بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين إياك نعبد وإياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين أنعمت عليهم غير المغضوب عليهم ولا الضالين

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز

مرکز توپولوژیکی جبرهای مون

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

پژوهشگر:

وحید اسکندری

شهریور ماه ۱۳۸۸

کلیه حقوق مادی مرتبط بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز آقای وحید اسکندری

تحت عنوان:

مرکز توپولوژیکی جبرهای مون

در تاریخ ... ۸۸/۶/۱۷..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...بسیار خوب... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی رجالی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر محمود لشکری زاده	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر رسول نصر اصفهانی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

دانشگاه اصفهان

تشکر و قدردانی

حال که به یاری پروردگار موفق به طی دوره کارشناسی ارشد شدم، بجاست از افرادی که در این مقطع از وجودشان بهره جستم، یاد کنم. ابتدا از جناب آقای دکتر رجالی که با صبر و بردباری در این سالها بنده را از راهنمایی های خود بهره مند ساختند، صمیمانه تشکر می کنم و همین طور باید از اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه اصفهان و از داوران داخلی و خارجی خودم آقایان دکتر لشکری زاده و دکتر نصر اصفهانی سپاسگزاری کنم. از دوست دوره کارشناسی ارشدم آقای ساسان امیری که وجودشان همواره برای من موجب دلگرمی بوده است، ممنونم.

همچنین در پایان قدردانی ویژه ای از نفس بزرگوارم دارم که در تمام مراحل همگام و همراه من بوده و هست، دستان مهربانش را به گرمی می فشارم.

وحید اسکندری

شهریورماه ۱۳۸۸

تقدیم به پدر و مادرم

که هر چه دارم از آنهاست

چکیده

در این رساله،ابتدا به توصیف مرکز توپولوژی جبرهای مون می پردازیم و سپس جبرهای مرکزساز دوگانه از جبرهای مون را روی جبرهای باناخ غیر یکدار مطالعه می کنیم. ما نشان می دهیم که اگر یک جبر مون دارای تقریب همانی کراندار باشد آنگاه مجموعه های J , I متناهی هستند و جبرمون یک تقریب همانی کراندار دارد و P منظم است. این نتیجه در توصیف جبرهای مرکز ساز دوگانه وضربگرهای جبرهای مون مورد استفاده قرار می گیرد.

واژه های کلیدی

جبر باناخ ، جبر مون ، مرکز توپولوژیکی ، جبر مرکز ساز دوگانه

فهرست مطالب

پیشگفتار

هدف اصلی این پایان نامه بررسی خواص جبرهای ℓ_1—مون می‌باشد.

این پایان نامه شامل چهار فصل می باشد. در فصل اول ابتدا قضایایی از توپولوژی و آنالیز تابعی را بیان کرده و در ادامه مفاهیم جبرهای باناخ و ضرب های آرنز وهمانی تقریب را مطرح و چند قضیه مقدماتی در این رابطه را بیان می‌کنیم .

در فصل دوم، ابتدا جبرهای ℓ_1—مون را تعریف می‌کنیم و سپس اولین و دومین دوگان وهمچنین مرکز توپولوژی دوگان دوم از جبرهای ℓ_1—مون را مورد بررسی قرار می‌دهیم .

در فصل سوم، ابتدا جبر مرکزساز دوگانه لز جبرهای ℓ_1—مون را تعریف می کنیم و سپس کاربرد در جبرهای نیم گروهی و نشاندن جبرهای مرکزساز دوگانه از جبرهای ℓ_1—مون را مورد بررسی قرار می دهیم .

در فصل چهارم و پایانی این پایان نامه، ابتدا ایده الها و نمایشی از جبرهای ℓ_1—مون را مطرح می کنیم و سپس ساختار ایده الی جبرهای ℓ_1—مون را مورد بررسی قرار می دهیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

دراین فصل تعاریف اولیه، قضایا، لم‌ها و گزاره‌هایی را که در فصل‌های آینده استفاده خواهند شد بیان شده‌اند. از آوردن اثبات بعضی از قضایا خودداری می‌کنیم.

۱—۱ مفاهیم اولیه‌ی توپولوژی

تعریف ۱.۱ فرض کنیم A یک مجموعه‌ی غیر تهی باشد. هر زیرمجموعه از $A \times A$ را یک رابطه روی A نامیم و با $\leq$ نشان می‌دهیم و به‌علاوه به‌جای $(\alpha, \beta) \in \leq$ می‌نویسیم $\alpha \leq \beta$.

رابطه‌ی $\leq$ روی A را یک رابطه ترتیبی جزیی نامیم هرگاه

(۱) برای $\alpha \in A$، $\alpha \leq \alpha$؛

(۲) برای $\alpha, \beta \in A$ اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ آن‌گاه $\alpha = \beta$؛

(۳) برای $\gamma \in A$ و α, β، اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$، آن‌گاه $\alpha \leq \gamma$.

مجموعه‌ی غیرتهی A را یک مجموعه‌ی جهت‌دار گوییم هرگاه یک رابطه‌ی ترتیبی جزیی $\leq$ روی A موجود باشد به طوری که برای هر زوج β, α از A، عنصر $\gamma \in A$ موجود باشد به طوری که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. منظور از یک تور در X یک نگاشت چون $f : A \longrightarrow X$ از مجموعه‌ی جهت دار A به X می‌باشد که $\alpha \in A \longrightarrow f(\alpha)$. معمولاً $f(\alpha)$ را با x_α نشان می‌دهیم. لذا تور f را با $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ یا $(x_\alpha)_\alpha$ نشان می‌دهیم. تور $(y_\beta)_{\beta \in B}$ را یک زیرتور از تور $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ گوئیم هرگاه نگاشت $f : B \longrightarrow A$ موجود باشد که

(۱) $y_\beta = x_{f(\beta)}$؛

(۲) برای $\alpha \in A$، یک $\beta \in B$ موجود باشد به طوری که اگر $\gamma \geq \beta$ آن‌گاه $f(\gamma) \geq \alpha$.

هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، تور $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ را همگرا به $x \in X$ گوئیم هرگاه برای هر همسایگی U حول x، یک $\alpha \in A$ موجود باشد به طوری که برای هر $\beta \in A$

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow x_\beta \in U.$$

در این صورت می‌نویسیم $x_\alpha \longrightarrow x$ یا $\lim_\alpha x_\alpha = x$.

قضیه ۲.۱ هرگاه تور $(x_\alpha)_\alpha$ در فضای توپولوژیک X همگرا به x باشد، آن‌گاه هر زیرتور از $(x_\alpha)_\alpha$ نیز همگرا به x است.

قضیه ۳.۱ هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، $x \in X$ یک نقطه‌ی انباشتگی تور $(x_\alpha)_\alpha$ در X است اگر و تنها اگر یک زیرتور همگرا به x داشته باشد.

تعریف ۴.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. نقطه‌ی $x \in X$ را یک نقطه‌ی انباشتگی برای $A \subseteq X$ گوئیم، هرگاه توری در $A - \{x\}$ وجود داشته باشد که همگرا به x است.

قضیه ۵.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset X$. دراین صورت $x \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر توری در A موجود باشد که همگرا به x باشد.

قضیه ۱.۶ فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و تنها اگر هرتور در X دارای یک زیرتور همگرا باشد.

اثبات . به [۱۶] صفحه‌ی ۱۳۶ مراجعه کنید.

۱—۲ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۷ فرض کنیم X یک فضای برداری خطی روی میدان اعداد مختلط باشد. منظور از نرم روی X یک نگاشت چون $||.|| : X \longrightarrow \mathbb{C}$ است که در خواص زیرصدق کند

(۱) به ازای هر $x \in X$ ، $||x|| \geq 0$؛

(۲) به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ ، $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$؛

(۳) به ازای هر $x, y \in X$ ، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

X را به همراه این نرم $||.||$ روی آن یک فضای نرم دار گوئیم. همچنین X با متر $d(x, y) = ||x - y||$ یک فضای متریک است و X با توپولوژی تولید شده توسط این متر که به آن توپولوژی نرم گوییم ، به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌شود.

فضای نرم دار X رافضای باناخ گوییم هرگاه متر تولید شده توسط نرم یعنی، $x, y \in X$ $d(x, y) = ||x - y||$، کامل باشد.

حال فرض کنیم X, Y دو فضای نرم دار روی میدان اعداد مختلط باشند آنگاه

(۱) نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ را یک عملگر خطی گوئیم هرگاه برای هر $x, y \in X$

$$\alpha \in \mathbb{C} : T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

(۲) عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار گوئیم هرگاه

$$\sup\{\tfrac{||T(x)||}{||x||} \; ; \circ \neq x \in X\} = \sup\{||T(x)|| : ||x|| \leq ۱\} < \infty.$$

(۳) مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی و کراندار از X به Y را با $B(X, Y)$ نشان می‌دهیم. $B(X, Y)$ با عمل جمع معمولی و ضرب اسکالر و نرم

$$||T|| = \sup\{\tfrac{||T(x)||}{||x||} \; ; \circ \neq x \in X\} = \sup\{||T(x)|| : ||x|| \leq ۱\}$$

یک فضای نرم دار می‌باشد.

$B(X, Y)$ با توپولوژی القایی از نرم $||T|| = \sup\{\tfrac{||T(x)||}{||x||} \; ; \circ \neq x \in X\}$ به یک فضای توپولوژیک تبدیل می‌شود که این توپولوژی روی $B(X, Y)$ را توپولوژی عملگر نرمی گوئیم. همچنین همگرایی در آن به این صورت می‌باشد که دنباله‌ی $\{T_n\}$ را همگرا به T گوییم هرگاه

$$||T_n - T||_{\circ p} \longrightarrow \circ.$$

یا

$$\sup\{||T_n(x) - T(x)|| : ||x|| \leq ۱\} \longrightarrow \circ.$$

(۴) $B(X, X)$ را با $B(X)$ نشان می‌دهیم که هر عضوش یک عملگر خطی و کراندار روی X است.

(۵) فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی کراندار روی X یعنی، $B(X,\mathbb{C})$، را با X^* نشان می‌دهیم و آن را دوگان X گوییم.

X^* با نرم $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq ۱\}$ یک فضای باناخ می‌باشد.

برای $f \in X^*$، مقدار f در $x \in X$ یعنی، $f(x)$، را با نماد $< f, x >$ نشان می‌دهیم و آن را دوگانگی بین X و X^* گوییم .

همچنین دوگان X^*، یعنی $(X^*)^*$ را با X^{**} نشان می‌دهیم. واضح است که X^{**} یک فضای باناخ است. نگاشت طبیعی از X به دوگان دوم X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{} : X \longrightarrow X^{**}$$
$$< \hat{x}, f > = < f, x > .$$

، برای $x \in X$ و $f \in X^*$.

فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار با دوگان X^* باشد. در این صورت توپولوژی تولید شده توسط X^* روی X، یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی روی X به طوری که نسبت به آن هر $f \in X^*$ پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X گوییم و آن را با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.

لذا طبق این تعریف، همگرایی ضعیف دنباله‌هادر این فضای توپولوژیک به صورت زیرخواهد بود:

دنباله $\{x_n\}_{n\geq ۱}$ در X راهمگرای ضعیف به $x \in X$ گوییم اگر و تنهااگر برای هر $f \in X^*$

داشته باشیم

$$\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle.$$

برای جزییات بیشتر به [۱۳] صفحه‌ی ۳۵ رجوع کنید.

قضیه ۸.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد و M یک زیرفضای برداری از X باشد، آن‌گاه M در توپولوژی ضعیف بسته است اگر و تنها اگر M در توپولوژی نرم بسته باشد.

اثبات . به [۲۵] صفحه‌ی ٦۵ رجوع کنید.

تعریف ۹.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار با دوگان X^* باشد. دراین صورت ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* را به طوری که برای هر $x \in X$، $\hat{x} \in X^{**}$ نسبت به این توپولوژی پیوسته باشد توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* گوییم و آن را با $\sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهیم.

لذا طبق این تعریف، همگرایی ضعیف ستاره دنباله‌هادر این فضای توپولوژیک به صورت زیرخواهد بود:

دنباله $\{f_n\}_{n \geq ۱}$ در X^* همگرای ضعیف ستاره به $f \in X^*$ است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$،

$$< \hat{x}, f_n >=< f_n, x > \longrightarrow < \hat{x}, f >=< f, x > .$$

توپولوژی ضعیف ستاره $\sigma(X^*, X)$ هاسدورف است. **اثبات** . به [۱۳] صفحه‌ی ۳۵ رجوع کنید.

قضیه ۱۰.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم دار روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ باشد.دراین صورت توپولوژی اولیه روی X یعنی توپولوژی نرم روی X قوی تر از توپولوژی ضعیف روی X است و همچنین توپولوژی ضعیف روی X^* قوی‌تر از توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* است.

اثبات . به [۴] صفحه‌ی ۴۲ رجوع کنید.

قضیه ۱۱.۱ (آلااقلو) فرض کنیم X یک فضای نرم دار باشد. دراین صورت گوی یکه‌ی بسته‌ی $S^* = \{f \in X^* : ||f|| \leq ۱\}$، فشرده ضعیف ستاره در X^* است.

اثبات . به [۲۵] صفحه‌ی ٦٦ رجوع کنید.

قضیه ۱۲.۱ فرض کنیم X یک فضای نرم دار و $(f_\alpha)_\alpha$ یک تور کراندار در X^* باشد.دراین صورت این تور دارای یک نقطه‌ی انباشتگی ضعیف ستاره در X^* است.

اثبات . از آنجایی که تور $(f_\alpha)_\alpha$ کراندار در X^* است، پس وجود دارد $k > ۰$ بطوری که ، برای هر α

$$||f_\alpha|| \leq k.$$

لذا تور $(f_\alpha)_\alpha$ درگوی بسته $B(\circ, k)$ در X^* می‌افتد و چون این گوی طبق قضیه آلاقلو ضعیف ستاره فشرده است، پس تور $(f_\alpha)_\alpha$ در یک مجموعه‌ی ضعیف ستاره فشرده قرار می گیرد. بنابراین دارای یک نقطه‌ی انباشتگی ضعیف ستاره می‌باشد.

قضیه ۱۳.۱ فرض کنیم X و Y دوفضای نرم دار باشند، آن‌گاه عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ کراندار است اگر و تنها اگر T پیوسته باشد.

تعریف ۱۴.۱ فرض کنیم X و Y دوفضای نرم دار باشند و $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$T^* : Y^* \longrightarrow X^*$$
$$< T^*f, x >=< f, Tx > (\text{ برای } f \in Y^*, x \in X).$$

T^* را الحاقی T گوییم.

قضیه ۱۵.۱ هرگاه $T \in B(X,Y)$، آن‌گاه $T^* \in B(Y^*, X^*)$ و $||T|| = ||T^*||$.

اثبات . به [۲۵] صفحه‌ی ۹۳ رجوع کنید.

قضیه ۱۶.۱ فرض کنیم X, Y دو فضای نرم دار باشند. هرگاه $T \in B(X,Y)$، آن‌گاه $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ ضعیف ستاره– ضعیف ستاره پیوسته است.

برعکس : هرگاه $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ ضعیف ستاره– ضعیف ستاره پیوسته باشد.در این صورت $T \in B(X,Y)$.

اثبات . به [۱۵] صفحات ۲۸۴ و ۲۸۵ رجوع کنید.

قضیه ۱۷.۱ فرض کنیم $T \in B(X)$ که X یک فضای باناخ باشد. در این صورت هر کدام از سه شرط زیر دو شرط دیگر را بدست می‌دهد.

(۱) $T(X)$ نرم بسته در X است.

(۲) $T^*(X^*)$ ضعیف ستاره بسته در X^* است.

(۳) $T^*(X^*)$ نرم بسته در X^* است.

اثبات . به [۲۵] صفحه‌ی ۹٦ رجوع کنید.

قضیه ۱۸.۱ (گلدشتاین) فرض کنیم $\hat{}: X \longrightarrow X^{**}$ نگاشت طبیعی باشد و B و B^{**} به ترتیب گوی‌های یکه بسته در X و X^{**} باشند. در این صورت تصویر B تحت این نگاشت در B^{**} ، ضعیف ستاره چگال است.

اثبات . به [۲٦] صفحه‌ی ۲۱۰، قضیه‌ی ۲ رجوع کنید.

نتیجه ۱۹.۱ هرفضای نرم دار X در X^{**}، ضعیف ستاره چگال است.

قضیه ۲۰.۱ فرض کنیم U و V گوی های یکه باز به ترتیب در فضاهای باناخ X و Y باشند و فرض کنیم $T \in B(X,Y)$ و $C_\lambda > 0$. دراین صورت اگر بستار $T(U)$ شامل