بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

رساله دکتری فیزیک گرایش نظری

مطالعه جبری سیستم های کوانتومی بس ذره ای حل پذیر دقیق و شبه دقیق جبر g_2

حمیده رحمتی

استاد راهنما:

دکتر حسین پناهی

زمستان ۱۳۹۲

تقدیم به:

تمامی کسانی که در جستجوی کشف زیبایی‌های طبیعت هستند؛

تقدیر و تشکر:

بر نویسنده، فرض است که از دلسوزی ها و رهنمودهای عالمانه استاد فرزانه خویش، جناب آقای دکتر پناهی به عنوان استاد راهنما که با عنایت بی دریغشان، پژوهشگر را وامدار لطف خویش نموده اند سپاسگزاری نماید.

همچنین از همراهی‌ها و دلنوازی‌های امید بخش مادر و همسر بزرگوار خود تشکّر نماید.

چکیده:

هامیلونی های شبه حل پذیر و چند جسمی عمر زیادی ندارند و تقریباً مربوط به ۲۵ سال پیش می شوند. در ابتدا این مدل ها تنها با ساده ترین جبر و در یک بعد نوشته می شدند. امّا در حال حاضر تقریباً بحث مربوط به این مدل ها درباره تمام جبرهای لی کلاسیک و در دو بعد تکمیل شده است و مساله ای که باقی مانده گسترش این مدل ها به جبرهای استثنایی و در ابعاد بیشتر از یک می باشد.

ساده ترین مورد از جبرهای لی استثنایی جبر g_2 است. این جبر ۱۴ بعدی قابل بازنویسی در دو بعد می باشد و به همین دلیل هامیلتونی های حاصل از این جبر در صفحه بیان می شوند. از سوی دیگر در این جبر دو دسته ریشه دو تایی و سه تایی وجود دارد که نشان دهنده بر همکنش دو تایی و سه تایی می باشد. همچنین این جبر در زمینه مسائل مطرح در دیگر شاخه های فیزیک مانند مکانیک آماری، نظریه میدان، رسانایی فلزات، ابر رساناها و .... کاربردهای گسترده ای دارد.

در این پایان نامه تلاش می شود درباره جبر g_2 و هامیلتونی های حل پذیر و شبه حل پذیر چند جسمی حاصل از آن اطّلاعاتی بدست آید و ثابت های حرکت این جبر نیز مشخّص شود. همچنین با نوشتن کلّی ترین هامیلتونی شبه حل پذیر این جبر، چند هامیلتونی حل پذیر بدست می آید که حل پذیری آن ها به دلیل وجود این ساختار جبری در آن ها می باشد.

کلید واژه: حل پذیری و شبه حل پذیری، مدل های چند جسمی، جبر لی، جبر استثنایی g_2 ، ثابت‌های حرکت.

فهرست مطالب

فصل اول: کلیات تحقیق و مفاهیم مقدماتی

فصل دوم: مروری بر چند روش مطالعه مسائل حل پذیر دقیق و شبه دقیق چند جسمی

فصل سوم: هامیلتونی های حاصل از جبر $g2$ و ثابت های حرکت این جبر

فصل چهارم: نتیجه گیری و چند پیشنهاد

فهرست جداول

فهرست شکل ها

فصل اول:

کلّیات تحقیق و مفاهیم مقدّماتی

۱-۱ مقدمه

مسائل طیفی مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی به دو دسته کلّی تقسیم می شوند. دسته اوّل مسائلی هستند که به طور دقیق[1] حل می شوند و با استفاده از روش های جبری در معادله شرودینگر آنها طیف کامل مساله تعیین می شود. ساده ترین مثال از این دسته نوسانگر هماهنگ ساده می باشد. دسته دوّم که مسائل شبه حل پذیر[2] نام دارند، طیف کامل را نمی توان دقیق مشخّص کرد بلکه باید با تقریب جواب آنها را بدست آورد. در حالت کلّی هامیلتونی های حل پذیر و شبه حل پذیر با ساختار ریشه جبر ها متناظرند و هنگامی که طیف انرژی و ویژه مقادیر آنها را بدست می آوریم بین حل پذیری و این ساختارهای جبری ارتباط برقرار می شود. بنابراین فیزیکدان ها بر آن شدند تا با یافتن متغیرهای مناسب در مسائل مختلف این جبرها را آشکار کرده و هر چه بیشتر مفهوم آنها را توضیح دهند. یک راه برای رسیدن به این هدف استفاده از متغیرهایی بود که تقارن های سیستم هامیلتونی را در خود داشتند. از دیدگاه ریاضی، گروه ویل[3] متناظر با ساختار ریشه هر جبر این خواسته را بر آورده می کند. بنابراین کشف این موضوع باعث شد که بین

[1] .exact solvable

[2] .quasi exact solvable

[3] .Weyl group

ریاضیات جبرها و هامیلتونی های مطرح شده در فیزیک ارتباط بیشتری برقرار شود و کاربرد جبرها در مسائل فیزیکی خودنمایی کند.

با گسترش روز افزون افق های علم در چند دهه اخیر، فیزیکدان ها با مسائلی مواجه شدند که به طور کامل قابل حل نبودند و تنها بخشی از معادله عملگری آنها با روش های جبری قابل محاسبه بود. در اوائل ۱۹۸۰ الحصید[1]، گورسی[2]، یاچلّو[3]، لوین[4] و همکارانش مفهومی را با عنوان " طیفی که جبر تولید می کند"[5] در مباحث فیزیکی بکار بردند که برای ایجاد مدل های پیچیده از مولکول ها کاربرد دارد؛ به این معنا که طیف نقطه ای آن ها می تواند به طور جبری تحلیل شود [۱]. در همان زمان گروه دیگری متشکل از توربینر[6]، اُشوریدز[7]، شیفمن[8] و همکارانش دسته ای از مسائل با نام عملگرهای حل پذیر شبه دقیق را از دیدگاه نظری معرّفی کردند [۲]. وجه تمایز این دسته مسائل این است که عملگر شرودینگر آنها جبر لی است؛ یعنی بر حسب ترکیب دو خطّی از عملگرهای دیفرانسیلی مرتبه اوّل می باشد که یک جبر لی با بعد متناهی را می تنند[9]. در واقع برای ساختن عملگرهای شبه حل پذیر لازم است ابتدا طبقه بندی کاملی از عملگرهای دیفرانسیلی مرتبه اوّل جبرهای لی در اختیار داشت. سپس از بین آنها جبری را انتخاب کرد که در اثر اعمال

[1] .Alhassid

[2] .Gursey

[3] .Iachello

[4] .Levine

[5]. spectrum generating algebra

[6] .Turbiner

[7] .Ushveridze

[8] .Shifman

[9] .span

عملگرهای آن جبر زیر فضایی هموار[1] و با بعد متناهی خواهند داد. نهایتاً با استفاده از تغییر متغیر مناسب و انجام تبدیل پیمانه ای از معادله درجه دوّمی که با مولّدهای درجه اوّل جبر نوشته شده به معادله شرودینگر رسید. پتانسیل های حاصل از این کار پتانسیل های جبری نام دارند و قابل بیان برحسب ترکیب دو خطّی از مولّدهای دیفرانسیلی مرتبه اوّل جبر با بعد متناهی هستند[۴، ۳].

به عبارت دیگر، عملگر شبه حل پذیر زیر فضایی با بعد متناهی و غیر بدیهی را ناوردا نگه می دارد. در این صورت عملگر هامیلتونی به صورت نمایشی ماتریسی با بعد متناهی نشان داده می شود که با قطری کردن آن ویژه مقادیر و ویژه توابع مربوط محاسبه می شود. اگر تعداد این زیر فضاها نامتناهی باشد، هامیلتونی حل پذیر می باشد و در غیر این صورت هامیلتونی شبه حل پذیر است. این جبر لی، جبر نهفته[2] سیستم هامیلتونی نام دارد. شبه حل پذیری هامیلتونی به دلیل وجود این جبر نهفته در سیستم است. اوّلین بار لوین کاربردهایی از این روش را در فیزیک مولکولی و برای بدست آوردن طیف انرژی آنها مطرح کرد [۵].

در ابتدا مسائل بس ذرّه ای و یک بعدی شبه حل پذیری که مطرح شدند روی خط قرار داشتند و جبر نهفته $sl(2)$ داشتند و برهمکنش آنها از نوع جفتی و عکس مجذوری بود ولی پس از مدّت کوتاهی مسائل چند جسمی و در دو بعد نیز مشخّص شدند که جبر های نهفته دیگر و برهمکنش های پیچیده تری داشتند[۷، ۶]؛ همچنین معلوم شد که می توان از روی مولّدهای دیفرانسیلی مرتبه اوّل جبر و نوشتن عملگری درجه دو با آنها، مدل های حل پذیر و شبه حل پذیر مختلفی بدست آورد که جبر نهفته هر دو

1 .smooth

2 .hidden algebra

دسته همان جبر اصلی است [۴]. از سوی دیگر با توجّه به نوع جبری که استفاده می شود برهمکنش های مختلفی نیز خواهیم داشت.به عبارت دیگر، هنگامی که از جبرهای لی برای نوشتن هامیلتونی استفاده شود علاوه بر این که جبر نهفته سیستم مشخّص می شود، نوع برهمکنش نیز آشکار خواهد شد. به عنوان مثال هامیلتونی حاصل از جبر a_n پتانسیلی با برهمکنش های جفتی[1] دارد[۸]؛ ولی هامیلتونی حاصل از جبر b_n, c_n حرکت نسبی ذرّات غیر یکسان سیستم را مورد بررسی قرار می دهد[۹]. هامیلتونی که با جبر g_2 نوشته می شود برهمکنش های دو و سه جسمی دارد[۱۰].

برای حلّ مسائل حل پذیر و شبه حل پذیر روش های مختلفی وجود دارد. اوّلین روش، روش اولشانتسکی-پرلوموف می باشدکه به روش کاهشی[2] نیز موسوم است. در این روش، اصلی ترین نکته ایجاد رابطه میان فضاهای متقارن و سیستم های کوانتومی است که وجود تبدیل ساده ای از هامیلتونی حاصل از جبرها به فضای متقارنی عملگر لاپلاس-بلترامی[3] را باعث می شود. این عملگر به طور یکتایی با استفاده از متریک ریمانی روی فضای تقارنی جبرها معرفی می شود [۱۱]. با استفاده از یافتن چنین تقارن هایی (که کسانی مانند گلفاند[4]، چاندرا[5] و ... در پیشرفت آن سهم بسزایی داشته اند) می توان به سیستم های کوانتومی جدید رسید [۱۲]. از سویی دیگر با استفاده از دیدگاه جبری در ریاضیات می توان به پتانسیل های فیزیکی رسید و بنابراین دیدگاه خود را وسعت بخشید. همچنین با استفاده از سیستم ریشه های هر جبر نوع برهم کنش ذرّات نیز مشخّص می شود.

---

[1]. pairwise

[1] reduction method

[3] .Laplace-Beltrami

[4] .Gelfand

[5] .Chandra

در روش توربینر، با استفاده از سیستم ریشه جبر، کلّی ترین هامیلتونی نوشته می شود. سپس با انجام یک تبدیل پیمانه ای (روش کاهشی) جملات اضافی حذف شده و هامیلتونی حاصل متناظر با عملگر لاپلاس–بلترامی روی فضاهای تقارنی می باشد. به بیان دقیقتر، در این شیوه از عملگرهای دیفرانسیلی مرتبه اوّل (که مولّد های جبر هستند) کلّی ترین شکل معادله درجه دو نوشته می شود. این عملگر دیفرانسیلی زیر فضایی با بعد متناهی و ناوردا دارد که منطبق با فضای نمایش عملگر های دیفرانسیلی مرتبه اوّل آن جبر می باشد. اگر پایه های این فضای نمایش بتوانند بر حسب عملگر های دیفرانسیلی نوشته شوند عملگر دیفرانسیلی مرتبه دو شکلی بلوک قطری دارد. اگر این زیر فضای ناوردا و با بعد متناهی باشد، عملگر کلّی شبه حل پذیر است و اگر بعد زیر فضای ناوردا، نامتناهی باشد عملگر ساخته شده دقیق حل پذیر می باشد [۲]. در این گونه مسائل حل پذیری سیستم به دلیل وجود ساختار جبری پنهان یا جبر نهفته در آن می باشد. در روش پرلوموف–اولشانتسکی از جبر مساله تنها برای معرّفی نوع برهمکنش ها استفاده می شود در صورتی که در روش توربینر با استفاده از جبر متغیرهای مساله نیز مشخّص می شود و همچنین هامیلتونی های حاصل از هر جبر با مولّدهای آن جبر بازنویسی می شود.

در روش کامران[۱] با استفاده از مولد های مرتبه اوّل جبر لی کلّی ترین معادله شبه حل پذیر نوشته می شود . سپس با یافتن نگاشت مناسب، هم ارزی این معادله با معادله مرتبه دوّم شرودینگر انجام می شود. در این مسیر برای یافتن شکل کلّی عملگر شبه حل پذیر، به طوری که مستقل از مختصّات باشد مجموعه ای از شرائط لازم و کافی بدست می آید تا این هم ارزی ارضا شود. یکی از مهمترین این شرایط، مثبت معین شدن متریک ریمانی روی فضای عملگر های مرتبه دو است. شرط دیگر این است که تک قطبی مغناطیسی

[1] .Kamran

این فضا بسته باشد؛ به این معنا که با تعریف عملگر مرتبه دو و اثر آن روی فضای نمایش جبر، همچنان در همین فضای نمایش بمانیم و از آن خارج نشویم[۱].

خاره[1] و همکارانش در محاسبه طیف جبرهای مختلف از مفاهیم ابر تقارنی[2] و شکل ناوردایی[3] در مکانیک کوانتومی استفاده می کنند. روش ابر تقارن فهم عمیقتری از مسائل مکانیک کوانتومی بدست می دهد و با استفاده از روش شکل ناوردایی مراحل محاسبه و بدست آوردن طیف به طور جبری ساده می شود. خاره این مفاهیم را در N بعد و در رابطه با جبر های مختلف بررسی کرده و بیشتر به یافتن مدل های کالوگرو-ساترلند مانند در این جبرها پرداخته است؛ زیرا این مدل ها در شاخه های مختلف فیزیک مثلاً مکانیک آماری، نظریه میدان، رسانایی فلزات، ابر رساناها و .... کاربردهای گسترده ای دارد [۱۶-۱۳].

در روش کالوگرو[4] به طور کلاسیکی مساله N جسمی مطرح می شود؛ یعنی سیستمی بس ذره ای که ذرات نقطه ای دارد و معادلات حرکت آنها نیوتنی است (شتاب متناسب با نیرو). او با این روش مسائل حل پذیر و انتگرال پذیر را حل می کند. مسائل مطرح شده ای که با روش های دقیق حل می شوند، برای حل آنها عملیات های جبری مثل قطری یا وارون کردن ماتریس های متناهی، پیدا کردن صفرهای چند جمله ای ها و ... استفاده می شود. از سویی دیگر، مسائل انتگرال پذیر روش هایی مشخص برای حل دارند: مثلاً یافتن جفت های لکس[5] (اگر $L(p,q)$ و $M(p,q)$ دو ماتریس $N\times N$ هستند که به N مختصه کانونیک q

[1] .Khare

[3] .Super Symmetry

[4] .Shape Invariance

[4]. Calogero

[5].Lax pairs

و تکانه های بندادی p بستگی دارند. این زوج را Lax می نامند هر گاه در معادله ای مشابه لیوویل صدق کنند یعنی: $\dot{L}=[L,M]$).

که در آنها تعدادی ثابت حرکت وجود دارد. این مدل ها حل پذیر هم هستند ولی در حالت کلّی مرز میان مسائل حل پذیر و انتگرال پذیر هنوز خیلی دقیق مشخص نشده است.

مسائل انتگرال پذیر بس ذره ای تعمیمی از مسائل لاگرانژی کلاسیک است. بنابراین حل مسائل بس ذره ای به روش کالوگرو با معادلات نیوتنی حرکت توصیف می شود که حل آنها به معادلات دیفرانسیلی خطی و پاره ای منجرمی شود [۱۷].

از زمانی که کالوگرو و ساترلند[1] اوّلین کارهای خود را در زمینه مطالعه مسائل حل پذیر چند جسمی کوانتومی و انتگرال پذیر با برهمکنش عکس مجذوری ساده و مثلّثاتی مطرح کردند این موضوع زمینه ای جذّاب برای مطالعه فیزیکدان ها شد و دو مدل معروف آنها به شاخه های مختلف ریاضی و فیزیک راه پیدا کرد [۱۹، ۱۸]. از دیدگاه ریاضی، یکی از پیشرفت های اساسی در این زمینه کشف اولشانتسکی[2] و پرلوموف[3] بود که بر اساس آن برهم کنش ذرّات در این دو مدل با ساختار ریشه جبر a_n مطابقت داشت [۲۰]. به عبارت دیگر آنها فهمیدند که جبر نهفته هر دو مدل، جبر a_n بوده و در واقع این دو پتانسیل دو روی یک سکّه هستند. حل پذیری این مدل ها نیز نتیجه بیان هامیلتونی به صورت بخش شعاعی عملگر لاپلاس بلترامی در فضای تقارنی یا همان فضای ویل سیستم ریشه این جبر می باشد.

---

[1] .Sutherland

[2] .Olshanetsky

[3] .Perelomov

مسائلی که تاکنون مطرح شده اند، بیشتر در یک بعد بوده و با استفاده از جبر های لی ساده bc_n, d_n, c_n, b_n, a_n مورد بررسی قرار گرفته اند. البتّه توربینر و همکارانش پتانسیل های حاصل از جبر های استثنائی e_8, e_7, e_6, f_4, g_2 را نیز مورد بحث قرار داده اند که در بیشتر از یک بعد هستند و برهمکنش های آنها دو جسمی، سه جسمی، چهار جسمی و ... می باشد[۲۲، ۲۱].

در این رساله قصد داریم با استفاده از نمایش خاصّی از جبر g_2 در دو بعد، شکل کلّی معادله شبه حل پذیر آن را نوشته و سپس شرایطی را بررسی کنیم که این معادله به معادلات آشنای حل پذیر تبدیل می شود. همچنین از مقایسه این معادله با دو معادله آشنای کالوگرو و ساترلند، ماتریس ضرائب تبدیل را بدست می آوریم. سپس نشان دهیم می توان از روی کلّی ترین شکل معادله شبه حل پذیر جبر g_2 در دو بعد به پتانسیل حل پذیر پاشل تلر رسید و ویژه توابع و ویژه مقادیر آن را محاسبه کرد. در ادامه ثابت های حرکت هامیلتونی حاصل از این جبر را نیز بدست خواهیم آورد. این جزوه به عنوان رساله دکتری ارائه شده و شامل چهار فصل می باشد. این فصل که به عنوان فصل اوّل ارائه گردیده در بر گیرنده کلّیات تحقیق می باشد. در این فصل ابتدا جبر لی و مطالبی کلّی درباره خواصّ آن را مطرح می کنیم. سپس اشاره کوتاهی به جبر g_2 داریم که موضوع اصلی این پایان نامه می باشد سپس شکل کلّی عملگر شرودینگر شبه حل پذیر را معرّفی کرده و رابطه آن را با جبر لی توضیح می دهیم و در این راستا به شرایطی می رسیم که یک عملگر کلّی شبه حل پذیر به معادله شرودینگر منجر می شود. در انتهای فصل نیز به دلیل کاربرد دو مدل معروف کالوگرو و ساترلند در این رساله، معرّفی اجمالی از آنها انجام می دهیم. در فصل دوّم به طور مفصّل هر یک از روش های مزبور در حلّ مسائل حل پذیر دقیق و شبه دقیق را توضیح می دهیم. اصول کلّی آنها را مطرح کرده وتفاوت های آنها را آشکار می کنیم. در فصل سوّم، ابتدا هامیلتونی کسری و مثلّثاتی جبر

g_2 را عنوان می کنیم که با اعمال تبدیل پیمانه ای و معرّفی ناورداهای ویل، تبدیل به مدل حل پذیر کسری و مثلّثاتی جبر g_2 می شوند؛ سپس طیف کامل و ویژه توابع آن بدست می آید. آنگاه با استفاده از کلّی ترین شکل هامیلتونی شبه حل پذیر جبر g_2 در صفحه و انجام تغییر متغیر و تبدیل پیمانه ای مناسب، به پتانسیل حل پذیر پاشل–تلر می رسیم. این پتانسیل روی پهنای نواری و مستطیل شکل قرار می گیرد. در انتها ارتباط کلّی ترین شکل هامیلتونی شبه حل پذیر جبر سه جسمی g_2 را با دو مدل سه جسمی کالوگرو و ساترلند پیگیری می کنیم و مشخّص می کنیم که با در نظر گرفتن چه ماتریسی از ضرائب، هامیلتونی جبر g_2 به مدل های حل پذیر مزبور تبدیل می شود. در نهایت با توجّه به انتگرال پذیر بودن مدل سه جسمی جبر G_2 ، ثابت های حرکت آن را بدست می آوریم. در فصل چهارم به جمع بندی کلّی از کار انجام شده پرداخته و نتیجه گیری هایی انجام می دهیم و رساله را به پایان می رسانیم.

۱-۲ جبرهای لی

سوفوس لی[1] در اوائل قرن نوزدهم ترغیب شد که برای یافتن حلّ معادلات دیفرانسیل به مطالعه جبر لی بپردازد. او در این راه از شیوه ای جدید استفاده کرد که مهم ترین ویژگی آن برقراری ارتباط بین ساختارهای هندسی و جبر بود. بعد از ابداع این روش بود که جبر ابزار توانمندی برای مطالعه شاخه های مختلف ریاضی و فیزیک شد. در هر سیستم فیزیکی متقارن به سادگی از گروه و جبر استفاده می شود؛ از جمله می توان به مسائل مکانیک کلاسیک و کوانتومی، طیف نمایی اتمی، فیزیک حالت جامد و فیزیک ذرّات اشاره کرد [۲۷–۲۳]. بنابراین لازم است مقداری با جبر و مباحث مربوط به آن آشنا شویم.

1 .Sophus Lie