بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه علم و صنعت ایران

«دانشکده فیزیک»

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک

موضوع

بررسی خود- میدانها در لیزر الکترون آزاد با میدان ویگلر مارپیچی و ابزار راهنمای میدان محوری و کانال یونی و محاسبه تصحیح‌های متوالی

استاد راهنما

دکتر مهدی اسماعیل‌زاده

نگارش

علاالدین سیاحیان جهرمی

زمستان ۱۳۸۲

فهرست

عنوان	صفحه
فصل اول	
مقدمه	۱
فصل دوم: خود- میدانها در حضور میدان مغناطیسی محوری	
۲-۱ معادلات حرکت در غیاب خود-میدانها	۹
۲-۱-۱ میدان مغناطیسی ویگلر و میدان محوری	۹
۲-۱-۲ معادلات حرکت در غیاب خود- میدانها	۱۰
۲-۲ محاسبه خود- میدانها	۱۲
۲-۲-۱ خود- میدان الکتریکی	۱۳
۲-۲-۲ خود- میدان مغناطیسی با فرض سرعت محوری	۱۳
۲-۳ خود-میدان مغناطیسی با در نظر گرفتن سرعتهای عرضی	۱۴
فصل سوم: خود- میدانها در حضور کانال یونی	
۳-۱ معادلات حرکت در غیاب خود- میدانها	۲۴
۳-۲ محاسبه خود- میدانها	۲۵
۳-۲-۱ خود- میدان الکتریکی	۲۵
۳-۲-۲ خود- میدان مغناطیسی با در نظر گرفتن سرعتهای عرضی	۲۶

فصل چهارم: خود- میدانها در حضور کانال یونی و میدان مغناطیسی محوری

٤-١ معادلات حرکت در غیاب خود- میدانها ٢٩

٤-٢ محاسبه خود- میدانها ٣٠

٤-٢-١ خود-میدان الکتریکی ٣٠

٤-٢-٢ خود-میدان مغناطیسی با در نظر گرفتن سرعتهای عرضی تصحیح ٣٠

فصل پنجم: تصحیح مرتبه‌های بالاتر برای خود- میدانها

٥-١ تصحیح مرتبه دوم ٣٧

٥-٢ تصحیح مرتبه‌های بالاتر ٣٩

فصل ششم: بررسی نتایج وپیشنهادات ٤٨

منابع وماخذ ٥٣

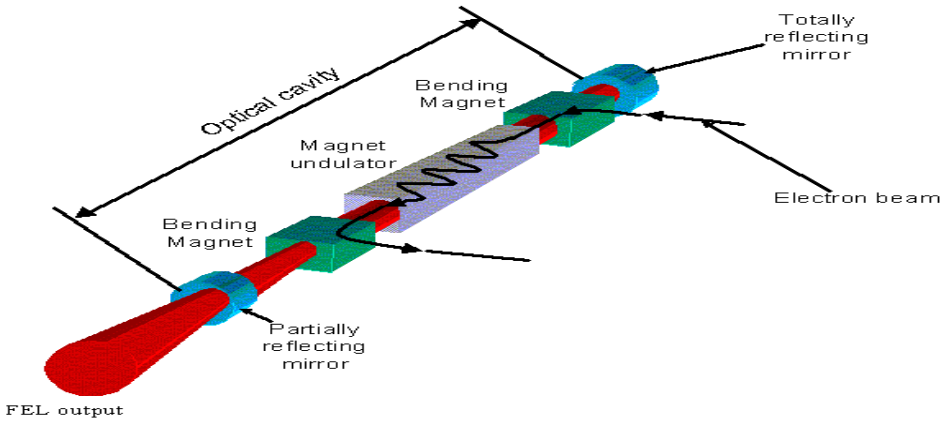
فصل اول

مقدمه

لیزر الکترون آزاد دستگاه تولید نورهمدوس با قابلیت بسیار است. عملاً روی هر طول موج قابل تنظیم بوده و از بازده بسیار زیاد نیز برخورداراست، که در آزمایشگاهها تا ٤٠ درصد و از نظر نظری‌تا ٦٥درصد قابل افزایش می‌باشد و این روند رشد همچنان ادامه دارد.

لیزرهای الکترون آزاد طول موجهائی از میکرو موج تا اشعه X را تولید می‌کنند. هرچند در تولید طول موجهای کوتاه پژوهشگران با دشواریهایی مواجه هستند. این توانائی از آزاد بودن الکترونها به عنوان مادهٔ فعال لیزر ناشی می‌شود که در خلاء حرکت می‌نماید.

نور این لیزرها در اثر برهم کنش سه عامل تولید می‌شود. باریکه الکترون،یک موج الکترومغناطیسی که در همان راستای حرکت الکترونها درکاواک لیزر حرکت می‌کند و یک میدان مغناطیسی که در فضا دوره‌ای است و به وسیله یک مجموعه آهنربا به نام ویگلر ایجاد می‌شود.در شکل (١-١) نمای شماتیک یک دستگاه لیزر الکترون آزاد نشان داده شده است.



شکل(۱-۱) نمائی از ساختمان لیزر الکترون آزاد.

در لیزر الکترون آزاد تاثیر میدان مغناطیسی ویگلر روی الکترونها طوری است که الکترونها به موج الکترومغناطیسی انرژی می‌دهند. این انرژی باعث تقویت موج می‌شود.هنگام عبورنور از میدان ویگلر تداخل صورت می‌گیرد. بسامد موج زنش بوجود آمده ناشی از این تداخل با بسامد موج نور یکسان است، ولی عدد موج آن برابر با مجموع عدد موجهای باریکه نور و میدان ویگلر است.موج زنش ایجاد شده به علت بزرگتر بودن عدد موج ان آهسته‌تر از موج نورحرکت می‌کند. به همین دلیل به آن موج ‹‹گرانرو›› می‌گویند.

میدان الکترومغناطیسی موج گرانرو ترکیبی از میدان موج نور و میدان ساکن ویگلر است و این همان میدانی است که به الکترون درحال حرکت اثر می‌کند.برهم کنش الکترونها و موج گرانرو شبیه به بر هم کنش موج سواران با موجی است که به ساحل نزدیک می‌شود.اگر موج سواران حرکتی نداشته باشند با عبور موج تنها بالا و پائین می‌روند. ولی اگر خود را با سرعت موج تطبیق دهند و بتوانند بر موج سوار شوند اندازه حرکت قابل ملاحظه‌ای از موج دریافت می‌کنند. در لیزر الکترون آزاد الکترونها موج را تقویت می‌کنند. مانند این است که موج سواران موج را هل می‌دهند، به این تطابق دو حرکت ، همگامی گوئیم که از اصول کار لیزر الکترون آزاد است. الکترونی که در میدان

الکترومغناطیسی حرکت می‌کند تحت تاثیر نیرویی واقع می‌شود که هم بر امتداد میدان و هم بر امتداد حرکت عمود است.

وقتی الکترون وارد میدان عرضی ویگلر می‌شود تحت تاثیر یک نیروی عرضی قرار می‌گیرد که به آن سرعتی عرضی می‌دهد.برهم کنش این سرعت عرضی که ویگلر ایجاد کرده با میدان مغناطیسی موج الکترومغناطیسی نیرویی عمود بر هردو در امتداد محور ایجاد می‌کند که همان نیروی ‹‹ گرانروی›› است.

الکترونی که سریعتر از موج گرانرو حرکت می‌کند در خلاف جهت نیروی گرانروی در حرکت است بنابراین کند خواهد شد.چون انرژی کل سیستم موج ذره باید بایسته بماند بنابراین انرژیی که الکترون از دست می‌دهد نصیب موج می‌شود. و از این رو موج نوری که از داخل کاواک می‌گذرد با انرژی الکترون تقویت می‌شود.میزان تقویت به تفاوت سرعت الکترون با سرعت موج گرانرو و نیز به شدت برهم کنش میان الکترون و این موج بستگی دارد.

اگر سرعت الکترونها و سرعت موج تقریبا" برابر باشند الکترونها پیش از آنکه کند شوند و دیگر نتوانند از قله‌های موج بگذرند مقدار کمی انرژی به موج می‌دهند.اما اگر الکترونها خیلی سریعتر یا خیلی آهسته‌تر از موج گرانرو در حرکت باشند برهم کنش میان این دو خفیف خواهد بود . هنگامی که الکترونها و موج گرانرو با هم در میدان ویگلر حرکت می‌کنند، الکترونها انرژی از دست می‌دهند و کند می‌شوند ، تا اینکه دیگر نمی‌توانند از قله‌های موج گرانرو بگذرند. موج گرانرو سرعت الکترونها را آنقدر کم می‌کند که حرکت آنها کندتر از حرکت موج می‌شود. آنوقت قلهٔ بعدی از راه می‌رسد و دوباره به الکترونها شتاب می‌دهد. یعنی الکترونها به دام می‌افتند و در دره‌های موج گرانرو پس و پیش می‌شوند. در این حالت عمل تقویت متوقف می‌شود. و باریکه الکترون به باریکه‌ای

غیر یکدست با انرژی کمتر تبدیل می‌شود. و در آن ناحیه‌هایی که چگالی الکترون در آنها زیاد است متناوبا" با نواحی کم چگالی جا عوض می‌کنند. کیفیت باریکه الکترون اولیه نقش تعیین کننده‌ای در مکانیسم دام اندازی دارد. هرچه دمای باریکه کمتر باشد توزیع سرعت درآن باریکتر است و کارایی لیزر الکترون آزاد بیشتر خواهد بود. اگر گستردگی توزیع سرعت دربارِیکه خیلی زیاد باشد بسیاری از الکترونها به جای آنکه بخش قابل توجهی از انرژی خود را از دست بدهند و به دام موج گرانرو بیفتند، بی‌آنکه سرعتشان در مجموع تغییر کند از میدان ویگلرمی گذرند.

گستردگی مناسب برای توزیع سرعت دربارِیکه بستگی به نوع باریکه وپارامترهای ویگلر دارد. هرچه طول موج کار لیزر کوچکتر شود قیدها شدیدتر می‌شوند به طوری که برای کار لیزر در فرابنفش و کمترمشکلات شدیدی پیش می‌آید.

اگر چه اصول لیزر الکترون آزاد نسبتا" ساده است ولی عملی کردن آن بسیار دشوار بوده است. اولین بار هانس ماتز از دانشگاه استانفورد طیف گسیلی باریکه الکترون در میدان مغناطیسی مواج را در سال ۱۹۵۱ محاسبه کرد.[۱] .او و همکارانش ابتدا نورسبز آبی ناهمدوس تولید کردند و بعد موفق شدند که به تقویت نور همدوس در طول موجهای میلیمتری دست یابند.

در سال ۱۹۵۷ رابرت فیلیپس از شرکت جنرال الکتریک کاربرد میدانهای مغناطیسی مواج در تقویت میکروموج را مستقلا" کشف کرد او یوبیترون خود را طی ۷ سال تکامل بخشید و طرحهای متعددی ارائه کرد که هنوز به کار می‌روند.یکی از دستگاههای او ۱۵۰ کیلووات پرتو میکروموج همدوس درطول موج ۵ میلی‌متر تولید می‌کرد.

در سال ۱۳٥٤/۱۹۷۵ میدی و همکارانش در استانفورد با استفاده از یک ویگلر مارپیچ و باریکه الکترون که از یک شتابدهندهٔ خطی می‌گرفتند توانستند خروجی لیزر CO_2 با طول موج ۱۰/٦ میکرون

را تقویت کنند.[۲].پس از آن ، در آزمایشگاههای تحقیقاتی زیادی از جمله دانشگاه کلمبیا و موسسه تکنولوژی ماساچوست (MIT) یا در فرانسه و... تولید تپهای کوتاه با توان قله بسیار تولید شد.آزمایشگران از باریکه‌های الکترونی قوی با انرژیهای بیش از یک میلیون الکترون ولت (Mev) و جریانهای بیش از ۱۰۰۰ آمپر استفاده می‌کردند گستره توان قله از دو مگاوات در طول موج دو میلی‌متر در کلمبیا تا یک گیگاوات در طول موج هشت میلی‌متر در لیورمور را شامل می‌شد.

درسال ۱۹۸۷ اولین لیزرالکترون آزاد نور مرئی با استفاده از حلقه انباشت الکترون دانشگاه پاریس در ارسی ساخته شد.[۳].درحال حاضر کار روی لیزرهای الکترون آزاد هم در طول موجهای مرئی و هم در طول موجهای میلی‌متری ادامه دارد.هدف اصلی پژوهشگران رسیدن به توانهای بیشتر، بخصوص توانهای متوسط بیشتر و طول موجهای کوتاهتر است.

بازده لیزر الکترون آزاد ساده ای که به ویگلر یکنواخت مجهز باشد حدی دارد. در بهترین شرایط الکترونهایی که از چنین سیستمی می‌گذرنند می‌توانند ۱۲ درصد از انرژی خود را به نوری که از کاواک می‌گذرد انتقال بدهند.با از دست دادن این مقدار انرژی الکترونها در دام موج گرانرو می افتند و سرعت آنها آنقدر کم می‌شود که نمی‌توانند به طور موثر انرژی به موج انتقال بدهند.برای افزایش بازده باید شرایط همگامی همچنان برقرار باشد. یعنی یا موج گرانرو آهسته گردد و یا الکترونها سرعت بیشتری یابند.برای حفظ سرعت پیشروی باریکه معمولاً لازم است که دامنه و یا دورهٔ ویگلر کاهش یابد،که به ان ویگلر دوکی شده گویند.

باریکه الکترون در ابتدای ورودش به ویگلر درخط راست حرکت می‌کند و کل سرعتش در امتدا محور است. میدان مغناطیسی ویگلر باعث خمش باریکه در امتداد عرض می‌شود. این کار از سرعت پیشروی می‌کاهد و بخشی از آن را به سرعت عرضی تبدیل می‌کند.این مولفه محوری سرعت

است که باید با سرعت موج گرانرو تطبیق کند.کاهش تدریجی شدت میدان ویگلر و یا دورهٔ آن بین دو سرکاواک، سرعت عرضی الکترون را کم می‌کند و آن را دوباره به سرعت محوری تبدیل می‌کند.به این ترتیب با آنکه باریکه الکترون به موج نوری انرژی می‌دهد و آن را تقویت می‌کند حرکت پیشرونده باریکه حفظ می‌شود.اما گردشهای عرضی الکترونها کوچکتر خواهد بود و بنابراین سرعت محوری لازم برای همگامی با وجود کاهش سرعت کل حاصل خواهد شد.

در یک لیزر الکترون آزاد با ویگلردوکی شده به دام افتادن باریکه الکترون در دره‌های موج گرانرو به معنی پایان انتقال انرژی نیست. زیرا همچنان که ویگلر ضعیف می‌شود الکترونهای بدام افتاده سرعت محوری کسب می‌کنند که باعث سوار شدن آنها بر قله‌های موج گرانرو می‌شود و عمل تقویت ادامه می‌یابد.[۱]

درلیورمور ویگلر دوکی شده در لیزر الکترون آزاد با طول موج میلی‌متری، ۳۵ درصد انرژی باریکه الکترون را می‌گیرد و به تابش تبدیل می‌کند.درحالی که ویگلر یکنواخت در همین سیستم فقط ٦ درصد انرژی الکترون رابه موج نوری منتقل می‌کند.

نکته دیگر در طراحی ویگلر، انتخاب ویگلر مارپیچی و تخت است. ویگلر مارپیچی باریکه الکترون را در مسیری مارپیچی هدایت می‌کند درحالی که ویگلر تخت مسیری سینوسی به آن می‌دهد.در مسیر مارپیچی سرعتهای عرضی و محوری باریکه ثابت می‌مانند ولی حرکت ایجاد شده توسط ویگلر تخت نوسانی است.

برای انجام برهم کنش میان باریکه الکترون و موج گرانرو، میدان مغناطیسی موردنیاز در ویگلر مارپیچ ۷۰درصد میدان ویگلر تخت است.ولی در عوض ویگلر تخت تنظیم ساده‌تری دارد و برای کار ویگلر دوکی شده مناسبتر است. کارائی مطلوب لیزر علاوه بر ویگلر به کیفیت باریکه الکترون نیز

وابسته است. آزمایشگران به اصلاح شتابدهنده‌های الکترون مشغولند تا بتوانند باریکه‌های موردنیاز لیزرهای الکترون آزاد را فراهم کنند.برای کارائی مطلوب هر لیزر الکترون آزاد خاصی به شتابدهندهٔ مناسب خود نیاز دارد. برای مثال شتابدهنده حلقه‌های انباشت باریکه‌هایی با کیفیت خوب و انرژی زیاد با جریانهای کم و متوسط تولید می‌کنند و برای لیزرهای کم‌توان و با طول موج کوتاه بسیار مناسب هستند.

بازده لیزرهای الکترون آزادی که با الکترونهای پرانرژی کار می‌کنند عموماً کم است. زیرا جرم موثر الکترونهایی که با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت می‌کنند زیاد است و بنابراین دربر هم کنش با میدان ویگلر حساسیت کمتری نشان می‌دهند.

باریکه الکترون در حلقه انباشت متشکل از یک رشته تپهای پیکو ثانیه‌ای است این تپها پیوسته در حلقه گردش می‌کنند و امکان می‌دهند که لیزر الکترون آزاد به صورت نوسانگر عمل کند.نور لیزر الکترون آزادی که به کمک باریکه الکترون حلقه انباشت تولید می‌شود شامل تپهای کوتاهی است که با تپهای باریکه تطبیق می‌کنند. این تپها رفت و برگشتهای متعددی در کاواک انجام می‌دهند تا توان لازم را کسب کنند.

در شتابدهنده‌های خطی رادیو- بسامدی ، از یک مجموعه کاواک استفاده می‌شود که حاوی میدانهای الکترومغناطیسی با تغییرات سریع برای شتاب دادن الکترونهاست. این شتابدهنده‌ها باریکه‌هائی تولید می‌کنند که شامل ماکروتپهایی (در حدود میکروثانیه) است که هریک از آنها از یک رشته میکروتپ پیکو ثانیه‌ای تشکیل می‌شود. این شتابدهنده‌ها برای لیزرهای الکترون آزاد نوسانگر که نور مرئی گسیل می‌دارند، الکترون فراهم می‌کنند.این لیزرها نیز نور را به صورت تپ اما با توانهای بسیار بیشتر از نوع قبلی ارسال می‌کنند.

شتابدهنده‌های خطی القایی هم قادرند لیزرهای الکترون آزاد پرتوانی را به کار اندازند. اساس کار آنها براین است که با تغییر سریع شدت میدان مغناطیسی در یک کاواک نیروی محرکه القایی ایجاد می‌شود باریکه الکترون کار سیم پیچ ثانویه در مبدل مغناطیسی را انجام می‌دهد.

قلهٔ توانی که شتابدهنده‌های خطی القایی تولید می‌کنند بلندتر از قله‌ای است که شتابدهنده‌های رادیو–بسامدی تولید می‌کنند، اما برای رسیدن به میانگین توان بالا باید به آنها پی‌درپی الکترون شلیک کرد.آزمایشگران در لیورمور توانسته‌اند به تپهایی به مدت ۵۰ نانوثانیه به جریان ۱۰۰۰۰ آمپر و انرژی ۵۰ Mev دست یابند.

اگرچه شتابنده‌های الکترواستاتیکی در مقایسه با شتابدهنده‌های خطی از توان متوسط کمتری برخوردارند ولی می‌توانند باریکه‌های الکترونی پیوسته فراهم کنند که برای لیزرهای الکترون آزادی مناسب است که در گسترهٔ میکروموج نامرئی نورگسیل می‌کنند.

لیزر الکترون آزاد به خاطر: توان زیاد، بسیار کوتاه بودن تپها و قابلیت کار در گسترهٔ وسیع بسامدی در تحقیقات زیادی کاربرد دارد از جمله :

فیزیک حالت جامد، شیمی احتراق، طیف سنجی فلوئورسانی با تفکیک زیاد و پوش چند فوتونی آبگونها در پزشکی و مطالعه جهشهای «نور– برانگیخته» مولکولهای DNA همچنین علاوه براین کاربردهای پژوهشی در زمینه‌هایی چون مخابرات، رادار و گرم کردن پلاسما هم کاربردگسترده دارد.[۴]

یکی از مشکلات این نوع لیزر حجم و پیچیدگی آن است.البته ساخت شتابدهندهای مخصوص لیزر الکترون آزاد وطراحی ویگلرهای دوکی که بادوره کوتاه کارمیکنند میتواند به کاهش ابعاد و پیچیدگی لیزرهای الکترون آزادکمک کند.

فصل دوم

خود- میدانها در حضور میدان مغناطیسی محوری

۲-۱ معادلات حرکت در غیاب خود- میدانها

۲-۱-۱- میدان مغناطیسی ویگلر و میدان محوری

مسیرهای الکترون در میدان مغناطیسی ویگلر، در لیزهای الکترون آزاد برای شناخت نحوه کار آن مهم و اساسی است.میدان مغناطیسی ویگلر که باعث حرکت شتابدار الکترون می‌شود به دو صورت وجود دارد، میدان ویگلر مارپیچی و تخت.

میدان ویگلر مارپیچی در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود.[۵]

$$\mathbf{B}_w(x) = ۲B_w(I_۱'(l)\cos c\,\hat{\mathbf{e}}_r - \frac{۱}{l}I_۱(l)\sin c\,\hat{\mathbf{e}}_q + I_۱(l) + I_۱(l)\sin c\,\hat{\mathbf{e}}_z) \qquad (۱-۲)$$

که در آن و $k_w = \frac{۲p}{l_w}$ و $c = q - k_w z$ و $l = k_w r$ و B_w دامنه ویگلر است.

k_w عدد موج میدان ویگلرو I_1 و I_1' به ترتیب تابع بسل نوع اول و مشتق آن است. این میدان دارای یک کمینه محلی بر روی محور $(r=0)$ است که برخلاف خود- میدانها باعث متمرکز شدن باریکه الکترونی می‌شود.

در اکثر مواقع میدان محوری یکنواخت $(B_0\hat{\mathbf{e}}_z)$ برای تمرکز بهتر باریکه قوی الکترونی در کنار ویگلر به کار گرفته می‌شود.

برای سادگی غالباً بهتر است که تقریب یک بعدی ایده‌آل برای ویگلر در نظر بگیریم که در این تقریب فاصله الکترون از محور تقارن بسیار کمتر از پریود مکانی (طول موج) ویگلر باشد $(r << l_w)$ در این حد ویگلر به شکل زیر ساده می‌شود.[۵]

$$\mathbf{B}_w = B_w(\hat{\mathbf{e}}_x \cos k_w z + \hat{\mathbf{e}}_y \sin k_w z) \qquad (۲-۲)$$

ویگلر تخت نیز در حالت ایده‌آل از رابط زیر تبعیت می‌کند.[۵]

$$\mathbf{B}_w = B_w \sin k_w z\, \hat{\mathbf{e}}_z \qquad (۳-۲)$$

۲-۱-۲ معادلات حرکت در غیاب خود میدانها

معمولاً" لیزرالکترون-آزاد را شامل ویگلر مارپیچی و میدان محوری یکنواخت در نظر می گیرند ، در چنین حالتی مدارها به وسیله معادله نیروی لورنتس محاسبه می‌گردنند.این معادله برای حرکت نسبیتی یک الکترون با جرم سکون m و بار $-e$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{d(g\, m\mathbf{v})}{dt} = -e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad (٤-۲)$$

که در آن c سرعت نور، g عامل نسبیتی، $\mathbf{v}$ سرعت ذره در راستای محور z، $\mathbf{E}$ میدان الکتریکی که در اینجا وجود ندارد و $\mathbf{B}$ میدان مغناطیسی که شامل ویگلر و میدان محوری است.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_w + B_0\hat{\mathbf{e}}_z = B_w(\cos k_w z\,\hat{\mathbf{e}}_x + \sin k_w z\,\hat{\mathbf{e}}_y) + B_0\hat{\mathbf{e}}_z \qquad (۵-۲)$$

مولفه‌های معادله لورنتس $\frac{d\,\gamma m\mathbf{v}}{dt} = \frac{-e}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ با توجه به:

$$\mathbf{v}\times\mathbf{B} = (v_y B_\circ - v_z B_w \sin k_w z)\,\hat{\mathbf{e}}_x + (v_z B_w \cos k_w z - v_x B_\circ)\,\hat{\mathbf{e}}_y \qquad (٦-٢)$$

$$+ (v_x B_w \sin k_w z - v_y B_w \cos k_w z)\,\hat{\mathbf{e}}_z$$

در مختصات عمودی به صورت زیر درمی‌آیند.

$$\frac{dg\ mv_x}{dt} = \frac{-e}{c}(v_y B_\circ - v_z B_w \sin k_w z) \qquad (٧-٢)$$

$$\frac{dg\ mv_y}{dt} = \frac{-e}{c}(v_z B_w \cos k_w z - v_x B_\circ) \qquad (٨-٢)$$

$$\frac{dg\ mv_z}{dt} = \frac{-e}{c}(v_x B_w \sin k_w z - v_y B_w \cos k_w z) \qquad (٩-٢)$$

با تعریف فرکانس سیکلوترون میدان محوری $\Omega_\circ \equiv \frac{eB_\circ}{mg\ c}$ و فرکانس سیکلوترون ویگلر $\Omega_w \equiv \frac{eB_w}{mg\ c}$

در معادلات (۲-۷) تا (۲-۹) بدست می‌آید.

$$\frac{d\,v_x}{dt} = -\Omega_\circ v_y + \Omega_w v_z \sin k_w z \qquad (١٠-٢)$$

$$\frac{d\,v_y}{dt} = \Omega_\circ\, v_x - \Omega_w v_z \cos k_w z \qquad (١١-٢)$$

$$\frac{d\,v_z}{dt} = \Omega_w (v_y \cos k_w z - v_x \sin k_w z) \qquad (١٢-٢)$$

با در نظر گرفتن جوابهایی به صورت زیر:[۱۰و۶].

$$v_x = A\cos k_w z \qquad (١٣-٢)$$

$$v_y = B\sin k_w z$$

v_z=ثابت

و جایگذاری در معادلات (۲-۱۰)و(۲-۱۲) نتایج زیر حاصل می‌شود.

$$-Ak_w v_z \sin k_w z = -\Omega_\circ B \sin k_w z + \Omega_w v_z \sin k_w z \qquad (۲-۱۴)$$

$$-k_w v_z A = \Omega_\circ B + \Omega_w v_z$$

$$\circ = \Omega_w (B\cos k_w z \sin k_w z - A\cos k_w z \sin k_w z) \qquad (۲-۱۵)$$

با توجه به معادلات (۲-۱۴)و(۲-۱۵) بدست می‌آید.

$$A = B$$
$$A = \frac{\Omega_w v_z}{\Omega_\circ - k_w v_z} \qquad (۲-۱۶)$$

و برای سرعتها جوابهای بهنجار شده بصورت زیر می‌شود.

$$b_x = b_\perp \cos k_w z \qquad (۲-۱۷)$$

$$b_y = b_\perp \sin k_w z \qquad (۲-۱۸)$$

$$b_z = b_\parallel \text{ (ثابت)} \qquad (۲-۱۹)$$

که در معادلات (۲-۱۷) تا (۲-۱۹) $b_x = \frac{v_x}{c}$ و $b_y = \frac{v_y}{c}$ و $b_z = \frac{v_z}{c}$ بوده و نیز

$$b_\perp \equiv \frac{\overline{\Omega}_w b_\parallel}{\overline{\Omega}_\circ - b_\parallel} \quad , \quad \overline{\Omega}_w \equiv \frac{eB_w}{mg\,c^2 k_w} \quad , \quad \overline{\Omega}_\circ \equiv \frac{eB_\circ}{mg\,c^2 k_w} \qquad (۲-۲۰)$$

که $\overline{\Omega}_\circ$ و $\overline{\Omega}_w$ فرکانسهای بهنجار شده سیکلوترونی میدان محوری ومیدان ویگلر هستند.

۲-۲ محاسبه خود- میدانها

یک باریکه‌الکترون به عنوان مجموعه‌ای از بارها می‌تواند میدان الکتریکی ایجاد نماید و حرکت این باریکه از میان لیزر الکترون آزاد حتی درغیاب میدان ویگلر باعث ایجاد میدان مغناطیسی می‌شود. که

به آن خود- میدان مغناطیسی گویند. وجود میدان مغناطیسی ویگلر و ایجاد سرعتهای عرضی برای الکترونها خود میدان جدیدی در فضای باریکه ایجاد می‌نماید.

۲-۲-۱ خود- میدان الکتریکی

چگالی باریکه الکترونی در لیزرالکترون آزاد به صورت زیر در نظر میگیریم.[۵]

$$n_b(r)=\begin{cases} n_b & r\le R_b \\ o & r>R_b \end{cases} \qquad (۲۱-۲)$$

که دارای تقارن سمتی در سرعت وچگالی بوده و n_b چگالی الکترنها است. خود- میدان الکتریکی ناشی از این باریکه با استفاده از از معادله پواسون محاسبه می‌شود.

$$\nabla^2 f=-4pr \qquad (۲۲-۲)$$

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) \qquad (۲۳-۲)$$

بنابراین:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r E_{sr})=-4p\, en_b(r) \qquad (۲۴-۲)$$

این میدان با انتگرال‌گیری برای ناحیه $r\le R_b$ به صورت زیر بدست آورده می‌شود.

$$\mathbf{E}_s=-2p\, en_b r\,\hat{\mathbf{e}}_r=-2p\, en_b(x\hat{\mathbf{e}}_x+y\hat{\mathbf{e}}_y) \qquad (۲۵-۲)$$

۲-۲-۲ خود- میدان مغناطیسی با فرض سرعت محوری

باریکه الکترونی در حال حرکت در درون لیزر الکترون آزاد را می‌توان به صورت جریانی در نظر گرفت. در این صورت از این جریان, میدان مغناطیسی حاصل خواهد شد.

برای محاسبه این میدان با استفاده از قانون آمپر بدست می‌آوریم.

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{4p}{c}\mathbf{J}=\frac{-4p}{c}en_b\mathbf{v} \qquad (۲۵-۲)$$

که در آن c سرعت نور، $\mathbf{J}$ چگالی جریان الکترون و $\mathbf{v}$ سرعت الکترون می‌باشد. از آنجا که حرکت الکترونها فقط در راستای محور z در نظرمیگیریم $(\mathbf{v}=v_z\mathbf{e}_z)$ معادله بالا چنین می‌شود.

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial q}B_z-\frac{\partial}{\partial z}r\,B_q)\hat{\mathbf{e}}_r-(\frac{\partial B_z}{\partial r}-\frac{\partial}{\partial Z}B_r)\hat{\mathbf{e}}_q+\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}rB_q-\frac{\partial}{\partial q}B_r)\hat{\mathbf{e}}_z \quad (۲۶-۲)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_q)=-4p\,en_b b_z \quad (۲۷-۲)$$

که در رابطه بالا از فرض تقارن سمتی چگالی باریکه استفاده شده است که در طول لیزر تغییر نمی‌کند با انتگرال‌گیری و در نظر گرفتن بی‌نهایت نشدن میدان در داخل باریکه بدست می‌آید.

$$\mathbf{B}_s=-2\pi en_b\beta_z r\,\hat{\mathbf{e}}_\theta=2\pi en_b\beta_z(y\hat{\mathbf{e}}_x-x\hat{\mathbf{e}}_y)\equiv\mathbf{B}_{\mathbf{s}\|} \quad (۲۸-۲)$$

معادله(۲-۲۸) خود- میدان مغناطیسی حاصل از گذر باریکه الکترون با فقط سرعت محوری است.

۲-۳ خود- میدان مغناطیسی با در نظر گرفتن سرعتهای عرضی

در حضور میدان مغناطیسی ویگلر الکترونهای عبوری از میان لیزر الکترون آزاد حرکت عرضی جدیدی می‌یابند که در ۲-۱-۲ محاسبه شد. حال این حرکت جدید جریان بار جدیدی را ایجاد می‌کند. که خود باعث ایجاد خود- میدان مغناطیسی جدیدی می‌گردد. برای محاسبه این خود- میدان مغناطیسی جدید می‌توان مجدداً از معادله آمپر استفاده نمود.

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{4p}{c}\mathbf{J}=-\frac{4p}{c}en_b\mathbf{v}=-4nen_b\boldsymbol{\beta} \quad (۲۹-۲)$$

با جایگذاری جوابهای بدست آمده برای سرعتهای عرضی (معادلات۲-۱۷تا۲-۱۹)در معادله فوق خواهیم داشت.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial q}B_z - \frac{\partial}{\partial z}B_q = -\frac{4p}{c}en_b v_r = -4pen_b b_\perp \cos(k_w z - q) \quad (۳۰-۲)$$

$$\frac{-\partial}{\partial r}B_z + \frac{\partial}{\partial z}B_r = \frac{-4p}{c}en_b v_q = -4p\, en_b b_\perp \sin(k_w z - q) \quad (۳۱-۲)$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}r B_q - \frac{\partial}{\partial q}B_r\right) = \frac{-4p}{c}en_b v_z = -4pen_b b_z \quad (۳۲-۲)$$

با فرض جوابهائی به صورت:[۱۱]

$$\mathbf{B}_r^s = B_r(r)\cos(k_w z - q) \quad (۳۳-۲)$$

$$\mathbf{B}_q^s = B_q(r)\sin(k_w z - q) + \overline{B}_q(r) \quad (۳۴-۲)$$

$$\mathbf{B}_z^s = B_z(r)\sin(k_w z - q) \quad (۳۵-۲)$$

برای مؤلفه‌های r، q و z وجایگذاری در معادلات (۲-۳۰) تا (۲-۳۲) خواهیم داشت.

$$\frac{1}{r}(-B_z(r)\cos(k_w z - q)) - B_q(r)k_w\cos(k_w z - q) = -4pen_b b_\perp \cos(k_w z - q) \quad (۳۶-۲)$$

$$-B_r(r)k_w\sin(k_w z - q) - \frac{\partial B_z(r)}{\partial r}\sin(k_w z - q) = -4pen_b b_\perp \sin(k_w z - q) \quad (۳۷-۲)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}r B_q(r) + B_r(r)\right)\sin(k_w z - q) + \frac{\partial}{\partial r}r\overline{B}_q(r) = -4p\, en_b\, b_z r \quad (۳۸-۲)$$

وبدست می آید.

$$\frac{-1}{r}B_z(r) - B_q(r)k_w = -4p\, en_b b_\perp \quad (۳۹-۲)$$

$$\frac{-\partial}{\partial r}B_z(r) - B_r(r)k_w = -4p\, en_b b_\perp \quad (۴۰-۲)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}r B_q(r) + B_r(r)\right)\sin(k_w z - q) + \frac{\partial}{\partial r}r\overline{B}_q(r) = -4p\, en_b\, b_z r \quad (۴۱-۲)$$

از رابطه (۲-۴۱) معادلات زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{d}{dr}(rB_q(r)) = B_r(r) \quad (۴۲-۲)$$

$$\frac{d}{dr}r\overline{B}_q(r) = -4p\, en_b\, b_z r \quad (۴۳-۲)$$

از حل معادله (۲-۴۳) با دانستن بی‌نهایت نشدن میدان جواب زیر بدست می‌آید.

$$\overline{B_q}(r) = -2p\ en_b b_z r \qquad (۲-۴۴)$$

که با جواب (۲-۲۸) یکسان است.

برای محاسبه معادلات (۲-۳۹) الی (۲-۴۱) از رابطه $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ کمک می‌گیریم.با جایگذاری معادلات (۲-۳۳) الی (۲-۳۵)در رابطه $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ بدست آورده می‌شود.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r(r)) = \frac{1}{r}B_q(r) + k_w B_Z(r) = 0 \qquad (۲-۴۵)$$

با استفاده از معادلات (۲-۳۹) ، (۲-۴۲) و (۲-۴۵) خواهیم داشت.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{d}{dr}(rB_q(r))) = \frac{1}{r}B_q(r) + k_w(rB_q(r)k_w - 4p\ en_b b_\perp r) = 0$$

پس از ساده‌کردن معادله دیفرانسیل زیر برای $B_q(r)$ حاصل می‌شود.

$$\frac{d^2}{dr^2}B_q(r) + \frac{3}{r}\frac{dB_q(r)}{dr} - B_q K_w{}^2 = -4p\ enk_w b_\perp \qquad (۲-۴۶)$$

در ساده ترین حالت فرض میشود که وابستگی به r در معادله بالاوجود نداشته باشد با این فرض بدست می‌آید.

$$B_q(r) = \frac{4p\ en_b b_\perp}{k_w} \qquad (۲-۴۷)$$

با استفاده از معادلات (۲-۴۰) و (۲-۴۱) نیز خواهیم داشت.

$$B_r(r) = B_q(r)$$

$$B_Z(r) = 0$$

بنابراین خود- میدان مغناطیسی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_{s\|} + \mathbf{B}_{sw} \qquad (۲-۴۸)$$

که خود- میدان ناشی از جریان محوری (معادله (۲-۴۳)) و خود- میدان حاصل از ویگلر می‌باشد که در آن: