وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

ابرکارایی در تحلیل پوششی داده‌های تصادفی

استاد راهنما

دکتر جعفر پورمحمود

استاد مشاور

دکتر علیرضا غفاری

پژوهشگر

زهرا اشرافی

شهریور ۱۳۹۱

تبریز - ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

خدایا...

دستم را به ناپیدایی تو گشوده ام، چنان که در ذکری عالم گیر به سمت تو آمده اند!

آن قدر بزرگی، که هستی و همه ی اسبابش ملک کوچکی از املاک توست.

خدایا!

نمی دانم که کلمه را چگونه تقدیمت دارم، حال آن که کلمه آفریده توست، و چه موهبتی که تو نیز با کلمه با من سخن گفته ای...

بر انگشتانم که نگاه پر عطوفت خود را معطوف می داری توان نوشتن در آن ها جاری می شود!

خدایا!

اگر بخواهیم که مطلوب دیگران باشیم، تو اسبابش را به ما داده ای و ما را به سرعت به هدفمان می رسانی، اما افسوس که این دلخوشی نه لذت بخش است و نه پایدار!

اما اگر بخواهیم مطلوب تو باشیم، سخت است و به دیده ای دست نیافتنی، اما آهسته آهسته شیرین است و پایدار...

خدایا!

مرا مطلوب خود گردان و از روی رحمت و فضل و بخشش ات با من مدارا کن!

خدایا!

در آستانه نیاز و فقر کامل خود به سویت رو کرده ام و می دانم که تو بی منتهای بی نیازی!

خدایا!

از نداشته هایم آن چه را که می دانم و نمی دانم و تو خوب به همه ی آن ها واقفی، نصیبم فرما...

به امید رحمتت...

سپاس‌گزاری...

سپاس خدایی را که اولین معلم است.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌شائبه استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر جعفر پورمحمود، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر علیرضا غفاری که زحمت مشاوره این رساله را تقبل فرمودند کمال امتنان را دارم.

و تشکر می‌کنم از استاد محترم جناب اقای دکتر جواد مهری که زحمت داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفته‌اند.

کمال تشکر را دارم از همسرم که همیشه قوت قلبم بوده و هست.

تشکر می‌کنم از پدر و مادر مهربانم و خواهران و برادران عزیزم به پاس عاطفه‌ی سرشارشان که همیشه بهترین پشتیبان من بودند.

زهرا اشرافی

تیرماه ۱۳۹۱

فهرست مطالب

چکیده

در این مطالعه مدل تنش‌زدایی ورودی و یک مدل رتبه‌بندی در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه می‌شوند. مدل‌های موجود در تحلیل پوششی داده‌ها مانند مدل BCC تغییراتی را که در ترکیب ورودی‌ها منجر می‌شوند غالبا مبتنی بر کاهش ورودی‌ها می‌باشد. این امر به دلیل کاهش یا حذف ورودی‌های کاهش یافته ظاهرا یک توجیه معقول از نظر اقتصادی است. اما در برخی موارد کاهش ورودی همچون نیروی کار، همان گونه که در کشور جین اتفاق افتاد، ممکن است به تنش‌های اجتماعی منجر شود. بنابراین مدل تنش‌زدایی ورودی به گونه‌ای ارائه می‌شود که انعطاف بیشتری در تغییر ترکیب ورودی مورد استفاده داشته بعلاوه بهترین خروجی را به دست بدهد. در این روش کمترین تغییرات در جهت افزایش ورودی‌ها و بیشترین تغییرات در جهت کاهش ورودی‌ها به دلیل هزینه‌های ورودی نیز انجام می‌شود. در دهه گذشته رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری در تحلیل پوششی داده‌ها مورد توجه بسیاری از محققین این رشته قرار گرفته است و روش‌های متنوعی با عنوان ابرکارایی جهت رتبه‌بندی واحدهای کارا ارائه گردید. مدل‌های ارائه شده جالب و در عین حال دارای مشکلات عدم پایداری و نشدنی بودن هستند. بنابراین یک مدل ابرکارایی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری کارا ارائه می‌شود که قادر است برخی معایب قبلی را مرتفع سازد. اما از آنجاییکه در عالم واقعیت داده‌ها نه به صورت قطعی بلکه به صورت تصادفی می‌باشند، پایان بخش این مطالعه به بیان حالت احتمالی مدل تنش‌زدایی ورودی اختصاص داده شده‌است .

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها،مدل تنش‌زدایی ورودی، ابرکارایی، مدل BCC، مدل خروجی محور.

پیشگفتار

علم DEA روشی برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیری یکسان است. DEA اولین بار توسط کوپر و همکارانش مطرح شد. اولین مدل در DEA مدل CCR است. سپس بنکر و همکارانش برای رفع بعضی نواقص مطرح در CCR مدل BCC را مطرح کردند. مدل BCC برخلاف مدل CCR که دارای بازده به مقیاس ثابت است دارای بازده به مقیاس متغیر است. خاصیت بازده به مقیاس متغیر منجر به تاثیر حجم تولید بر کارایی دارد. در مدل BCC تغییراتی را که برای ورودی‌ها پیشنهاد می‌کند در جهت کاهش آنها می‌باشد. به وضوح این کار به دلیل کاهش هزینه‌های ناشی از ورودی‌ها می‌باشد. در حالیکه کوپر با بررسی صنعت نساجی چین نشان داد که با بدست آوردن ترکیبی مناسب از ورودی‌ها می توان خروجی بهتری به دست آورد. این نتایج پایه‌ای برای برای مدل تنش‌زدایی ورودی است که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفته است.

یکی از معایب روش DEA این است که برای واحدهای کارا هیچ رتبه بندی را نمی‌تواند ارائه کند. این در حالی است که بسیاری از تصمیم گیرندگان به رتبه بندی کاملی در میان واحدها علاقه‌مندند. به همین دلیل روشهای رتبه‌بندی متفاوت و در عین حال جالب توسط محققین ارائه شده است. در حالت کلی این مدل‌ها را می‌توان در شش کلاس دسته بندی کرد. یکی از مدل‌های جالب و متداول مدلی است که توسط اندرسون و پیترسون ارائه شده است. این مدل که به مدل AP مشهور شده است، برای رتبه بندی واحد کارا آن واحد را از مجموعه تولید حذف می‌کند و مدل DEA را دوباره برای واحدهای باقی‌مانده به کار می‌گیرد. مدل AP دارای مشکلاتی از قبیل نشدنی بودن و ناپایداری می‌باشد.

مدل‌های موجود در DEA ابتدا برای داده‌های قطعی بیان شده‌اند، این در حالی است که در عالم واقع بیشتر داده‌ها به صورت احتمالی می‌باشد. در پایان هر بخش حالت احتمالی مدل ارائه شده است.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در سالهای اخیر در اغلب کشورهای جهان برای ارزیابی عملکرد نهادها و دیگر فعالیت‌های رایج در زمینه‌های مختلف، کاربردهای متفاوتی از DEA دیده شده است. علت مقبولیت گسترده‌تر روش DEA نسبت به سایر روش‌ها، امکان بررسی روابط پیچیده و اغلب نامعلوم بین چندین ورودی و چندین خروجی معمولا اندازه ناپذیر است که در این فعالیت‌ها وجود دارد. فعالیت‌هایی نظیر تعمیر و نگهداری در پایگاه‌های هواپیمایی آمریکا مستقر در نواحی جغرافیایی متفاوت، یا نیروهای پلیس در انگلستان و ولز، همچنین عملکرد شعب بانک‌ها در قبرس و کانادا و کارایی دانشگاه‌ها در آموزش و پرورش در آمریکا،انگلستان و فرانسه، مثال‌هایی از این نوع هستند. این نوع کاربردها به ارزیابی عملکردهای شهرها، مناطق و کشورها با انواع مختلف ورودی از قبیل هزینه‌های اجتماعی، شبکه‌های ایمنی و انواع خروجی از قبیل ابعاد مختلف کیفیت زندگی نیز قابل گسترش هستند.

DEA ، همچنین امکان نگرش جدید به فعالیت‌هایی را هم که قبلا به روش‌های دیگر ارزیابی شده‌اند فراهم کرده است. برای مثال امکان محک زنی با استفاده از DEA به شناسایی منابع ناکارایی در شرکت‌های خیلی سودآور، شرکت‌هایی که به خاطر نگرش سودآوری به عنوان محک شناخته می‌شوند، منجر شده است. مطالعه کارایی سازمان‌هایی با شکل حقوقی متفاوت، همانند

شرکت‌های سهامی بیمه در مقابل تعاونی به کمک DEA نشان داده شده است که مطالعات قبلی قادر به ارزیابی توان بالقوه تفاوت‌های شکلی آنها نبودند. همچنین استفاده از DEA لزوم بازنگری مطالعات کارایی قبلی را که پیش و پس از ادغام فعالیت‌ها انجام گرفته و در بانک‌ها به اجرا گذاشته شده، نشان می‌دهد. همچنین این استفاده از برنامه‌ریزی به اصول جدیدی در استنتاج از داده‌های تجربی منجر می‌شود که راهنمای مستقیم ما برای محاسبه بهترین برآورد برای هر فعالیت مشاهده شده در مجموعه فعالیت‌هاست. این شیوه مغایر با روش معمول میانگین‌گیری از مشاهداتی است که مشخصه روش‌های آماری و حسابداری است. اولین بار تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) در سال ۱۹۷۸ زمانی که رودز [۱] در رابطه با کارایی مدارس آمریکا مطالعه می‌کرد، معرفی شد. در سال ۱۹۷۹ رودز نتیجه مطالعات خود را با همکاری کوپر [۲] و چارنز [۳] انتشار داد و بدین ترتیب یکی از پایه‌ای‌ترین مدل‌های DEA ، مدل CCR [۴] شکل گرفت. آنها تحلیل فارل [۵] را که در سال ۱۹۷۵ برای حالت چند ورودی و تک خروجی مطرح شده بود به حالت چند ورودی و چند خروجی تعمیم دادند. پس از آن بنکر و همکارانش [۴] در سال ۱۹۸۴ مدل BCC را ارائه کردند. عوامل ورودی و خروجی مفاهیمی هستند که نقش کلیدی در علم DEA دارند. ورودی عاملی است که با افزایش آن، با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی کاهش یافته و با کاهش آن، با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی افزایش می‌یابد و خروجی عاملی است که با افزایش آن، با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی افزایش یافته و با کاهش آن، با حفظ تمام عوامل دیگر، کارایی کاهش می‌یابد. واحد تصمیم‌گیری (DMU) واحدی است که با مصرف بردار ورودی $X = (x_۱, x_۲, \dots, x_m)$ بردار خروجی $Y = (y_۱, y_۲, \dots, y_s)$ را تولید می‌کند. مدل‌های موجود DEA را می‌توان به چند دسته تقسیم کرد که از جمله آنها می‌توان مدل‌های خروجی محور و ورودی محور را نامبرد. در مدل‌های خروجی محور، هدف معرفی کردن واحدی است که با

[۱] Rhodes

[۲] Cooper

[۳] Charnes

[۴] CCR(Charnes, Cooper, Rhodes)

[۵] Farell

مصرف همان مقدار ورودی بیشترین مقدار خروجی ممکن را تولید کند و در مدل‌های ورودی محور، هدف معرفی کردن واحدی است که همان مقدار خروجی را با حداقل ورودی ممکن تولید کند.
DEA که روشی مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی است، برای محاسبه کارایی نسبی DMUهایی که وظایف یکسانی را انجام می‌دهند، به کار می‌رود، مانند سنجش و مقایسه نسبی واحدهای سازمانی نظیر ادارات دولتی یک وزارت‌خانه، مدارس، بیمارستانها، فروشگاههای زنجیره‌ای، شعب بانکها و موارد مشابهی که در آنها واحدهای تصمیم‌گیری همگنی وجود دارند. عبارت نسبی به این دلیل است که کارایی حاصل نتیجه مقایسه واحدها با همدیگر است. لذا کارایی بدست آمده نسبی است نه مطلق.

تعریف ۱.۱.۱. تعریف کارایی تکنیکی: DMU_o کاراست اگر و تنها اگر امکان بهبود تعدادی از خروجی‌ها یا ورودی‌ها بدون بدترشدن سایر ورودی‌ها یا خروجی‌ها نباشد.

هنگام ارزیابی نسبی یا مقایسه‌ای DMU ها نخستین مساله روش‌شناسی که باید مورد توجه قرار گیرد بازده به مقیاس است. اگر بازده به مقیاس ثابت باشد، یعنی با افزایش یک واحد ورودی، افزایش یک واحد خروجی را به همراه دارد. در این حالت کارایی با تغییر حجم تولید تغییر نمی‌کند. از طرف دیگر اگر یک DMU دارای بازده به مقیاس متغیر باشد بر امکان تاثیر حجم تولید بر کارایی دلالت می‌کند و می‌توان نتیجه گرفت که برخی ناکارایی‌های موجود، ناشی از بهینه نبودن حجم تولید است.
از جمله مفاهیم مشترک بین DEA و اقتصاد مفهوم تراکم است. یکی از انواع ناکارایی‌های موجود در DEA ناکارایی تراکم است. اما ترکم چه زمانی رخ می‌دهد؟
تراکم در ورودی زمانی رخ می‌دهد که افزایش در یکی یا بیشتر از ورودی‌ها منجر به کاهش در یکی یا بیشتر خروجی‌ها شود. یا بر عکس کاهش در ورودی‌ها باعث افزایش خروجی‌ها شود. در واقع اگر بخواهیم به زبان ساده بیان کنیم، در تعریف ورودی بیان شد که عاملی است که با افزایش آن کارایی افزایش می‌یابد، اما این افزایش ورودی تا حد خاصی می‌تواند صورت گیرد و افزایش بیشتر منجر به تجمع ی تراکم در ورودی شده که در نهایت باعث کاهش کارایی می‌شود. مثلا اگر تعداد

کارگران یک معدن را به عنوان ورودی در نظر بگیریم افزایش تعداد کارگران تا تعداد مشخصی باعث سرعت در کار و افزایش کارایی می‌شود اما افزایش بیشتر تعداد کارگران به وضوح به دلیل افزایش تعداد برخوردها در کارگاه، کارایی کاهش می‌یابد.

۲.۱ مدل CCR

DEA با کار چارنز و همکارانش در سال ۱۹۷۸ برای محاسبه کارایی نسبی واحدهایی با چندین ورودی و چندین خروجی آغاز شد. محققین این علم، کارایی واحد تحت ارزیابی را به صورت نسبت مجموع موزون خروجی‌ها را بر مجموع موزون ورودی‌ها تعریف کردند. آنها شکل کسری مدل CCR را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی کسری معرفی کردند. مدل CCR خروجی محور برای ارزیابی DMU_o به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \\ \text{S.t} \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leqslant 1 \quad j = 1 \dots n \\ & \frac{u_r}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \geqslant \epsilon \quad r = 1 \dots s \\ & \frac{v_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \geqslant \epsilon \quad i = 1 \dots m \end{aligned} \tag{1.1}$$

ϵ عنصر بینهایت کوچک مثبت ناارشمیدسی است که تضمین می‌کند که تمام متغیرهای u_r و v_i اکیدا مثبت هستند. با استفاده از تبدیلات چارنز

$\mu_r = tu_r \qquad r = 1 \dots s$

$\nu_i = tv_i \qquad i = 1 \dots m$

$$t = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}$$

می‌توان مدل (۱.۱) را به صورت مدل زیر تبدیل کرد که به فرم مضربی CCR معروف است.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro} & \\ \text{S.t} \quad & -\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \leqslant 0 & j = 1 \ldots n \\ & \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} = 1 & \\ & \nu_i \geqslant \epsilon & i = 1 \ldots m \\ & \mu_r \geqslant \epsilon & r = 1 \ldots s \end{aligned} \tag{2.1}$$

هرگاه جواب بهینه مدل را با $*$ روی آن نشان دهیم آنگاه شرط کارایی DMU_o با استفاده از مدل (۲.۱) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_r^* y_{ro} = 1$$

دوگان مدل (۲.۱) که فرم پوششی مدل CCR نامیده می‌شود و نسبت به فرم مضربی آن کاربرد بیشتری دارد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta_o + \epsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) & \\ \text{S.t} \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} & i = 1 \ldots m \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \theta_o y_{ro} & r = 1 \ldots s \\ & \lambda_j, s_r^+, s_i^- \geqslant 0 & \forall i, j, r \end{aligned} \tag{3.1}$$

شرط کارایی با توجه به مدل (۳.۱) به صورت زیر است:

۱) $\theta^* = 1$

۲) مقدار تمام متغیرهای کمکی در تمام جواب‌های بهین دگرین صفر باشد.

برای حل مدل CCR که شامل ϵ است، دو روش وجود دارد. روش اول که روش حل دو مرحله‌ای نامیده می‌شود. در مرحله اول ابتدا مدل CCR برای بدست آوردن $\theta_o^* = \max\theta_o$ بدون در نظر گرفتن

متغیرهای کمکی حل می‌شود. در مرحله دوم با جایگذاری مقدار θ_o^* به جای θ_o مدل CCR دوباره برای بدست آوردن مقدار $\max \quad \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+$ حل می‌شود. در استفاده از این روش نیازی به تخصیص مقدار مشخصی به ϵ نیست.

در روش دوم که روش حل مستقیم است یا مقدار مشخصی به ϵ اختصاص داده می‌شود یا اینکه یک بازه اطمینان برای آن در نظر گرفته می‌شود. در روش حل مستقیم برای سادگی ابتدا مقداری به ϵ اختصاص داده می‌شود و سپس مدل حل می‌شود. اما این روش ممکن است به نتایج نادرستی منجر شود. برای توضیحات بیشتر می‌توانید به [۲، ۱۴] مراجعه نمایید.

۳.۱ مدل BCC

مدل BCC در سال ۱۹۸۴ توسط بنکر، چارنز و کوپر [۴] ارائه شد. مرز کارایی مدل BCC پوسته محدب DMUهای موجود است و به صورت قطعه به قطعه خطی و مقعر است. خاصیت مقعر بودن مرز کارایی منجر به خاصیت بازده به مقیاس متغیر مدل BCC می‌شود. مجموعه امکان مدل BCC مجموعه‌ای محدب است که بنکر و همکارانش شرط تحدب را روی قیود مدل CCR اعمال کردند و مدل BCC را به صورت زیر ارائه کردند.

$$
\begin{array}{lll}
\max & \phi_o + \varepsilon(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+) & \\
\text{s.t} & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io} & i = 1 \dots m \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi_o y_{ro} & r = 1 \dots s \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 & \\
& \lambda_j, s_i^-, s_r^+ & \forall i, j, r
\end{array}
\tag{۴.۱}
$$

که این مدل، به مدل BCC خروجی محور مشهور است.

۴.۱ تعاریف احتمالی

قبل از اینکه مدل‌ها معرفی شوند لازم است بعضی مفاهیم و تعاریف احتمالی ارائه گردد. اولین مفهومی که در ارتباط با احتمال با آن برخورد می‌شود متغیر تصادفی است. هر آزمایشی که نتیجه آن به شانس بستگی داشته باشد آزمایش تصادفی نامیده می‌شود. هر نتیجه ممکنی از آزمایش تصادفی که نتوان آن را به عناصر اساسی‌تر تجزیه کرد یک پیشامد اولیه نامیده می‌شود. جمع تمام پیشامدهای اولیه آزمایش تصادفی معرف فضای نمونه S است. به عنوان مثال پرتاب دو تاس یک آزمایش تصادفی با پیشامدهای اولیه زیر است:

{ عدد ظاهر شده روی تاس اول i و عدد ظاهر شده روی تاس دوم j }

. در اغلب موارد ما بیشتر از آنکه به خود پیشامدها علاقه‌مند باشیم، به رفتار احتمالی متغیرهایی که معمولا مقادیر عددی به خود می‌گیرند علاقه‌مند می‌شویم که با پیشامدها متناظر هستند. فرض کنید هر پیشامد اولیه S را به یک عدد حقیقی X نسبت دهیم. لازم نیست این تناظر یک به یک باشد، یعنی چندین پیشامد اولیه می‌توانند به یک مقدار X نسبت داده شوند. این نوع نسبت دادن پیشامدهای اولیه به اعداد حقیقی متغیر تصادفی نامیده می‌شود در واقع متغیر تصادفی X یک تابع حقیقی مقدار است که روی عناصر S تعریف می‌شود. مثلا فرض کنید متغیر تصادفی X معرف مجموع نقاط ظاهر شده در پرتاب دو تاس باشد، X می‌تواند مقادیر $۲, ۳, \ldots, ۱۲$ را به خود بگیرد که این اعداد مجموع اعداد ظاهر شده رود هر یک از تاس‌ها در هر یک از پیشامدها هستند.

متغیر تصادفی را می‌توان به دو دسته متغیر تصادفی پیوسته و متغیر تصادفی گسسته دسته‌بندی کرد. در این پایان‌نامه فقط حالت پیوسته به کار گرفته شده است. بنابراین از بیان حالت گسسته خودداری می‌شود.

در تعریف احتمال در حالت پیوسته، برای هر متغیر تصادفی، وجود تابعی را که تابع چگالی احتمال نامیده می‌شود مفروض می‌گردد، به قسمی که مساحت‌های زیر منحنی این تابع، احتمال‌های مربوط به بازه‌های متناظر در طول محور افقی را مشخص می‌کند. به بیان دیگر، انتگرال یک تابع چگالی از

a تا b $(a \le b)$ احتمال این را که متغیر تصادفی متناظر، مقداری را در بازه a تا b اختیار کند به دست می‌دهد. تابعی با مقدار $f(x)$ ، که روی مجموعه تمام اعداد حقیقی تعریف شده‌است تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته X خوانده می‌شود اگر وتنها اگر، به ازای هر دو مقدار حقیقی ثابت a تا b $(a \le b)$

$$P(a < \ X < \ b) = \int_a^b f(x)dx$$

اگر X ، متغیر تصادفی پیوسته‌ای باشد، که مقدار چگالی احتمال آن به ازای t برابر با $f(t)$ است، آنگاه تابعی که به صورت

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad -\infty < \ x < \ \infty$$

داده می‌شود، تابع توزیع یا توزیع تجمعی X نامیده می‌شود.

از طرف دیگر در بین توابع توزیع، توزیع نرمال مهمترین توزیع احتمال است. برای اکثر پدیده‌های تصادفی، مقدار متغیر تصادفی، نتیجه انباشته شدن بسیاری از اثرهای تصادفی کوچک و مجزا از هم است. چنین پدیده‌هایی دارای توزیع نرمال هستند. توزیع نرمال کاملا با دو پارامتر امید ریاضی یا میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ مشخص می‌شود. تابع چگالی آن بدین صورت است:

$$f(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} \exp^{-\frac{۱}{۲}(\frac{x-\mu}{\sigma})^۲} \qquad -\infty < \ x < \ \infty$$

از آنجاییکه از این عبارت نمی‌توان به صورت تحلیلی انتگرال گرفت، هر متغیر تصادفی نرمال X با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ را می‌توان بر حسب متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z با میانگین ۰ و واریانس ۱ بیان کرد که جدول آن موجود است. برای این کار از تبدیل $x = \mu + z\sigma$ استفاده می‌شود، پس $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. بنابراین

$$P(X \leqslant a) = P(Z \leqslant \frac{a-\mu}{\sigma})$$

در اکثر موارد، تلخیص اطلاعات در یک توزیع احتمال توسط چندین معیار، کار مشکلی نیست. دو تا از مهمترین معیارها امید ریاضی و واریانس است. امید ریاضی که با $E(X) = \mu$ نشان داده

می‌شود، شاخصی است که مرکز ثقل متغیر تصادفی را نشان می‌دهد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)$$

واریانس که به صورت $VAR(X) = \sigma^{۲}$ نشان داده می‌شود، شاخص میزان پراکندگی متغیر تصادفی پیرامون میانگین است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$VAR(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^{۲} f(x)$$

ریشه دوم واریانس، انحراف معیار نامیده می‌شود و با σ نشان داده می‌شود.

خواص امید ریاضی:

۱) فرض کنید $Y = cX$ و c مقدار ثابتی باشد، آنگاه

$E(Y) = E(cX) = cE(X)$

۲) فرض کنید $Y = X + c$ و c مقدار ثابتی باشد، آنگاه

$E(Y) = E(X + c) = E(X) + c$

۳) فرض کنید $Y = \sum_{i=۱}^{k} X_i$ که هر X_i یک متغیر تصادفی است. آنگاه

$E(Y) = E(X_{۱} + X_{۲} + \ldots + X_k) = \sum_{i=۱}^{k} E(X_i)$

خواص واریانس:

۱). فرض کنید $Y = cX$ و c مقدار ثابتی باشد، آنگاه

$VAR(Y) = VAR(cX) = c^{۲} VAR(X)$

۲) فرض کنید $Y = X + c$ و c مقدار ثابتی باشد، آنگاه

$VAR(Y) = VAR(X + c) = VAR(X).$

خواص انحراف معیار

اگر فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی باشند که $E(X) = \mu$ و $E(Y) = \nu$، آنگاه داریم:

$$COV(X,Y) = E(X)E(Y)$$

فصل ۲

مدل تنش‌زدایی ورودی

۱.۲ مقدمه

دربرخی از مدل‌های موجود در DEA مانند مدل BCC تغییراتی که برای مقادیر ورودی‌ها پیشنهاد می‌شود در جهت کاهش ورودی‌ها است. به وضوح این کار به دلیل حذف یا کاهش هزینه‌های ناشی از ورودی‌ها صورت می‌گیرد. اما در بعضی موارد مثلا زمانی که یکی از ورودی‌ها دستمزد کارگران باشد، کاهش ورودی‌ها باعث تنش‌های اجتماعی می‌شود، همان طور که در صنعت نساجی چین، چنین اتفاقی رخ داد. کوپر و همکارانش [۹] برای بهبود این وضعیت، ورودی دستمزی را افزایش و ورودی سرمایه را کاهش داد که این کار نتایج مثبتی در برداشت. نتایج بررسی نشان داد که بدست آوردن بهترین ترکیب ورودی، امری کاملا ضروری است. در حالت کلی نباید فراموش کرد که این تغییرات در جهت افزایش خروجی‌ها، نیز می‌باشد. در این فصل مدلی معرفی می‌شود که ترکیب مناسبی را برای ورودی‌ها جهت افزایش خروجی‌ها فراهم نماید.

۲.۲ مدل تنش‌زدایی ورودی

تعریف ۱.۲.۲. تعریف مدل تنش‌زدایی ورودی: مدلی که برای بهبود خروجی به کارگرفته شود.

در تمام این بررسی فرض می‌شود که n تا واحد تصمیم‌گیری همسان وجود دارد که