بسم الله الرحمن الرحیم

**دانشگاه صنعتی اصفهان**

دانشکده‌ی فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد فیزیک گرایش ذرات بنیادی

# نظریه‌ی میدان اسکالر با جفت‌شدگی همدیس در پس‌زمینه‌ی $BTZ$ و $O-BTZ$

**شهرام آغاز**

استاد راهنما

**دکتر فرهنگ لران**

**۱۳۹۲**

**دانشگاه صنعتی اصفهان**

دانشکده‌ی فیزیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد فیزیک گرایش ذرات بنیادی

شهرام آغاز

تحت عنوان

# نظریه‌ی میدان اسکالر با جفت‌شدگی همدیس در پس‌زمینه‌ی $BTZ$ و $O-BTZ$

در تاریخ ۱۳۹۲/۹/۲۵ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی وتصویب نهایی قرار گرفت

۱. استاد راهنمای پایان نامه — دکتر فرهنگ لران

۲. استاد مشاور پایان نامه — دکتر منصور حقیقت

۳. استاد داور — دکتر بهروز میرزا

۴. استاد داور — دکتر مسلم زارعی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر مجتبی اعلایی

**از**

**استاد راهنمای ارجمندم آقای دکتر لران به خاطر راهنمایی‌های بسیار ارزشمندشان،**

**استاد مشاور پایان‌نامه آقای دکتر منصور حقیقت به خاطر مطالعه پایان‌نامه و رهنمودهای ارزشمندشان،**

**اساتید داور آقای دکتر میرزا وآقای دکتر زارعی به خاطر مطالعه پایان‌نامه و حضور درجلسه‌ی دفاع،**

**و تمام دوستانی که در به انجام رساندن این پایان‌نامه مرا یاری کردند**

**صمیمانه متشکرم.**

**کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات،**

**ابتکارات ونوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این**

**پایان نامه(رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان می باشد.**

تقدیم به ایران زمین

## فهرست مطالب

## چکیده

در این پروژه به بررسی گرانش در ۱+۲ بعد می‌پردازیم. مسئله‌ی گرانش۱+۲ بعدی ازآن نظر برای ما مهم است که به دلیل درجه آزادی کمتر، پیچیدگی محاسباتی گرانش۱+۳ بعدی را ندارد. گرانش در۱+۲ بعد را با معرّفی فضای پاددوسیته آغاز می‌کنیم. فضای پاددوسیته حلّ معادله‌ی انیشتین با ثابت کیهان‌شناسی منفی است. با همانسازی یک مختصّه از متریک فضای پاددوسیته سیاه‌چاله‌ی $BTZ$ از این فضا به‌دست می‌آید. سیاه‌چاله‌ی۱+۲ بعدی دارای شباهت‌های زیادی با سیاه‌چاله‌های کر و شوارتزشیلد است؛ دارای افق رویداد درونی و بیرونی است و با جرم و تکانه‌ی زاویه‌ای منحصربه فردی توصیف می‌شود. از این رو گرانش در ۱+۲ بعد می‌تواند یک مدل کارآمد برای فهم گرانش ۱+۳ بعدی باشد.

پس ازآن به بحث روی هندسه‌ی کرمچاله‌ها به عنوان یک حل دیگر از معادلات اینشتین با ثابت کیهانشناسی منفی می‌پردازیم. کرمچاله‌های لورنتسی واقلیدسی را مظالعه می‌کنیم. مطالعه به این معنی که فضا-زمان این کرمچاله-ها را از نظر گروه تقارنی بررسی می‌کنیم.

با توجه به اینکه در ساختار فضا-زمان سیاه‌چاله‌ی $BTZ$ به منحنی‌های زمان‌گونه‌ی بسته برمی‌خوریم، برای رفع این ناسازگاری فیزیکی حلی به نام $BTZ - O$ ارائه شده است. ما در این پروژه به مطالعه این حل می‌پردازیم. ساختار $BTZ - O$ از این قرار است که یک اربیفلد $\mathbb{Z}_2$ را روی فضا-زمان $BTZ$ اعمال می‌شودکه از منظر هندسی به معنی تا شدن فضا-زمان $BTZ$ از بین دو افق است. در این هندسه دیگر منحنی زمان‌گونه‌ی بسته‌ایی وجود تدارد، بنابراین ساختار $BTZ - O$ از نظر عِلی کامل است.

در فصل سوم رفتار سیاه‌چاله‌های $BTZ$ و $BTZ - O$ را درحضور یک میدان اسکالر با جفت‌شدگی همدیس مطالعه می‌کنیم. از تابع دونقطه‌ای فضای $AdS_۳$ و روش تصویر، تابع دونقطه‌ای فضا-زمان $BTZ$ را بدست می‌آوریم. با استفاده از این تابع دو نقطه‌ای، مقدارچشم‌داشتی تانسور انرژی- تکانه حالت خلأ را حساب می‌کنیم. انگیزه‌ی ما برای محاسبه‌ی این کمیت در مورد سیاه‌چاله‌های چرخنده، مطالعه‌ی پایداری کوانتومی افق‌های سیاه‌چاله است. خواهیم دید این کمیت روی افق درونی $BTZ$ واگرا می‌شود و این بیان‌گرآن است که افق درونی $BTZ$ از نظرکوانتومی ناپایدار است. در حالی که با محاسبه‌ی تانسور انرژی- تکانه حالت خلأ $BTZ - O$ که فاقد افق رویداد درونی است، می‌بینیم که این مقادیر در سرتاسر فضا-زمان متناهی می‌شوند و این به آن معنی است که نظریه-ی اختلالی میدان‌های کوانتومی در پس‌زمینه‌ی $BTZ - O$ خودسازگار است.



**واژگان کلیدی:**

گرانش ۱+۲بعدی، سیاه‌چاله $BTZ$، کرمچاله، سیاه‌چاله $BTZ - O$، جفت‌شدگی همدیس

# فصل اول

## مقدّمه

در اوایل قرن بیستم میلادی وقتی که دو نظریه‌ی نسبیت‌عام و مکانیک کوانتومی متولد شد تصور انسان را از طبیعت دچار تحول کردند. تصور براین بود که فعل وانفعالات جهان اطراف ما را می‌توان بر اساس این دو نظریه توضیح داد. با شناخته شدن چهار نیروی حاکم بر طبیعت که عبارتند از نیروی هسته‌ای قوی، نیروی هسته‌ای ضعیف، نیروی گرانشی و نیروی الکترومغناطیس، این سوال مطرح شد که آیا این نیروها منشأ یکسانی دارند؟

تلاش‌هایی برای پاسخ به این پرسش انجام گرفت و از مهم‌ترین این تلاش‌ها می‌توان به نظریه‌ی الکتروضعیف اشاره کرد که فیزیک‌پیشه‌ها توانستند دو نیروی الکترومغناطیس و نیروی هسته‌ای ضعیف را با هم متحد کنند. در سطح پدیدارشناسی نیز دانشمندان از ترکیب نظریه‌ی کرومودینامیک کوانتومی و نظریه‌ی الکتروضعیف توانستند به یک مدل بسیار کارآمد به اسم مدل استاندارد برسند که این نظریه به خوبی این سه نیرو را با هم متحد می‌کند. تنها نظریه‌ای که فیزیک‌پیشه‌ها نتوانستند آن را در این مجموعه قرار دهند، نظریه نسبیت عام است. برای آن که این نظریه در این مجموعه بگنجد، در ابتدا باید نسخه‌ی کوانتومی آن را بدست آورد که آن هم به دلیل مشکلاتی از جمله خاصیت غیرخطی بودن نسبیت عام تا به امروز نوشته نشده است. هم‌چنین نسبیت عام نظریه‌ای باز بهنجار پذیر نیست. اما تمام مشکلات این نیست، زیرا نظریه‌ی نسبیت عام یک نظریه‌ی هندسی است وکوانتیزه کردن آن به معنی کوانتش فضا-زمان است، که ما هنوز به خوبی آن را درک نکرده‌ایم.

با توجه به مشکلاتی که به آن اشاره شد، فیزیک‌پیشه‌ها در صدد آن بر آمدند تا با مدل ساده‌تری که بیشترین شباهت را با نسبیت عام دارد،گرانش را کوانتومی کنند، که سرانجام پی بردند مدل مناسب برای این کار نسبیت عام در۱+۲ بعد است.گرانش در ۱+۲ بعد، یک نظریه‌ی هموردای عام در هندسه‌ی فضا-زمان است که بسیاری از مفاهیم

آن شبیه نسبیت عام واقعی ۱+۳ بعدی است و در عوض پیچیدگی‌های ریاضیاتی۱+۳ بعد را ندارد. بنابراین با توجه به آن‌چه که گفته شد، مناسب‌ترین مدل برای گرانش کوانتومی، گرانش در ۱+۲ بعد است .

فضای با ثابت کیهانشناسی مثبت را فضای دوسیته و فضای با ثابت کیهانشناسی منفی را فضای پاددوسیته می‌نامند. برخلاف فضای دوسیته۱+۲ بعدی، از فضای پادوسیته۱+۲ بعدی می‌توان حل سیاه‌چاله به‌دست آورد، که به اختصار این نوع سیاه‌چاله‌ها را $BTZ$ [۱] می‌نامند. به همین علت ما بحث خود را به فضای فضای پادوسیته۱+۲ بعدی محدود می‌کنیم. هنگامی که ثابت کیهان‌شناسی صفر باشد جواب خلأ گرانش ۱+۲ بعدی، فضای تخت است و هیچ گونه جواب سیاه‌چاله‌ای ندارد.

می‌توان نشان داد فضای پاددوسیته یک تقارن مجانبی همدیس دارد. این گروه مجانبی بی‌نهایت بعدی است وگروه$SO(۲،۲)$ به عنوان یک زیرگروه از آن است. فرض پایه‌ای این است که در دوردست گروه$SO(۲،۲)$ گروه تقارن مجانبی فضای پاددوسیته باقی می‌ماند.

کار را با یک رویه‌ی پاددوسیته‌ی۱+۲ بعدی غوطه‌ور در یک فضا-زمان تخت ۴ بعدی با امضای $(+ - + -)$ شروع می‌کنیم. به طور کلی غوطه‌ورکردن یک رویه درفضایی با ابعاد بالاتر عبارتست از ایجاد یک رابطه‌ی قیدی میان دو یا چند مختصه از فضای بالاتر.گروه تقارنی رویه‌ای که به این ترتیب غوطه‌ور می‌شود را همین رابطه‌ی قیدی تعیین می‌کند و از طرفی راستاهای هم‌متری درهر فضایی راستاهایی است که جابه‌جایی در آن راستاها متریک فضا را ناوردا نگه می‌دارد. به این ترتیب پیداست که رابطه‌ی تنگاتنگی میان راستاهای هم‌متری و گروه تقارنی وجود دارد. در واقع مولدجابه‌جایی در راستای هم‌متری را در حالت کلی می‌توان به شکل ترکیب خطی از مولدهای گروه تقارنی نوشت. رویه‌ای که ما درباره‌ی آن بحث می‌کنیم، دارای تقارن$SO(۲،۲)$ می‌باشد. این رویه دارای دو راستای هم متری $\partial_\varphi$ و $\partial_t$ بوده که نشان می‌دهد هرحلی‌که در این فضا به دست آید، دارای جرم وتکانه‌زاویه‌ای پایسته است. درفصل دوم خواهیم دید که همانسازی بر روی این رویه در راستای $\varphi$ حل سیاه‌چاله‌ی $BTZ$ است.

در قسمتی از ساختار این فضا-زمان، منحنی‌های بسته‌ی زمانی بوجود می‌آید و این، ساختار فضا-زمان ما را از نظر عِلی دچار مشکل می‌کند. این قسمت از فضای پاددوسیته باید کنار گذاشته شود که این کار باعث می‌شود ساختار فضا-زمان ما ناقص شود. البته این ناحیه در پشت افق رویداد سیاه‌چاله قرار گرفته و از دید ناظر بیرون از سیاه‌چاله پنهان می‌ماند. برای رفع این ناسازگاری فیزیکی حلی به نام$O - BTZ$ [۳] پیشنهاد شده است. اساس حل $O - BTZ$ بر این است که روی فضا-زمان$BTZ$ یک اربیفلد[۱] $\mathbb{Z}_2$ نسبت به$\widetilde{\Phi} = o$ اعمال می‌شود که $\widetilde{\Phi} = r^۲ - \frac{l^۲}{۲}$ می‌باشد. در واقع این اربیفلد، نقطه‌ی $\widetilde{\Phi}$ را با $-\widetilde{\Phi}$ هم‌ارز می‌کند که از منظر هندسی این اربیفلد به معنی تا شدن فضا-زمان از بین دو افق است و این گویای آن است که ذره هرگز به ناحیه‌ی غیرمجاز نمی‌رسد، یعنی این فضا-زمان از نظرعِلی کامل است.

---

**1.Orbifolding**

اثرات کوانتومی معمولاً در نزدیکی افق رویداد یک سیاه‌چاله قابل توجه است. بررسی رفتار سیاه‌چاله-ی $BTZ$ جفت‌شده با یک میدانِ اسکالر همدیس موضوعی است که ما به آن می‌پردازیم. ابتدا کار را با نوشتن تابع دونقطه‌ای برای این میدان در فضای $AdS_۳$ شروع می‌کنیم. تابع دو نقطه‌ای در واقع دامنه‌ی گذار میدان بین دونقطه در فضا-زمان $AdS_۳$ می‌باشد که، می‌بینیم با فرم تابع دونقطه‌ای فضای تخت یکسان است.

پس ازهمان‌سازی با روش تصویر، تابع دونقطه‌ای نیز برای فضا-زمان $BTZ$ به دست می‌آید. اهمیت تابع دو نقطه‌ای از آن جهت است که برای محاسبه‌ی مشاهده‌پذیرهای کوانتومی به وجود آن نیاز داریم. از وردش کنش نسبت به متریک می‌توان رابطه‌ی تانسور انرژی-تکانه را بر حسب تابع دونقطه‌ای بدست آورد. با جایگذاری در این رابطه مقدار چشم‌داشتی تانسور انرژی- تکانه حالت خلأ برای سیاه‌چاله‌ی $BTZ$ نیز بدست می‌آید. این کمیت روی افق درونی $BTZ$ واگرا می‌شود. این واگرایی بیانگر آن است که افق درونی از نظر کوانتومی ناپایدار است. انگیزه‌ی ما برای بررسی‌حل $O-BTZ$ رفع واگرایی این مقدار چشم‌داشتی تانسورانرژی-تکانه روی افق درونی $BTZ$ است که تفسیر فیزیکی مناسبی ندارد.

هدف در این پروژه محاسبه‌ی مقدار چشم‌داشتی تانسور انرژی-تکانه حالتِ خلأ برای $O-BTZ$ بود. با نوشتن تابع دونقطه‌ای $O-BTZ$ شروع کردیم. برای محاسبه‌ی تابع دونقطه‌ای علاوه براستفاده از تابع دونقطه‌ای $BTZ$ ، ازتقارن آینه‌ایی فضا-زمان $O-BTZ$ نیز استفاده کردیم وتابع دونقطه‌ای این فضا-زمان را هم برای شرایط مرزی دیریشله و هم برای شرایط مرزی نویمن نوشتیم. مشابه روند محاسبه‌ی چشم‌داشتی تانسور انرژی-تکانه‌ی حالت خلأ برای $BTZ$ ، این کمیت را با تابع دونقطه‌ای جدید برای $O-BTZ$ نیز محاسبه کردیم. با توجه به آن که $O-BTZ$ افق درونی ندارد، نتایجی که بدست آوریم حاکی از آن بود که مقادیر این کمیت در سرتاسر فضا-زمان متناهی می‌شود و این همان چیزی بود که از فیزیک مسأله انتظار داشتیم. بنابراین می‌توان گفت که نظریه-ی اختلالی میدان‌های کوانتومی در پس‌زمینه‌ی $O-BTZ$ خودسازگار است.

# فصل دوم

# ویژگی‌های کلاسیکی سیاه‌چاله‌ی $BTZ$

در این فصل به بررسی ویژگی‌های گرانش در ۲+۱ بعد می‌پردازیم ومتریک $BTZ$ یک بار از طریق کنش $BTZ$ وبار دیگر از طریق همانسازی در فضای $AdS_۳$ بدست می‌آوریم.

## ۱.۲ سیاه‌چاله‌ی $BTZ$

برای گرانش اینشتین در ۲+۱ بعد کنش زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathrm{I} = \frac{۱}{۲\pi}\int \sqrt{-g}\ \left[R + ۲l^{-۲}\right]\ d^{۲}x\ dt. \qquad (۱-۲)$$

که شعاع $l$ با ثابت کیهان‌شناسی به صورت زیر مرتبط است

$$-\Lambda = l^{-۲}.$$

و $R$ خمش اسکالر فضا است که با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$\mathrm{R} = g^{\mu\nu}\mathrm{R}_{\mu\nu}.$$

$R_{\mu\nu}$ همان تانسور ریچی است که به صورت زیر با تنجاندن به دست می‌آید

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} = \mathrm{R}^{\rho}_{\mu\rho\nu}.$$

و تانسور خمش ریمان با رابطه‌ی زیر با متریک در ارتباط است

$$\mathrm{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\rho\tau}\Gamma^{\tau}_{\nu\sigma},$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{۱}{۲} g^{\mu\nu}\left[g_{\nu\delta,\rho} + g_{\delta\rho,\nu} - g_{\rho\nu,\delta}\right].$$

که $\Gamma$ ها نمادهای کریستوفل و کاما نمایش‌دهنده‌ی مشتق معمولی است.

باکمینه کردن کنش نسبت به تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ معادلات انیشتین به صورت زیر به دست می‌آید

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{۱}{۲} g_{\mu\nu}\left[\mathrm{R} + ۲l^{-۲}\right] = ۰\,. \qquad (۲-۲)$$

در به دست آوردن متریک فرض می‌کنیم که میدان‌ها ایستا (مستقل از زمان) هستند و تقارن زاویه‌ای دارند. معادلات حرکت که از کنش $(۲-۱)$ به دست می‌آیند حل‌های میدان سیاه‌چاله با متریک زیر هستند

$$ds^{۲} = -N^{۲}dt^{۲} + N^{-۲}dr^{۲} + r^{۲}(N^{\varphi}dt + d\varphi)^{۲}. \qquad (۳-۲)$$

جملات انحراف مجذوری $N^{۲}(r)$ و انتقال زاویه‌ای $N^{\varphi}(r)$ به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$N^{۲}(r) = -M + \frac{r^{۲}}{l^{۲}} + \frac{J^{۲}}{4r^{۲}}\,, \qquad (۴-۲)$$

$$N^{\varphi}(r) = -\frac{\mathrm{J}}{۲r^{۲}}\;\;.$$

که در بالا $-\infty < t < \infty$ ، $o \leq r < \infty$ و $o \leq \varphi \leq ۲\pi$ می‌باشد. متریک بالا دارای دو بردارهم‌متری[۲] $\xi_{۱} = \partial_{\mathrm{t}}$ و $\xi_{۲} = \partial_{\varphi}$ است، دو ثابتِ انتگرال‌گیری $M$ و $J$ که در بالا ظاهر شده‌اند به ترتیب بارهای پایستار مربوط به ناوردایی زمانی (جرم) و ناوردایی زاویه‌ای (تکانه زاویه‌ای) هستند.

2.Killing

جمله ی $N(r)$ به ازای دو مقدار $r$ صفر می گردد

$$r_{\pm} = l\left[\frac{M}{۲}\left\{۱ \pm \left[۱ - \left[\frac{J}{Ml}\right]^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}\right\}\right]^{\frac{۱}{۲}} . \qquad (۵-۲)$$

برای آن‌که حلِّ به‌دست‌آمده یک سیاه‌چاله را توصیف کند، باید $|J| \leq Ml$ و $M > ۰$ باشد. علامت $J$ چرخش راست‌گرد یا چپ‌گرد سیاه‌چاله را نشان می‌دهد و در ساختار کلی جواب‌ها نقشی ندارد. حالت $|J| = Ml$ را حالت فرینه می‌نامند که در این حالت دو ریشه‌ی $N^{۲} = ۰$ بر هم منطبق می‌شوند و $|J| = M = o$ را حالت خلأ گویند.

با استفاده از رابطه‌ی $(۲-۵)$ می‌توان متریک $(۲-۳)$ را بر حسب افق‌های رویداد نوشت

$$M = \frac{r_+^{۲} + r_-^{۲}}{l^{۲}} \ , \qquad J = \frac{۲r_+ r_-}{l} \ ,$$

$$ds^{۲} = -\left[\frac{r^{۲}}{l^{۲}} - M\right]dt^{۲} + \left[\frac{r^{۲}}{l^{۲}} - M + \frac{J^{۲}}{4r^{۲}}\right]^{-۱} dr^{۲} + r^{۲}d\varphi^{۲} - Jdtd\varphi \ ,$$

$$ds^{۲} = -\frac{\left[r^{۲} - r_+^{۲}\right]\left[r^{۲} - r_-^{۲}\right]}{r^{۲}l^{۲}}dt^{۲} + \frac{r^{۲}l^{۲}}{\left[r^{۲} - r_-^{۲}\right]\left[r^{۲} - r_+^{۲}\right]}dr^{۲}$$
$$+ \ r^{۲}\left[d\varphi - \frac{r_+ r_-}{l\,r^{۲}}\right]^{۲} dt \ . \qquad (۲-۶)$$

رابطه‌ی $(۲-۶)$ متریک یک $BTZ$ چرخان به جرم $M$ و تکانه‌زاویه‌ای $J$ را نمایش می‌دهد که $r_+$ و $r_-$ افق‌های رویداد آن هستند.

## ۲. ۲ فضای پاددوسیته

در این بخش ابتدا با فضای پاددوسیته آشنا می‌شویم. سپس $BTZ$ را به عنوان فضای حاصل‌قسمتی از فضای پاددوسیته معرفی می‌کنیم. فضای پاددوسیته[۳] یک خمینه‌ی لورنتسی است که بیشینه تقارن را داراست و دارای خمش اسکالر

---

3.AdS

ثابت منفی است. نقش عمده‌ی این فضا در نظریه‌ی میدان همدیس است. از نظر نسبیّت‌عام فضای پاددوسیته جواب خلأ معادلات میدان انیشتین با ثابت کیهان‌شناسی منفی است.

### ۱.۲.۲ متریکِ فضای پاددوسیته

هر فضایی با خمش اسکالر ثابت را می‌توان در یک فضای تخت با بعد بالاتر غوطه‌ورکرد، فضای پاددوسیته‌ی سه بعدی را می‌توان به عنوان یک هذلولوی‌گون با معادله‌ی رویه‌ی

$$-u^۲ - v^۲ + x^۲ + y^۲ = -l^۲ \,. \qquad (۲-۷)$$

غوطه‌ور در یک فضای تخت۲+۲بعدی با عنصرخطّی

$$ds^۲ = -du^۲ - dv^۲ + dx^۲ + dy^۲ \,. \qquad (۲-۸)$$

در نظر گرفت. مختصّات $(u, v, x, y)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ مقدار می‌گیرند و باید در معادله‌ی قیدی $(۲-۷)$ صدق کنند، سیستم مختصّات عام که تمام فضای $AdS_۳$ را می‌پوشاند به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$u = l\cosh\mu\ \sin\lambda \quad , \qquad v = l\cosh\mu\ \cos\lambda \,. \qquad (۲-۹)$$

که $l\sinh\mu = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $o \le \mu < +\infty$ و $o \le \lambda < ۲\pi$ می‌باشد. با جایگذاری $(۲-۹)$ در $(۲-۸)$ خواهیم داشت

$$ds^۲ = l^۲\left[-\cosh^۲\mu\, d\lambda^۲ + \frac{dx^۲ + dy^۲}{l^۲ + x^۲ + y^۲}\right]. \qquad (۲-۱۰)$$

می‌توان این معادله را با استفاده از مختصّات قطبی در صفحه‌ی $x-y$ ساده‌تر کرد

$$x = l\ \sinh\mu\ \cos\theta \quad , \quad y = l\sinh\mu\ \sin\theta.$$

در نتیجه برای متریک فضای پاددوسیته داریم

$$ds^۲ = l^۲\left[-\cosh^۲\mu\ d\lambda^۲ + d\mu^۲ + \sinh^۲\mu\ d\theta^۲\right]. \qquad (۲-۱۱)$$

اگر $\lambda = \frac{t}{l}$ و $r = l\sinh\mu$ را تعریف کنیم، از رابطه‌ی $(۲-۱۱)$ خواهیم داشت

$$ds^۲ = \left[-\left(\frac{r}{l}\right)^۲ + ۱\right]dt^۲ + \left[\left(\frac{r}{l}\right)^{-۲} + ۱\right]dr^۲ + r^۲\, d\varphi^۲.$$

که همان متریک (۲ − ۶) با $M = -۱$ و $J = o$ است. با توجه به این که $\varphi$ با $\theta$ جایگزین شده است.

دستگاه مختصّات دیگری نیز به نام مختصّات پوانکاره وجود دارد که در آن می‌توان هذلولوی‌گون پاددوسیته را پارامتر بندی کرد. در این مختصّات فضای پاددوسیته به عنوان نیم‌فضای $z > o$ (یا $z < o$) در فضایی که مختصّات آن به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$z = \frac{l}{u + x} \quad , \qquad \beta = \frac{y}{u + x} \quad , \qquad \gamma = \frac{-v}{u + x}.$$

حال برای عنصر خطی پاددوسیته داریم

$$ds^۲ = l^۲ \left[\frac{dz^۲ + d\beta^۲ - d\gamma^۲}{z^۲}\right]. \qquad (۱۲ - ۲)$$

مختصّات پوانکاره تنها نیمی از فضای پاددوسیته را می‌پوشاند که آن هم نواحی‌ای است که $u + x$ دارای علامت معیّنی باشد. البتّه می‌توان مختصّات پوانکاره‌ی مشابهی نیز برای نواحی‌ای که $u - x$ دارای علامت معیّنی است، تعریف کرد.

### ۲.۲.۲ بردارهای هم‌متری

بردارهای هم‌متری نمایش‌گر راستاهایی هستند که با جابه‌جایی درآن راستاها متریک تغییر نمی‌کند یعنی می‌توان گفت اگر مولفه‌های متریک به مختصه‌ای بستگی نداشته باشد آن مختصه راستای هم‌متری است این بردارها برای یافتن ثابت‌های وابسته به حرکت در امتداد یک ژئودزیک به‌کار می‌روند. اگر $\xi_a$ راستای هم‌متری باشد و $u^a$ مماس بر منحنی ژئودزیک باشد آن‌گاه کمیّت $u^a \xi_a$ یک ثابت حرکت است. بردارهای هم‌متری $AdS_۳$ را با $J_{ab}$ نشان می‌دهیم و در نهایت داریم

$$J_{ab} = x_b \frac{\partial}{\partial x^a} - x_a \frac{\partial}{\partial x^b}.$$

که $x^a = (u, v, x, y)$ می‌باشد و $J_{ab}$ به صورت صریح بر حسب مختصات به شکل زیر است

$$J_{o۱} = u\, \partial_v - v\partial_u, \quad J_{o۲} = x\partial_u + u\partial_x .$$

$$J_{o۳} = y\partial_v + v\partial_y \qquad J_{۱۲} = x\partial_u + u\partial_x \ . \qquad (۱۳-۲)$$

$$J_{۱۳} = y\partial_u + u\partial_y \ , \qquad J_{۲۳} = y\partial_x - x\partial_y \ .$$

بردار $J_{o۱}$ مولّد انتقال زمانی ($J_{o۱} = \partial_\lambda$) و بردار $J_{۲۳}$ مولّد دوران در صفحه‌ی $x - y$ ($J_{۲۳} = \partial_\theta$)

است. کلّی‌ترین بردار هم متری $\xi$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی از $J_{ab}$ ها، به صورت زیر نمایش داد

$$\xi = \frac{۱}{۲}\omega^{ab}J_{ab} \ . \qquad (۱۴-۲)$$

## ۳.۲.۲ سیاه‌چاله و فضای پاددوسیته

در این جا نشان خواهیم داد که می‌توان از طریق همانسازی کردن برخی پارامترهای فضای پاددوسیته به متریک سیاه‌چاله‌ی $BTZ$ رسید. این کار را می‌توان توسّط یک زیرگروه گسسته از گروه هم‌متری $SO(۲,۲)$ انجام داد. هر بردار هم‌متری $\xi$ یک زیرگروه تک پارامتری از هم‌متری‌های فضای پاددوسیته تعریف می‌کند. هنگامی که $t$ مضرب صحیحی از یک پایه، که $۲\pi$ اختیار می‌شود، باشد نگاشت بالا یک زیرگروه گسسته‌ی هم‌ریخت با مجموعه-ی اعداد صحیح است

$$P \to e^{t\xi}P \quad , \qquad t = 0, \pm۲\pi, \pm۴\pi, \ldots \qquad (۱۵-۲)$$

$$X^a \equiv e^{\pm۲\pi\xi} X^a \ .$$

فرآیند همانسازی دو نقطه از فضای پاددوسیته را که در یک مدار قرار دارند با یکدیگر هم‌ارز می‌کند. از آن‌جا که این تبدیل یک تبدیل هم‌متری است متریک فضای خارج‌قسمت حاصل شده دارای همان ثابت خمش منفی می‌باشد و در نتیجه یک حل از معادله‌ی انیشتین است. تفاوتی که جواب‌های به دست آمده‌ی جدید با جواب‌های قبلی خود در فضای پاددوسیته، در خواصّ سرتاسری است. این حل‌ها به طور کامل با گروه (۲ — ۲۰) که گروه همانسازی نام دارد توصیف می‌شوند و $\xi$ بردار هم‌متریک مولّد این گروه است. دو نقطه در فضای پاددوسیته را در نظر بگیرید که در یک مدار واقع‌اند و یک منحنی این دو نقطه را به یکدیگر متصل می‌کند. فرآیند همانسازی دوسر این منحنی را در فضای خارج قسمت می‌بندد و منحنی بسته می‌شود. به منظور این‌که در فضای خارج قسمت ساختار عِلّی قابل قبولی داشته باشیم نباید این منحنی‌های بسته‌شده‌ی جدید زمان‌گونه یا نورگونه باشند. در نواحی مختلف فضای پاد

دوسیته بردار هم‌متری می‌تواند فضاگونه، زمان‌گونه یا نورگونه باشد. همان‌طور که بعداً نشان خواهیم داد یک شرط لازم برای حذف خطوط زمان‌گونه‌ی بسته این است که باید بردار هم‌متری $\xi$ فضاگونه باشد

$$\xi \cdot \xi > o. \qquad (۱۶-۲)$$

هر چند که این شرط کافی نیست ولی این بردارهای خاصّ هم‌متری در فرآیندهای همانسازی که منجر به سیاه‌چاله می‌شوند به کار می‌روند. هندسه‌ی سیاه‌چاله در ناحیه‌ای قرار دارد که $\xi$ فضاگونه است، بردارهای هم‌متری وجود دارند که شرط $(۲-۱۶)$ را در سرتاسر فضای پاددوسیته دارند؛ برای مثال بردار $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ که $\varphi$ مختصه‌ی زاویه‌ای در $(۲-۶)$ است. ولی با این حال بردارهایی که در همانسازی برای تولید متریک سیاه‌چاله استفاده می‌شوند در بعضی نواحی زمان‌گونه یا نورگونه هستند. برای این‌که همانسازی قابل انجام باشد باید این نواحی را از فضای پاددوسیته حذف کرد. فضای حاصل را که با $(\mathrm{AdS})'$ مشخص می‌کنندکه تحت نگاشت $(۲-۱۵)$ ناوردا می‌ماند زیرا اندازه‌ی بردارهای هم‌متری در طول مدارشان ثابت است. بنابراین فضای خارج‌قسمت هنوز هم وجود دارد. فضای $(\mathrm{AdS})'$ از لحاظ ژئودزیکی ناکامل است زیرا می‌توان ژئودزیک‌هایی یافت که از ناحیه‌ی $\xi \cdot \xi > o$ به ناحیه‌ی $\xi \cdot \xi < ۰$ می‌روند. قبل از همانسازی خمینه‌ی فضا زمان کامل است و هیچ بریدگی نداریم ولی وقتی همانسازی انجام شد و فضای$(\mathrm{AdS})'$ را به وجود آوردیم مرز ناحیه‌ی $\xi \cdot \xi > o$ که سطح $\xi \cdot \xi = o$ است نظیر یک تکینگی در ساختار علّی فضا-زمان ظاهر می‌شود، زیرا با رفتن به آن طرف سطح منحنی‌های بسته‌ی زمانی ایجاد می‌شود. به همین دلیل ناحیه‌ی $\xi \cdot \xi = o$ به عنوان یک تکینگی واقعی در فضای خارج قسمت در نظرگرفته می‌شود، بنابراین ژئودزیک‌های نا کامل تنها آن‌هایی هستند که به تکینگی برخورد می‌کنند.

## طبقه‌بندی بردارهایِ هم‌متری

طبقه‌بندی کاملی از بردارهای هم‌متری در پیوست $A$ مرجع $[۱]$ آمده است. در این بخش ما تنها به قسمت‌هایی از آن‌که مورد نیاز است اشاره می‌کنیم. نخستین نکته‌ای که باید گفته شود این است که هر بردار هم‌متری $\xi$ را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از $\mathrm{J}_{ab}$ها، مولدهای$\mathrm{SO}(۲,۲)$، به شکل $\xi = \frac{۱}{۲}\omega^{ab}\mathrm{J}_{ab}$ نوشت. $\omega_{ab}$ها تانسورهای پاد متقارن‌اند که برای تعیین نوع بردار $\xi$ به کار می‌روند. نکته‌ی دوم این است که تمام بردارهای هم‌متری متعلّق به یک «نوع» به وسیله‌ی یک تبدیل $\mathrm{SO}(۲,۲)$ به یک‌دیگر تبدیل می‌شوند، ولی برای بردارهای هم‌متری متعلّق به دو«نوع» متفاوت هیچ تبدیل $\mathrm{SO}\ (۲,۲)$ وجود ندارد که آن‌ها را به هم تبدیل کند. در متریک $(۲-۳)$ همان‌گونه

که گفته شد مختصه‌ی $\varphi$ دوره‌ای است. پس باید یک بردار هم‌متری برای همانسازی این مختصه پیدا کرد. ما در این‌جا ادّعا می‌کنیم که حل‌های سیاه‌چاله به وسیله‌ی همانسازی تولید شده توسّط بردار هم‌متری زیر به دست می‌آید

$$\xi = \frac{r_+}{l} J_{۱۲} - \frac{r_-}{l} J_{o۳} - J_{۱۳} + J_{۲۳}. \qquad (۱۷-۲)$$

از روی رابطه‌ی بالا به راحتی $\omega^{ab}$ خوانده می‌شود و می‌بینیم که ویژه مقادیر آن حقیقی و برابر $\pm\frac{r_+}{l}$ و $\pm\frac{r_-}{l}$ است. ناورداهای کازیمیر آن که با رابطه‌ی $I_۱ = \omega_{ab}\omega^{ab}$ و $I_۲ = \frac{۱}{۲}\varepsilon_{abcd}\omega^{ab}\omega^{cd}$ داده می‌شوند به صورت زیر هستند

$$I_۱ = -\frac{۲}{l^۲}\left(r_+^{۲} + r_-^{۲}\right) = -۲M, \qquad (۱۸-۲)$$

$$I_۲ = -\frac{۴}{l^۲}\, r_+ r_- = -۲\frac{|J|}{l}\,. \qquad (۱۹-۲)$$

حال می‌توانیم نوع بردار هم‌متری $(۲-۱۷)$ را مشخّص کنیم. بر اساس طبقه‌بندی گفته‌شده در ضمیمه‌ی $A$ مرجع [۱] این بردار هم‌متری وقتی $r_+ \neq r_-$ باشد متعلّق به $I_b$ واگر $r_+ = r_- \neq o$ باشد متعلّق به $II_a$ و برای حالت $r_+ = r_- = o$ $(M = o)$ متعلّق به $III^+$ خواهد بود.

برای این‌که نشان دهیم همانسازی $e^{۲\pi k\xi}$ متریک سیاه‌چاله‌ی $BTZ$ را تولید می‌کند، ما با مورد غیرفرینه‌ی $r_+^{۲} - r_-^{۲} > o$ آغاز می‌کنیم. در این حالت می‌توانیم به وسیله‌ی یک تبدیل $SO(۲,۲)$ بردار هم‌متری $(۲-۱۷)$ را به صورت زیر تبدیل کنیم

$$\xi' = \frac{r_+}{l} J_{۱۲} - \frac{r_-}{l} J_{o۳}\,.$$

یک دلیل برای وجود چنین تبدیلی این است که $\xi$ را می‌توان در مختصات پوانکاره به صورتِ زیر نوشت

$$-\xi = \frac{r_+}{l}\left[z\frac{\partial}{\partial z} + \beta\frac{\partial}{\partial \beta} + \gamma\frac{\partial}{\partial \gamma}\right] - \frac{r_-}{l}\left[\beta\frac{\partial}{\partial \gamma} + \gamma\frac{\partial}{\partial \beta}\right] + \frac{\partial}{\partial \beta}\,. \qquad (۲۰-۲)$$

که دیده می‌شود تبدیل $SO(۲,۲)$ زیر

$$\beta \to \beta - \frac{r_+}{{r_+}^{۲} - {r_-}^{۲}} \quad ,$$

$$\gamma \to \gamma - \frac{r_-}{{r_+}^{۲} - {r_-}^{۲}} .$$

$\frac{\partial}{\partial\beta}$ را در رابطه‌ی $(۲-۲۰)$ حذف می‌کند که با جایگذاری از $(۲-۱۶)$ می‌توان آن را تحقیق کرد. اندازه‌ی آن برابر است با

$$\xi'.\xi' = \frac{{r_+}^{۲}}{l^{۲}}\left(u^{۲} - x^{۲}\right) + \frac{{r_-}^{۲}}{l^{۲}}\left(u^{۲} - y^{۲}\right) , \qquad (۲-۲۱)$$

بنابراین اندازه‌ی بردار $\xi'$ برابر است با

$$\xi' . \xi' = \frac{{r_+}^{۲} - {r_-}^{۲}}{l^{۲}}\left(u^{۲} - x^{۲}\right) + {r_-}^{۲} . \qquad (۲-۲۲)$$

بنابراین ناحیه‌ی مجازی که در آن اندازه‌ی $\xi'$ مثبت است به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{-{r_-}^{۲} l^{۲}}{{r_+}^{۲} - {r_-}^{۲}} < u^{۲} - x^{۲} < +\infty .$$

ناحیه‌ی بالا می‌تواند به وسیله‌ی سطوحی که اندازه‌ی $\xi'.\xi'$ روی آن صفر است، به سه ناحیه تقسیم شود:

ناحیه‌ی $I$ ناحیه‌ای که با شرط‌های $u^{۲} - x^{۲} > l^{۲}$ و $y$ و $u$ دارای علامت یکسان باشند مشخّص می‌شود. این ناحیه هیچ هم‌پوشانی با $y = 0$ ندارد زیرا شرط $u^{۲} - x^{۲} = l^{۲} + v^{۲} - y^{۲} > l^{۲}$ نقض می‌شود. این ناحیه در سیاه‌چاله‌ی BTZ بیرون دو افق رویداد قرار دارد و اندازه‌ی بردار $\xi'$ در رابطه ی ${r_+}^{۲} < \xi'.\xi' < +\infty$ صدق می‌کند.

ناحیه‌ی $II$ این ناحیه با شرط‌های $0 < u^{۲} - x^{۲} < l^{۲}$ و این‌که $u$ و $v$ علامت یکسان دارند تعریف می‌شود. مشخصّه‌ی جالب این ناحیه این است که در این ناحیه $r$ نقش زمان و $t$ نقش مکان را دارد. این ناحیه بین افق درونی و افق بیرونی قرار دارد و اندازه‌ی بردار هم‌متری در رابطه‌ی ${r_-}^{۲} < \xi'.\xi' < {r_+}^{۲}$ صدق می‌کند.