دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی ، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش شبه لاگرانژ تطبیقی بر اساس موجک برای دستگاه نسبیتی ولاسف- ماکسول

اساتید راهنما

دکتر مهرداد لکستانی
دکتر حسین خیری

استاد مشاور

دکتر صمد سبحانیان

پژوهشگر

یاسر قلی زاده آتانی

زمستان ۱۳۹۰

تقدیم به پدر و مادر

عزیزم

خدایا...

ای سزاوار ثنای خویش، ای شکر کننده ی عطای خویش، ای شیرین نماینده ی بلای خویش، رهی به ذات خود از ثنای تو عاجز و به عقل خود از شناخت منّت تو عاجز و به توان خود از سزای تو عاجز.. خدایا! گرفتار آن دردم که تو دوای آنی. در آرزوی آن سوزم که تو سرانجام آنی. من در تو چه دانم ؟

تو دانی. تو آنی که خود گفتی و چنان که خود گفتی، آنی. می دانی و همه می دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته ام می درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه هایم احساس می کنم. نمی توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله های ضعیف و افتاده، پنهان کرده ام دریاب، دریاب.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی سلاح، کار بی پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی دنیا، مذهب بی عوام، عظمت بی نام، خدمت بی نان، ایمان بی ریا، خوبی بی نمود، گستاخی بی خامی، قناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی آنکه دوست بداند، روزی کن.

سپاس گزاری...

سپاس فراوان ایزد یگانه راست که هر چه داریم از وست. خداوند بلند مرتبه و عالم را شاکرم که بر سر بنده ی حقیری چون من منت نهاد و توانستم به همت این علم اندک این پروژه را تدوین نمایم.

از پدر و مادرم که همیشه در راه کسب علم و دانش حامیان و مشوقان اصلی من بودند نیز کمال تشکر را دارم و امیدوارم با این گام اندک در مسیر یادگیری توانسته باشم گوشه ای از زحمات بی دریغانه ی آنان را پاسخ گفته باشم.

از اساتید گرامی دکتر مهرداد لکستانی به خاطر راهنمایی و معرفی کتب و صبر و حوصله ای که در راه اتمام این پروژه لطف نمودند و دکتر صمد سبحانیان که بنده را در درک مفاهیم فیزیکی یاری نمودند کمال تشکر را دارم.

در پایان جا دارد تا از خانواده و دوستان عزیزم که هرکدام به نوبه ی خود مرا یاری نمودند نیز تشکر کنم.

یاسر قلی زاده آتانی
زمستان ۱۳۹۰

نام خانوادگی:قلی زاده آتانی **نام:** یاسر

عنوان پایان‌نامه: روش شبه لاگرانژ تطبیقی بر اساس موجک برای دستگاه نسبیتی ولاسف-ماکسول

استادان راهنما: دکتر مهرداد لکستانی و دکتر حسین خیری

استاد مشاور: دکتر صمد سبحانیان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیز عددی

دانشگاه: تبریز **دانشکده:** علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۹۰ **تعداد صفحه:** ۷۵

کلیدواژه‌ها: موجک، پلاسما، معادله ولاسف، موجک دوبوک

چکیده:

آنالیز چندگانه‌ی موجک، به عنوان یک شاخه‌ی جدید از ریاضیات در حل عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال به طور وسیع کاربرد دارد. از آنجائیکه که بسط موجک یک تابع امکان نمایش اسپارس داده‌ها را فراهم می‌کند، لذا آنالیز چندگانه می‌تواند در کاهش حجم محاسبات و افزایش سرعت رسیدن به جواب مطلوب مؤثر باشد.

در فیزیک پلاسما برای توصیف اکثر پدیده‌های فیزیکی از نظریه جنبشی استفاده می‌کنند که در آن، برای بررسی رفتار ذرات پلاسما از تابع توزیع سرعت استفاده می‌شود. معادله‌ی ولاسف در واقع حالت خاصی از معادله‌ی بولتزمن است که به همراه معادلات ماکسول، دستگاه ولاسف-ماکسول را تشکیل می‌دهد که در فیزیک پلاسما به وجود می‌آید. □

فهرست مطالب

پیشگفتار

۱.۰ پیشگفتار

آنالیز تجزیه چندگانه در طی سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از دانشمندان و مهندسان در علوم مختلف قرار گرفته است. به گونه‌ای که به جرأت می‌توان گفت تقریبا در تمام علوم فنی و مهندسی از آنالیز تجزیه چندگانه و موجکها برای حل مسائل مختلف استفاده می‌شود. یکی از کاربردهای مهم آنالیز تجزیه چندگانه در ریاضیات کاربردی و فیزیک محاسباتی برای حل معادلات ظاهر شده در پدیده‌های فیزیکی می‌باشد. در این پژوهش نیز به حل یکی از معادلاتی که در فیزیک پلاسما ظاهر می‌شود پرداخته شده است.

پایان‌نامه حاضر شامل شش فصل می‌باشد که در آن به طور مختصر و مفید به معرفی آنالیز تجزیه چندگانه، موجکها، پلاسما، برهم کنش لیزر-پلاسما که منجر به ظاهر شدن معادلاتی می‌شوند که یک روش برای حل آنها در این پژوهش ارائه می‌شود.

در فصل اول ابتدا یک تاریخچه‌ای مختصر از آنالیز تجزیه چندگانه موجک آورده شده است. فصل دو شامل مطالبی درباره‌ی مفاهیم کلی موجکهاست. در واقع در این بخش خواننده با مفاهیم همچون توابع پایه‌ای مقیاس و توابع موجک و روابطی که بین آنها حاکم است آشنا می‌شود. همچنین با نحوه‌ی بسط یک تابع براساس توابع موجک آشنا می‌شویم و از خواننده انتظار می‌رود تا در پایان این فصل بتواند یک تابع دلخواه را براساس توابع موجک بسط دهد. در فصل سوم یک نوع از توابع موجک که در این پژوهش از آنها استفاده می‌شود معرفی می‌شود. موجکهای دوبوک-دسلائوری که در این فصل معرفی می‌شوند دارای خواص جالبی هستند که در کاهش حجم محاسبات مؤثر می‌باشند.

یکی از منابع تولید انرژی که بسیار مورد توجه قرار گرفته است روش شتاب دادن ذرات است. براساس قانون نسبیت انیشتن اگر ذره‌ای با سرعت نور حرکت کند تبدیل به انرژی می‌شود. در حالت معمولی هر

جسم متحرکی دارای یک انرژی موسوم به انرژی جنبشی است. یک مدل از شتاب‌دهنده نوع پلاسمایی آنهاست. در فصل چهارم برهم کنش لیزر-پلاسما که یک روش شتاب دادن الکترون‌ها تا رسیدن به سرعتی نزدیک سرعت نور می‌باشد معرفی می‌شود. سپس در همین فصل با دستگاه نسبیتی ولاسف-ماکسول که در بررسی جنبشی رفتار پلاسما مرود استفاده قرار می‌گیرد آشنا می‌شویم.

در فصل پنجم که می‌توان از آن به عنوان فصل اصلی این پژوهش نام برد یک روش عددی معرفی می‌شود. و بالاخره در فصل ششم که فصل پایانی این پایان‌نامه است درستی روش عددی ارائه شده در فصل پنجم با ارائه یک مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد.

این پژوهش براساس مقاله‌ی [۳] انجام شده است و امیدواریم که بتواند مفید واقع شود.

۲.۰ پیشینه‌ی پژوهش

حل مستقیم معادله دیفرانسیل جزئی ولاسف [1] که با رابطه‌ی

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + e(E + \frac{p \times B}{m\gamma}).\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} = ۰$$

(که در آن $p = (p_x, p_y, p_z)$ متغیر ممان، (E, B) میدان الکترومغناطیسی و γ فاکتور لورنتز

$$\gamma^۲ = ۱ + \frac{p_x^۲ + p_y^۲ + p_z^۲}{m^۲ c^۲}$$

می‌باشد) مشخص می‌شود، را می توان در منابع [۱۰]، [۱۱]، [۱۳]، [۲۱] و [۲۲] یافت. برهم‌کنش لیزر-پلاسما با استفاده از کدهای ولاسف نیز در منابع [۷]، [۱۹] و [۲۰] بحث شده است. در اینجا یک صفحه‌ی فاز-فضای دوبعدی که میتواند در زمان به طور تطبیقی تظریف شود یا نشود، معرفی می‌شود. برای این منظور از تکنیکی که براساس آنالیز چندگانه موجک است، استفاده می‌کنیم که از لحاظ چارچوب مشابه روش‌های معرفی شده در [۸]، [۱۴] و [۱۷] می‌باشد. این روش ابتدا در [۹] برای دستگاه ولاسف-پواسن و سپس در فیزیک نور استفاده شده است، ([۱۰] و [۱۵])، و در [۱۸] با ساختمان داده بهینه شده موازی شد. در [۱۶] روشی مشابه اجازه‌ی پایداری ممان‌ها را به هر مرتبه با استفاده از روش بالابرنده که در [۲۳] معرفی شده است، را می‌دهد.

[1] Vlasov

جوهره ریاضی، آزادی آن است.

کانتور

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ تاریخچه

هدف از نظریه‌ی موجک‌ها بازسازی مجدد هر تابع دلخواه f با استفاده از توابع ساده‌تر، در یک بازه‌ی مشخص می‌باشد، بطوریکه هرگاه بخواهیم f را در مقیاسها یا انتقالهای مختلف بازه‌ی مورد نظر بازسازی کنیم، مجدداً همان توابع ساده‌ی اولیه جوابگوی نیاز ما باشند. همین مسأله باعث کاربرد زیاد موجک‌ها در شاخه‌های مختلف مهندسی، فیزیک و ریاضیات کاربردی شده است.

در ریاضیات محض، مبنا و پایه‌ی نظریه‌ی موجک‌ها به بحث سریهای فوریه و تبدیلات فوریه برمی‌گردد. از اوایل قرن بیستم میلادی دانشمندان می‌دانستند که سریهای فوریه و تبدیلات فوریه برای جوابگویی به بعضی مسائل کافی نیستند. کارهای پالی [۱] در دهه‌ی ۱۹۳۰ میلادی و تعمیم‌های لیتلوود [۲] بر این کارها در دهه‌ی ۱۹۴۰، باعث بوجود آمدن نظریه‌ای جدید به نام لیتلوود-پالی برای پاسخگویی به این مشکلات شد. در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ میلادی کالدرون [۳] و زیگموند [۴] این نظریه‌ی جدید را به روش قدرتمندی برای جوابگویی به مسائل PDE تبدیل کردند. روش جدید بقدری مفید بود که آن را نظریه‌ی کالدرون-زیگموند نامیدند.

در ادامه‌ی پیشرفتهای نظریه لیتلوود-پالی در دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی روش جدیدی برای بازسازی توابع،

---
[۱] Paley
[۲] Littlewood
[۳] Calderon
[۴] Zygmund

با استفاده از توابع ساده به نام تجزیه‌ی اتمی [۵] ابداع شد. از این روش بخصوص در فضاهای هاردی [۶] استفاده‌های زیادی می‌شد. برای اثبات وجود تجزیه اتمیک برای توابع عمومی‌تر از توابع فضاهای هاردی، از فرمول کالدرون تابع f به صورت

$$f(x) = \int_{R^+} \int_R (\psi_t \star f)(y)\tilde{\psi_t}(x-y)dy\frac{dt}{t}$$

استفاده کردند که در آن $\star$ نشان دهنده‌ی پیچش، $\psi_t = t^{-1}\psi(t^{-1}x)$ و $\tilde{\psi}$ بسته به نوع تابع f تعریف می‌شد. اما در واقع آنچه که در این فرمول بازسازی از آن استفاده شده است، همان تبدیل موجک پیوسته‌ی f می‌باشد. باکری [۷] ، گراسمن [۸] و زاک [۹] از پدید آورندگان روش جدید محسوب می‌شوند. کارهای دبشی [۱۰] و گراسمن در اوایل دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی نیز ادامه‌ی همین سیر تکاملی تولد موجک‌ها بود. ولی هنوز هیچکس از واژه‌ی موجک استفاده نکرده بود.

در سایر علوم نیز موجک‌ها، بطور کاملاً مستقل از روند پیشرفت‌های ریاضی محض، بتدریج نمایان شدند. اولین مشاهدات در این زمینه در سال ۱۹۶۸ میلادی مربوط به کارهای آسلاکسن [۱۱] و کلودر [۱۲]، در مطالعه‌ی $ax+b$-گروه در مکانیک کوانتم می‌باشد که با مشتقاتی از فرمول کالدرون برخورد کردند. در اوایل دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی نیز یک گروه تحقیقاتی زمین‌شناسی به سرپرستی مرلت [۱۳]، که روی پردازش سیگنال‌های حاصل از زلزله کار می‌کردند، در کارهای خود مستقلاً از این نظریه‌ی جدید ریاضی استفاده کردند.

بالاخره مرلت برای پربار شدن نتایجش، آنها را با گراسمن در میان گذاشت که حاصل آن مقاله‌ای در باب بازسازی توابع در فضاهای هاردی و $L^2(\mathbb{R})$ شد. آنها برای اولین بار از واژه‌ی موجک برای معرفی توابع ساده‌ی خود استفاده کردند.

[۵] atomic decomposition
[۶] Hardy spaces
[۷] Bacry
[۸] Grossman
[۹] Zak
[۱۰] Daubechies
[۱۱] Aslaksen
[۱۲] Klauder
[۱۳] Morlet

در دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی گروه‌های تحقیقاتی مختلفی که شاید مهمترین و مشهورترین آنها زیر نظر میر[۱۴] اداره می‌شد، بطور جداگانه متوجه شدند که بدون کم و کاستی در نتایج حاصله، از نظریه‌ی لیتلوود-پالی می‌توان بطور گسسته نیز استفاده نمود. حتی گروه تحقیقاتی که زیر نظر فریزر [۱۵] اداره می‌شد، دریافت که از صورت گسسته‌ی نظریه‌ی لیتلوود-پالی می‌توان به عنوان جایگزینی برای سریهای فوریه در محاسبات عددی استفاده کرد. همین امر باعث شد تا دانشمندان واژه‌ی پیشنهادی گراسمن و مرلت را بپذیرند، و حتی از آن پس به بعد نظریه‌ی لیتلوود-پالی را نظریه‌ی موجک‌ها نامیدند.

این تغییر شگرف در نظریه‌ی قدیمی لیتلوود-پالی باعث شد تا سیل عظیمی از محققان به کار کردن در ابعاد مختلف نظریه‌ی موجک‌ها بپردازند، تا جایی که اکنون نظریه موجک‌ها با وجود نوپایی به یکی از تنومندترین شاخه‌های آنالیز ریاضی تبدیل شده است.

[۱۴] Meyer
[۱۵] Frazier

مسائل، رگ‌هایی هستند که به بدن ریاضیات خون می‌رسانند.

هشترودی

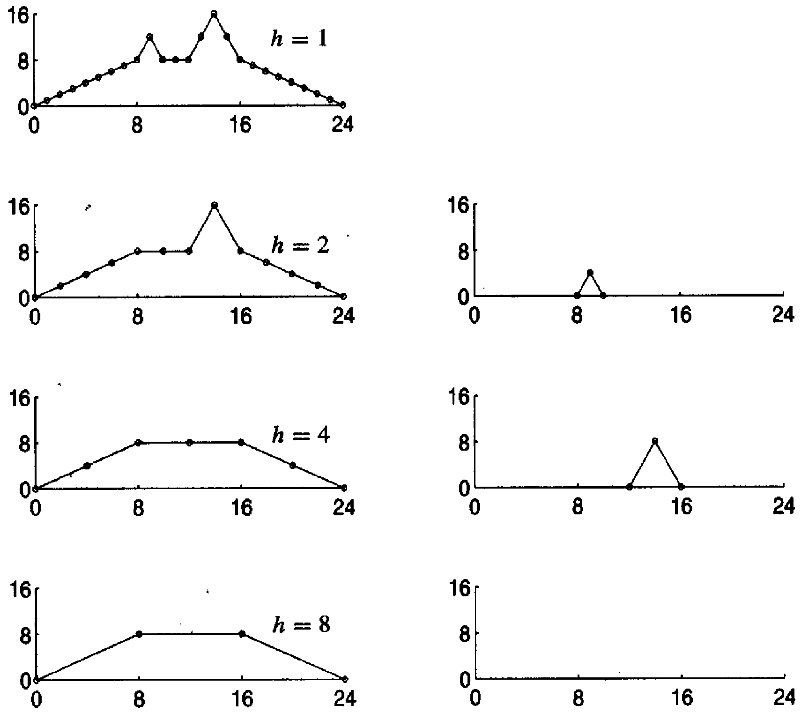
فصل ۲

مقدمه‌ای بر موجک

۱.۲ مقدمه

آنالیز تجزیه چندگانه [1]یکی از ایده‌های اصلی برای ساخت موجک‌ها می‌باشد. با بکارگیری آنالیز تجزیه چندگانه می‌توان یک تابع پیچیده نظیر یک سیگنال را به چند تابع ساده‌تر تبدیل کرده و بطور جداگانه روی آنها مطالعه کرد. به عنوان مثال ما یک تابع (شکل ۱.۲) که شامل بخش‌های به سرعت در حال تغییر و به طور آهسته در حال تغییر است را با آنالیز تجزیه چندگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم. (شکل ۱.۲).

[1] multiresulotion analysis (or MRA)



شکل ۱.۲ : تجزیه یک تابع به چند تابع ساده تر (برگرفته از منبع [۶])

اگر بخواهیم این تابع را در یک مرحله از تقریب نشان دهیم مجبوریم آنرا با طول گام h گسسته کنیم که h با توجه به بخش به سرعت در حال تغییر تابع بدست آمده است. این عمل باعث به وجود آمدن تعداد زیادی از نقاط می‌شود، که حجم محاسبات برای پردازش را افزایش می‌دهد.

با نشان دادن تابع با استفاده از چند مرحله گسسته‌سازی (تجزیه) می‌توان تعداد نقاط لازم برای نمایش درست را به طور کافی کاهش داد. درشتترین تقریب تابع به همراه جزئیات در هر مرحله تابع اصلی را به طور کامل نمایش می‌دهند. مشاهده می‌کنیم که در هر مرحله (مقیاس) اندازه‌ی طول گام دوبرابر شده است که مطابق سطح اکتاو در پردازش صوت می‌باشد. به این نوع پردازش توابع، آنالیز تجزیه چندگانه یا آنالیز تجزیه چندسطحی گویند.

در این بخش به معرفی موجک‌ها می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که چه زمانی یک تابع می‌تواند یک آنالیز تجزیه چندگانه به وجود بیاورد.

۲.۲ توابع مقیاس

آنالیز تجزیه چندگانه به طور کلی از ایده‌ی تصویر کردن توابع هموار به روی برخی از زیرفضاها و نمایش آنها با استفاده از یک رده‌ی خاص از توابع، که به عنوان توابع پایه‌ای برای زیرفضاهایی که در آنالیز تجزیه چندگانه از آن‌ها استفاده می‌شود، در زمینه‌های مختلف استفاده می‌کند. این رده خاص از توابع به توابع مقیاس شهرت دارند و زمینه را برای معرفی موجک‌ها فراهم می‌سازند.

تعریف ۱.۲.۲. یک تابع مقیاس به طور اساسی به تابعی مانند $\phi(x)$ گفته می‌شود که بتوان آن را به صورت ترکیب خطی از $\phi(۲x-k)$ نوشت. یا به طور واضح‌تر:

$$\phi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k\phi(۲x-k).$$

رابطه‌ی فوق به رابطه‌ی دومقیاسی برای توابع مقیاس مشهور است و دنباله‌ی $\{p_k\}$ نیز دنباله‌ی دومقیاسی نام دارد. اگر تعداد متناهی از اعضای دنباله‌ی ضرایب دومقیاسی $\{p_k\}$ مخالف صفر باشند آنگاه تابع مقیاس دارای محمل فشرده است.

می‌توان رابطه‌ی دومقیاسی را در حالت کلی به صورت زیر نوشت:

$$\phi(۲^j x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k\phi(۲^{j+۱}x-k), \qquad j\in\mathbb{Z}. \tag{۱.۲}$$

حال فضای V_j را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_j=Span\{\phi(۲^j x-k), \quad k\in\mathbb{Z}\}, \qquad j\in\mathbb{Z}.$$

در واقع فضای V_j زیرفضایی از فضای $L^۲(\mathbb{R})$ است که می‌توان هر تابع عضو $L^۲(\mathbb{R})$ را به درون آن تصویر کرد. به طور واضحتر می‌توان هر تابع دلخواه $f\in L^۲(\mathbb{R})$ را به روی یک تابع $f_j\in V_j$ تصویر کرد،

به عبارت دیگر یک تقریب به صورت

$$f \approx f_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi(۲^j x - k)$$

برای f نوشت.

مثال ۲.۲.۲.

$$V_۰ = Span\{\phi(x-k), \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

باتوجه به رابطه‌ی دومقیاسی می‌توان گفت که $V_۰ \subset V_۱$ می‌باشد. در واقع در حالت کلی‌تر رابطه‌ی دومقیاسی دنباله‌ی تودرتوی زیر از فضای V_j را می‌سازد:

$$\{۰\} \subset \cdots \subset V_{-۱} \subset V_۰ \subset V_۱ \subset \cdots \subset L^۲(\mathbb{R}). \tag{۲.۲}$$

همانطور که در تاریخچه ذکر شد هدف از ساختن موجک‌ها، بازسازی توابع و آنالیز تجزیه چندگانه موجک است و همچنین بیان شد که برای ساختن موجک‌ها نیاز به ساختن توابع مقیاس داریم. اما سوال مهمی که ممکن است به ذهن خواننده‌ی علاقمند برسد این است که آیا هر تابعی که در رابطه‌ی دومقیاسی صدق کند می‌تواند یک آنالیز تجزیه چندگانه به وجود بیاورد! در زیر تعریفی ارائه می‌شود که خواننده را به پاسخ سوال فوق رهنمون می‌سازد.

تعریف ۳.۲.۲. یک تابع $\phi \in L^۲(\mathbb{R})$ یک آنالیز تجزیه چندگانه (MRA) تولید می‌کند هرگاه یک دنباله از زیر فضاهای تودرتو تولید کند به طوریکه در شرایط زیر صدق کند:

1. $\cdots \subset V_{-۱} \subset V_۰ \subset V_۱ \subset \cdots$,
2. $\left(\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j\right) = L^۲(\mathbb{R})$,

3. $\left(\bigcap_{j\in Z} V_j\right) = \{\circ\}$,

4. $f(x)\in V_j \Leftrightarrow f(۲x) \in V_{j+۱}$.

از تعریف فوق نتیجه می‌گیریم که در حالت کلی هر تابعی که در رابطه‌ی دومقیاسی صدق کند نمی‌تواند یک آنالیز تجزیه چندگانه (MRA) تولید کند.

۳.۲ توابع موجک

فرض کنید فضاهای V_j داده شده‌اند، آنگاه به ازای هر تابع V_j، یک زیرفضای W_j که در تعامد با V_j است وجود دارد به طوریکه:

$$V_j \cap W_j = \{\circ\} \quad , \quad V_{j+۱} = V \oplus W_j.$$

با توجه به خاصیت تودرتو بودن می‌توان نوشت:

$$V_J = V_j \oplus \bigoplus_{k=\circ}^{J-j-۱} W_j, \qquad j \leq J \tag{۳.۲}$$

در نتیجه:

$$L^۲(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = \cdots \oplus W_{-۱} \oplus W_\circ \oplus W_۱ \oplus \cdots . \tag{۴.۲}$$

از آنجائیکه که $W_j \subset V_{j+۱}$ و $V_j \cap W_j = \{\circ\}$، پس می‌توان یک مجموعه از توابعی مانند ψ پیدا کرد که $\psi \in V_{j+۱}$ ولی $\psi \notin V_j$ و مجموعه توابع ψ پایه‌ای برای W_j تشکیل دهد. این رده از توابع را موجک می‌نامیم و فضای W_j را به صورت زیر بر حسب توابع پایه‌ای تعریف می‌کنیم:

$$W_j = Span\{\psi(۲^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z}\}, \qquad j \in \mathbb{Z}$$

.

همانطور که $W_j \subset V_{j+۱}$، پس می‌توان هر $\psi(۲^j x - k)$ را به صورت ترکیب خطی از توابع پایه‌ای $\phi(۲^{j+۱}x - k)$ نوشت، یا به عبارت دیگر:

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q_k \phi(۲x - k).$$

یا در حالت کلی:

$$\psi(۲^j x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q_k \phi(۲^{j+۱}x - k), \qquad (۵.۲)$$

که به رابطه‌ی دومقیاسی برای موجک‌ها مشهور است.

۴.۲ الگوریتم‌های بازسازی و تجزیه

یکی از اهداف آنالیز تجزیه چندگانه، تقریب توابع در فضاهای مختلف و پردازش موازی (کاهش زمان محاسبات) می‌باشد. اما سوالی که مطرح می‌شود این است که این هدف چگونه محقق می‌شود در حالی که مجبوریم در فضاهای مختلف ضرایب زیادی را محاسبه کنیم و می‌دانیم که این عمل منجر به افزایش حجم و زمان محاسبات می‌شود!

با توجه به رابطه‌ی تودرتوی (۲.۲) هر چقدر تقریب تابع را در فضاهای بالاتر بدست بیاوریم به تابع نزدیکتر است و در نتیجه خطای کمتری را متحمل می‌شویم. اما نکته‌ی ظریفی که باید به آن دقت کرد این است که با رفتن به فضاهای بالاتر باوجود افزایش دقت، تعداد ضرایبی که باید محاسبه شوند نیز افزایش می‌یابد و این باعث توقف ما در پردازش‌ها می‌شود. در این بخش الگوریتم‌هایی را معرفی می‌کنیم که به ما کمک می‌کنند تا با محاسبه‌ی ضرایب در یک فضا، ضرایب در فضاهای دیگر را به راحتی بدست بیاوریم و بدین ترتیب از حجم محاسبات کاسته شود. این الگوریتم‌ها به **الگوریتم‌های بازسازی** [۲] و **تجزیه** [۳] شهرت دارند و از **روابط بازسازی و تجزیه** بدست می‌آیند.

[۲] Reconstuction
[۳] Decomposition

۱.۴.۲ روابط بازسازی و تجزیه

روابط بازسازی همان روابط آشنای دومقیاسی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\phi(2^j x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \phi(2^{j+1}x - k) \ \ , \ \ \psi(2^j x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q_k \phi(2^{j+1}x - k). \qquad (۶.۲)$$

یا در حالت خاص:

$$\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k) \ \ , \ \ \psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q_k \phi(2x - k).$$

رابطه‌ی $V_1 = V_0 \oplus W_0$ نشان می‌دهد که هر عضو V_1 را می‌توان برحسب ترکیب خطی از اعضای V_0 به علاوه‌ی ترکیب خطی از اعضای W_0 نوشت. اگر بخواهیم این جمله را به زبان ریاضی بیان کنیم بدین معناست که می‌توان دنباله‌های $\{a_{-2k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ، $\{b_{-2k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ، $\{a_{1-2k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ و $\{b_{1-2k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ را یافت به طوری که:

$$\phi(2x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_{-2k}\phi(x-k) + b_{-2k}\psi(x-k))$$

و

$$\phi(2x - 1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_{1-2k}\phi(x-k) + b_{1-2k}\psi(x-k))$$

و یا در حالت کلی می‌توان رابطه‌ی زیر را بیان نمود.

$$\phi(2x - l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_{l-2k}\phi(x-k) + b_{l-2k}\psi(x-k)). \qquad (۷.۲)$$

دنباله‌های $\{a_k\}$ و $\{b_k\}$ به دنباله‌های تجزیه معروفند.

۲.۴.۲ الگوریتم‌ها

برای ساختن الگوریتم‌های بازسازی و تجزیه، ابتدا فرض می‌کنیم تابع $f \in L^2(\mathbb{R})$. از آنجائیکه رابطه‌ی $V_N \subset L^2(\mathbb{R})$ برقرار است، پس برای $N \in Z$ می‌توان f را در فضای V_N تصویر کرد. فرض کنید