که در انتهای استوانه‌ها قدرت میدان حداکثر است و پتانسیل با شیب زیاد تغییر می‌کند، سرعت این تغییر نیز در فاصله میانی کمترین مقدار را دارا است (شکل ۱-۲).



شکل ۱-۲: توزیع پتانسیل سیستم دو استوانه‌ای در طول مرز آن ( $R=r$ )

با همین تحلیل می‌توان شکل توزیع پتانسیل محوری را تقریباً به صورت شکل (۱-۳) در

نظر گرفت.



شکل ۱-۳: توزیع پتانسیل سیستم دو استوانه‌ای در طول محور آن

بر فرض مثال در ساده‌ترین شکل، می‌توان پتانسیل زیر را فرض کرد:

$$u(R, z) = \begin{cases} V_1 & \text{if } z \leq -s/2 \\ (V_1 + V_2)/2 + (V_2 - V_1)z/s & \text{if } -s/2 \leq z \leq s/2 \\ V_2 & \text{if } z \geq s/2 \end{cases} \quad (۶-۱)$$

با استفاده از معادله (۴-۱) و در حد  $s = 0$  می‌توان بدست آورد:

$$u(r, z) = \frac{V_2 - V_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_0(\kappa r)}{I_0(\kappa R)} \frac{\sin(\kappa z)}{\kappa} d\kappa + (V_1 + V_2)/2 \quad (۷-۱)$$

و برای توزیع پتانسیل محوری داریم:

$$U(z) = \frac{V_2 - V_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\tau z/R)}{\tau I_0(\tau)} d\tau + (V_1 + V_2)/2 \quad (۸-۱)$$

در مراجع مختلف با استفاده از تقریب‌های متفاوت، پتانسیل‌های متفاوتی برای این مسئله بدست آمده است. پتانسیل بدست آمده که از دقت بیشتری برخوردار است به صورت زیر تعریف می‌شود [۴و۲]:

$$U(z) = (V_1 + V_2)/2 + \frac{V_2 - V_1}{z\omega s/R} \ln \left[ \frac{\cosh[\omega(z + \frac{s}{2})/R]}{\cosh[\omega(z - \frac{s}{2})/R]} \right] \quad (۹-۱)$$

مقدار حدی در  $s = 0$  برابر است با:

$$U(z) = \frac{(V_1 + V_2)}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2} \tanh(\omega z/R) \quad (۱۰-۱)$$

که در این رابطه  $\omega = 1.318$  می‌باشد. کاملاً مشخص است که این توابع مشخصات شکل (۳-۱) را دارد.

در معادله (۹-۱)، خطایی وجود دارد که ناشی از تقریب مدل خطی [۵] می‌باشد. از این خطا زمانی که فاصله بین الکترودها کوچک باشد می‌توان صرف‌نظر کرد. اما اگر فاصله در مقایسه با شعاع، قابل مقایسه باشد خطا به شدت رشد خواهد کرد [۶].

روابط تحلیلی تنها در صورتی مفید هستند که:

(a) توزیع پتانسیل صحیحی را نشان دهند.

(b) ما را به جواب‌های مستدل و محکمی برای مشخصات کانونی هدایت کنند.

(c) ابزارهایی را برای محاسبات تقریبی فراهم کنند.

نتیجه اینکه مقدار دقیق مولفه‌های میدان سیستم‌های اپتیکی الکترون و یون که شامل الکترودهای استوانه‌ای یا قطب‌های استوانه‌ای است باید با اندازه‌گیری و یا با روش‌های محاسباتی تعیین شوند.

### ۱-۳-۲- پتانسیل و میدان یک عدسی دهانه‌ای

شکل (۴-۱) یک عدسی تک دهانه‌ای<sup>۱</sup> با شعاع داخلی  $R$  را نشان می‌دهد که در پتانسیل  $V_0$  قرار دارد و میان دو ناحیه با میدان یکنواخت  $E_1$  و  $E_2$  قرار گرفته است. وجود میدان‌های یکنواخت یک تقریب است که اگر الکتروود یا قطبی در همسایگی عدسی دهانه‌ای نباشد درست است، پتانسیل برای این حالت به صورت زیر به دست می‌آید.

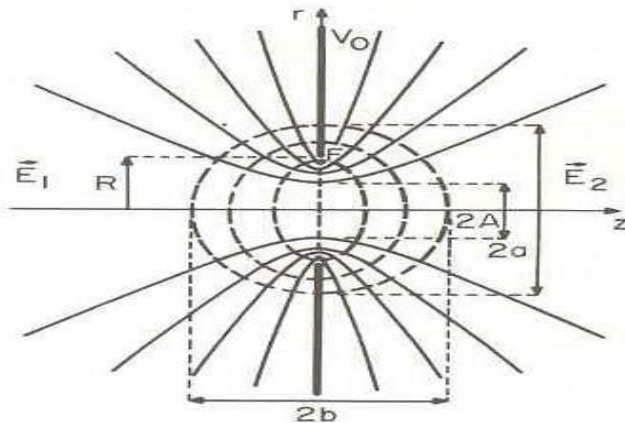
$$u(r, z) = V_0 - \frac{E_1 + E_2}{2} z + \frac{E_1 - E_2}{\pi} |z| \left( \frac{1}{\mu} + \text{arctag } \mu \right) \quad (11-1)$$

که  $\mu$  نیز عبارت است از

$$\mu = \left\{ \frac{1}{2 \left( \frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} - 1 \right)} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} - 1 \right)^2 + 4 \frac{z^2}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (12-1)$$

<sup>۱</sup>Single aperture lens





شکل ۱-۴: توزیع پتانسیل یک عدسی دهانه‌ای که دو میدان یکنواخت الکترواستاتیکی را از هم جدا کرده

در طول  $(r = 0)$ ،  $\mu = |z|/R$ ، پس خواهیم داشت:

$$U(z) = V_0 - \frac{E_1 + E_2}{2}z + \frac{R}{\pi}(E_1 - E_2)\left(1 + \frac{z}{R}\operatorname{arctag}\frac{z}{R}\right) \quad (13-1)$$

در درون حفره نیز برای  $r > R$ ،  $V_0$  را داریم و  $\mu \neq 0$  می‌باشد. اما برای  $r < R$ ،  $\mu = 0$

خواهیم داشت:

$$u(r, 0) = V_0 + \frac{E_1 - E_2}{\pi}(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \quad (14-1)$$

بنابراین برای مرکز حفره (مرکز عدسی) داریم.

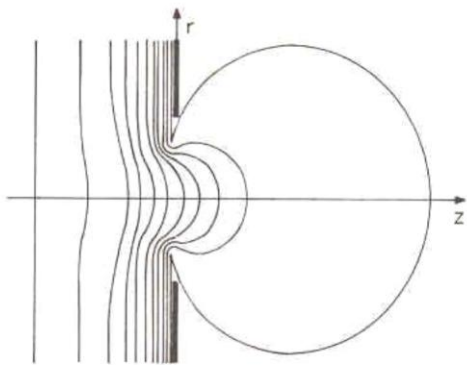
$$U(0) = u(0,0) = V_0 + (E_1 - E_2)R/\pi \quad (15-1)$$

اگر میدان‌های  $E_1$  و  $E_2$  دارای اندازه و راستای متفاوت باشند، یک نقطه زینی در سمت میدان ضعیف‌تر شکل می‌گیرد. اگر  $E_2 = -E_1$  باشد نقطه زینی در  $z = 0$  شکل می‌گیرد، سطوح هم‌پتانسیل چنین حالتی در شکل (۱-۵) نشان داده شده است. اگر راستای دو میدان یکسان باشد، سطوح هم‌پتانسیل از دهانه به سمت پتانسیل ضعیف‌تر نفوذ می‌کنند اما یکدیگر را قطع

نمی‌کنند. یکی از حالات جالب که در شکل (۶-۱) نشان داده شده است مربوط به حالتی است که میدان در یک سمت عدسی برابر صفر باشد.

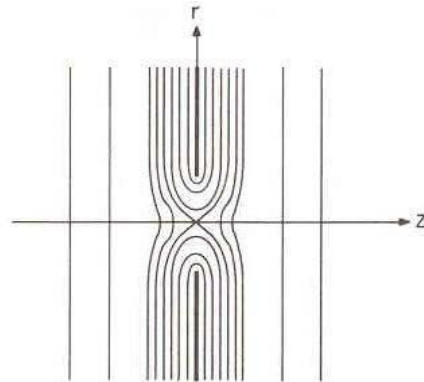
عدسی‌های تک دهانه در طراحی و ساخت چشمه‌های یون ابزاری مهم به شمار می‌روند

[۵].



شکل (۶-۱): سطوح هم‌پتانسیل یک عدسی تک دهانه-

ای برای حالت  $E_2 = 0$



شکل (۵-۱): سطوح هم‌پتانسیل یک عدسی تک

دهانه‌ای برای حالت  $E_2 = -E_1$

با توجه به جواب مسئله بالا می‌توان پتانسیل را با استفاده از برهم نهش پتانسیل‌های دو الکتروود دهانه‌ای که در فاصله  $s$  از یکدیگر قرار گرفته‌اند و یکی در پتانسیل  $V_1$  و دیگری در پتانسیل  $V_2$  قرار دارد به دست آورد. اگر  $R \ll S$  می‌توان فرض کرد که میدان میان الکتروودها (به استثنای نواحی دهانه‌ها) ثابت و به صورت زیر است:

$$E = (V_1 - V_2)/s \quad (۱۶-۱)$$

با استفاده از برهم‌نهش پتانسیل دو دهانه، پتانسیل محوری به صورت زیر به دست می‌آید.

$$U(z) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2} \phi(z) \quad (۱۷-۱)$$

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} \left[ (2z/s) \operatorname{arctg} \frac{s}{2R/s} - (2z/s - 1) \operatorname{arctg} \frac{2z/s - 1}{2R/s} \right] \quad (۱۸-۱)$$

نتیجتاً روش برهم‌نهمش توزیع پتانسیل چندین دهانه مستقل، روش نسبتاً صحیح و سریعی برای ارزیابی توزیع پتانسیل الکترودها یا قطب‌ها فراهم می‌سازد [۵].

در مرجع [۷] توزیع پتانسیل برای یک عدسی سه الکترودی با استفاده از بسط تابع‌های بسط بدست آورد شده است. در مرجع [۴] در مورد بدست آوردن توزیع پتانسیل به روش‌های مختلف به طور مفصل بحث شده است.

### ۱-۳-۲- روش‌های محاسبات عددی

بهترین روش به لحاظ سادگی و دقت جواب‌ها، برای تعیین تابع توزیع پتانسیل روش‌های محاسبات عددی است. برای بدست آوردن تابع توزیع پتانسیل روش‌های گوناگون محاسبات عددی وجود دارد که در زیر به برخی آنها به طور خلاصه اشاره می‌کنیم.

### ۱-۳-۲-۱- روش جداسازی متغیرها

همان‌طور که قبلاً اشاره شد از این روش با تقارن استوانه‌ای برای حل معادله لاپلاس استفاده می‌شود. در این روش معادله لاپلاس به صورت تعدادی تابع که هر یک وابسته به یک متغیر هستند نوشته می‌شوند [۴].

### ۱-۳-۲-۲- روش اختلاف محدود<sup>۲</sup> FDM

در این روش معادله پواسون را اغلب به کمک تکنیک‌های ۵ و ۹ نقطه‌ای حل می‌کنند [۲، ۴، ۵ و ۸].

---

<sup>۲</sup>Finite Difference Method

### ۱-۳-۲-۳- روش اجزای محدود FEM<sup>۳</sup>

در این روش از حل مسائل مرزی و معادله پواسون استفاده می‌شود. در این روش از مش‌های مثلثی استفاده می‌شود و مولفه‌های پتانسیل و میدان در رئوس مثلث‌ها به دست می‌آید [۴ و ۲].

### ۱-۳-۲-۴- روش عنصرمرزی BEM<sup>۴</sup> یا روش چگالی بار<sup>۵</sup>

در این روش سیستم عدسی‌های الکترواستاتیک تحت پتانسیل اعمال شده، با یک سیستم حلقه‌های بار با چگالی‌های غالباً یکنواخت جایگزین می‌شود [۴ و ۹]. در مقاله [۱۰]، از روش‌های FEM و BEM برای محاسبه عدسی‌های مغناطیسی الکترون با تقارن چرخشی استفاده شده است.

### ۱-۴- شکل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در عدسی‌ها

به علت اهمیت میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در اپتیک الکترونی و یونی (فصل دوم)، میدان‌هایی که می‌توانند در عدسی‌های مختلف (فقط عدسی‌های با تقارن محوری در نظر گرفته خواهد شد) به وجود آیند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. البته در اینجا فقط تعریف کلی از این میدان‌ها را خواهیم آورد، برای بحث بیشتر می‌توانید به مرجع [۳] رجوع کنید. همان طور که قبلاً گفته شد میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی که برای کانونی‌کردن، پراش، انحراف باریکه ذرات بکار می‌روند، دارای تقارن خاصی می‌باشند. به ترتیب شدت میدان، میدان‌های به‌کاربرده شده در اپتیک الکترونی و یونی عبارتند از:

الف- میدان سیلندری

<sup>۳</sup>Finite Element Method

<sup>۴</sup>Boundary Element Method

<sup>۵</sup>Charge Density