دانشگاه سیستان وبلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان:

# مساوی ها و نامساوی های نرمی برای عملگرهای ماتریسی

استاد راهنما:
دکتر رحمت ا... لشکری پور

تحقیق و نگارش:
سمیه خسروی

دی ماه ۱۳۹۰

# چکیده

در این پایان نامه چندین مساوی و نامساوی نرمی برای عملگرهای ماتریسی را بیان می کنیم. این نتایج به ساختار عملگرهای ماتریسی چرخشی (متقارن) شامل نامساوی های نوع پینچینگ [1] برای نرم های بطور ضعیف یکانی پایا وابسته اند، هم چنین بیان می کنیم که نامساوی پینچینگ نرم های بطور ضعیف یکانی پایای $A$ را کاهش می دهد، یعنی نامساوی پینچینگ :

$$||C(A)|| \leq ||A||$$

برای هر نرم بطور ضعیف یکانی پایا برقرار است. نامساوی های نرمی را برای بدست آوردن نامساوی های نوع پینچینگ بکار می بریم هم چنین شرایط مساوی در این نامساوی های نرمی نیز داده شده است.

[1] Pinching

# فهرست مندرجات

# پیشگفتار

نامساوی ها مباحثی از آنالیز می باشند، که از دیرباز مورد توجه ریاضیدانان بوده است. هاردی [۱]، لیتلوود [۲] و پولای [۳] در سال ۱۹۳۴ بطور کلاسیک روی نامساوی ها کار کرده اند. بخش عظیمی از تلاش آنها توسیع نامساوی های کلاسیک به نوع جدیدی از نامساوی ها و کاربردی از نامساوی ها در بسیاری از قسمت های آنالیز بوده است.

جیمز کلارکسون [۴] در سال ۱۹۳٦ مفهوم به طور یکنواخت محدب بودن فضاهای باناخ را در [۹] بیان کرد. وی با اثبات نامساوی‌های کلارکسون در فضای $l_p(L_p)$ نشان داد این فضای باناخ به طور یکنواخت محدب می‌باشد. کاربرد به طور یکنواخت محدب بودن در ریاضی فیزیک در [۲۰] نشان داده شده است.

رابطه نرم عملگر ماتریسی $A = [A_{jk}]$ مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان بوده است که به مسائل مشخصی در نظریه عملگرها، ریاضی فیزیک و آنالیز عددی وابسته است[۵]. در این پایان نامه نامساوی های نرمی روی عملگرهای ماتریسی را مورد برسی قرار می دهیم.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی را بیان می کنیم. سپس در فصل دوم به بیان نامساوی های نرمی برای مجموع عملگرهای معین می پردازیم. پس از آن در فصل سوم برخی از این نامساوی ها را در جبرهای نرم دار بیان می کنیم. در فصل چهارم نامساوی های غیر جابجایی کلارکسون را برای $n-$ تایی از عملگرها معرفی نموده و در نهایت به بیان مساوی ها و نامساوی های نرمی برای عملگرهای ماتریسی می پردازیم.

---

[۱] Hardy
[۲] Littlewood
[۳] Polay
[۴] J.clarkson

# فصل ۱

# تعاریف و مفاهیم مقدماتی

## ۱—۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایای اساسی جبرخطی و آنالیز را که مورد نیاز می باشند، بیان می کنیم.
ابتدا در بخش دوم عملگرهای خطی را تعریف می کنیم. سپس به بیان لم ها و قضایای مربوط به آن ها می‌پردازیم. هم‌چنین مقادیر ویژه و تکین یک عملگر را معرفی می‌نماییم. آن گاه در بخش سوم پس از تعریف نرم‌های به‌طور یکانی پایا، به معرفی انواع خاصی از این گونه نرم ها و خواص آن ها خواهیم پرداخت. در نهایت در بخش چهارم توابع یکنوا عملگری و محدب و مقعر عملگری و دربخش آخر مجموع ومجموع مستقیم عملگرها ارائه شده است.

## ۱—۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

**تعریف ۱.۲.۱.** فرض کنید $T$ عملگری از فضای برداری نرم دار $X$ به توی فضای برداری نرم دار $Y$ باشد. عملگر $T$ را کراندار گوییم، هر گاه عددی ثابت مانند $k$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $x \in X$

$$\|Tx\| \leq k\|x\|.$$

**تعریف ۲.۲.۱.** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ (اعداد حقیقی یا مختلط) باشند. تابع $T : X \longrightarrow Y$ را عملگرخطی گوییم، هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$T(\alpha x_۱ + \beta x_۲) = \alpha T(x_۱) + \beta T(x_۲).$$

مجموعه تمام عملگرهای خطی و کراندار از فضای برداری $H$ به فضای برداری $K$ را با $B(H,K)$ نمایش می‌دهیم. اگر $H = K$، آن‌گاه $B(H,H)$ را با $B(H)$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۳.۲.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. تابع $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را نرم گوییم،

هرگاه

(۱) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq ۰$ و $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

(۲) به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

(۳) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این صورت $(X, \|.\|)$ را فضای برادری نرم‌دار گوییم.

**تعریف ۴.۲.۱.** نرم عملگر خطی $T$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ||T|| &= sup\ \{||Th|| : h \in H,\ \ ||h|| \leq ۱\} \\ &= sup\ \{||Th|| : ||h|| = ۱\} \\ &= sup\ \{\tfrac{||Th||}{||h||} : h \neq ۰\} \\ &= inf\ \{c > ۰ : ||Th|| \leq c||h||,\ \ h \in H\}. \end{aligned}$$

**تعریف ۵.۲.۱.** فضای برداری نرم‌دار $(X, \|.\|)$ کامل است، اگر هر دنباله کوشی در این فضا همگرا باشد.

**تعریف ٦.۲.۱.** فرض کنید $X$ مجموعه‌ای ناتهی باشد. نگاشت

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

را متر گوییم، هر گاه

(۱) به ازای هر $x \in X$، $d(x, x) = ۰$.

(۲) به ازای هر $x, y \in X$، که $x \neq y$، $d(x, y) > ۰$.

(۳) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$.

(۴) به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

در این صورت $(X, d)$ را فضای متری گوییم.

**تعریف ۷.۲.۱.** هر گاه $X$ یک فضای برداری نرم دار باشد، تابع $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متر روی $X$ تعریف می‌کند، این متر را متر نرمی می‌نامیم.

**تعریف ۸.۲.۱.** هر فضای برداری نرم دار مانند $X$ که نسبت به متر نرمی کامل باشد، فضای باناخ نامیده می‌شود.

**تعریف ۹.۲.۱.** هرگاه $X$ یک فضای برداری نرم دار و $\mathbb{F}$ میدان اسکالر باشد، هر عملگر از $X$ به $\mathbb{F}$ را یک تابعک خطی می‌نامیم.

**تعریف ۱۰.۲.۱.** اگر $X$ فضای برداری نرم دار باشد و $X^*$ مجموعه تمام تابعک های خطی کراندار روی $X$ باشد، آنگاه $X^*$ را دوگان $X$ می‌نامیم.

**تعریف ۱۱.۲.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ (اعداد حقیقی یا مختلط) باشد. نگاشت

$$\langle .,. \rangle \; : \; X \times X \; \to \mathbb{F}$$

را ضرب داخلی گوییم، هرگاه

(۱) به ازای هر $x \in X$، $\langle x,x \rangle \geq 0$ و $\langle x,x \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(۲) به ازای هر $x_1, x_2, y \in X$، $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.

(۳) به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

(۴) به ازای هر $x, y \in X$، $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ( $\overline{\langle x, y \rangle}$ مزدوج مختلط $\langle x, y \rangle$ است).

**تعریف ۱۲.۲.۱.** به هر فضای برداری دارای ضرب داخلی، فضای ضرب داخلی گویند.

**تعریف ۱.۲.۱۳.** اگر $H$ فضای ضرب داخلی و نسبت به نرم تعریف شده توسط ضرب داخلی به صورت

$$\|x\| = (< x, x >)^{\frac{1}{2}},$$

کامل باشد، آنگاه $H$ را فضای هیلبرت نامیم.

**تعریف ۱.۲.۱۴.** فضای برداری نرم دار $H$ را جدایی پذیر نامیم، اگر دارای زیر مجموعه چگال شمارش پذیر باشد.

**تعریف ۱.۲.۱۵.** فرض کنید $H$ یک فضای هیلبرت باشد. $f, g \in H$ را متعامد گوییم، هرگاه $< f, g >= 0$ و آن را با نماد $f \perp g$ نشان می دهیم.

**تعریف ۱.۲.۱۶.** فرض کنید $T$ یک عملگر خطی روی فضای ضرب داخلی $X$ باشد. عملگر $T$ را مثبت گوییم، هرگاه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0.$$

**تعریف ۱.۲.۱۷.** فرض کنید $X$ و $Y$ فضاهای خطی نرم‌دار باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد. عملگر $T$ فشرده نامیده می شود، اگر $\overline{T(Ball(X))}$ زیر مجموعه فشرده $Y$ باشد، که

$$Ball(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}.$$

**گزاره ۱.۲.۱۸.** فرض کنید $X$ و $Y$ فضاهای خطی نرم‌دار باشند و $T : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد. عملگر $T$ فشرده است اگر و تنها اگر برای هر دنباله $\{x_n\} \in X$، که $\|x_n\| \leq 1$، $\{Tx_n\}$ دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد.

**برهان.** به [۱۰] مراجعه شود.□

**تعریف ۱۹.۲.۱.** یک فضای برداری همراه با نگاشت دو خطی $\underset{(a,b)\to ab}{A\times A\to A}$ را یک جبر گوییم هرگاه برای هر $a,b,c\in A$

$$a(bc)=(ab)c.$$

در صورتی که $A$ نرم دار باشد، نرم روی $A$ زیر ضربی گفته می‌شود، اگر برای هر $a,b\in A$، داشته باشیم $\|ab\|\leq\|a\|\|b\|$. اگر $A$ یک جبر باشد، $(A,\|.\|)$ یک جبر نرم‌دار نامیده می‌شود. یک جبر نرم‌دار کامل را، یک جبر باناخ گوییم.

**تعریف ۲۰.۲.۱.** فرض کنید $H$ و $K$ فضای ضرب داخلی باشند، اگر $A\in B(H,K)$، آنگاه عملگر منحصربفرد $B\in B(K,H)$، که در تساوی $\langle Ah,k\rangle=\langle h,Bk\rangle$ صدق می‌کند، الحاق $A$ نامیده می‌شود و به‌صورت $B=A^*$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت برای هر $h\in H$ و $k\in K$ داریم

$$\langle Ah,k\rangle=\langle h,A^*k\rangle.$$

**گزاره ۲۱.۲.۱.** اگر $H$ یک فضای هیلبرت و $T\in B(H)$، آنگاه

$$\|T\|=\|T^*\|=\|T^*T\|^{\frac{1}{2}}.$$

**برهان.** به [۱۰] مراجعه شود.□

**تعریف ۲۲.۲.۱.** اگر $A=A^*$، عملگر $A\in B(H)$ را خود الحاق یا هرمیتی می‌نامیم.

**تعریف ۲۳.۲.۱.** ماتریس $A\in M_n$ را هرمیتی گوییم، اگر با مزدوج ترانهاده خود برابر باشد، یعنی

$$A=\bar{A}^t.$$

به‌طور مثال ماتریس

$$\begin{bmatrix} ۱ & i \\ -i & ۱ \end{bmatrix}$$

با مزدوج ترانهاده خود برابر است، یعنی یک ماتریس هرمیتی است. مجموعه ماتریس‌های هرمیتی در$M_n$ را با $H_n$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۲۴.۲.۱.** اگر $A^*A = AA^*$، عملگر(ماتریس) $A$ را نرمال می‌نامیم.

**تعریف ۲۵.۲.۱.** اگر $A^*A = I = AA^*$، عملگر(ماتریس) $A$ را یکانی می‌نامیم.

**تعریف ۲۶.۲.۱.** یک ماتریس یکانی را که تمام درایه‌های آن حقیقی باشند، متعامد می‌نامیم.

**تعریف ۲۷.۲.۱.** اگر $\|A\| \leq ۱$، عملگر(ماتریس) $A$ را انقباض می‌نامیم.

**تعریف ۲۸.۲.۱.** نرم طیفی عملگر $A$ را با $\|A\|_\infty$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|A\|_\infty = sup\left\{\|Ax\| : \|x\| = ۱, x \in \mathbb{C}^n\right\}.$$

**گزاره ۲۹.۲.۱.** نرم طیفی خاصیت زیرضربی دارد، یعنی

$$\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty .$$

**برهان.** به [۱۰] مراجعه شود.□

**تعریف ۳۰.۲.۱.** مجموع عناصر روی قطر یک ماتریس را اثر یک ماتریس گویند، یعنی

$$tr(A) = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}.$$

**قضیه ۳۱.۲.۱.** برای ماتریس $A \in M_n$ گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $A$ هرمیتی است.

(۲) برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^*Ax \in \mathbb{R}$.

(۳) $A^۲ = A^*A$.

(۴) $tr\, A^۲ = tr\,(A^*A)$.

**برهان.** به [۲۱] مراجعه شود.□

**تعریف ۳۲.۲.۱.** عدد مختلط $\lambda$ یک مقدار ویژه ماتریس مربعی $A$ است، اگر یک بردار ناصفر $u$ در $\mathbb{C}^n$ وجود داشته باشد، به‌طوری که

$$Au = \lambda u.$$

$u$ را یک بردار ویژه متناظر با $\lambda$ می‌نامیم. مجموعه مقادیر ویژه $A \in M_n$ را طیف $A$ می‌نامیم و با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم. یک مقدار ویژه $A$ ریشه چند جمله‌ای مشخصه است. در حقیقت $\lambda$ یک مقدار ویژه $A$ است اگر و تنها اگر

$$det(A - \lambda I) \equiv P_A(\lambda) = ۰,$$

که $P_A(\lambda)$ چند جمله‌ای مشخصه $A$ می‌باشد.

ماکزیمم قدر مطلق همه مقادیر ویژه $A$ شعاع طیفی $A$ نامیده می‌شود و با $\rho(A)$ نمایش می‌دهیم:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

مجموعه مقادیر ویژه $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ...، $\lambda_n$ از $A \in H_n$ را که به‌صورت نزولی مرتب شده‌اند، با $\lambda(A) = (\lambda_۱(A), \lambda_۲(A), ..., \lambda_n(A))$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۳۳.۲.۱.** مقادیر تکین $A$ همان مقادیر ویژه $|A|$ می باشد و برای $j = ۱, ۲, ..., n$ با $s_j(A)$ نمایش

داده می شود، که در یک ترتیب غیر صعودی به تعداد تکرارشان(لزوماً متناهی ) مرتب شده اند

$$s_{۱}(A) \geq s_{۲}(A) \geq ... \geq s_n(A)$$

مجموعه مقادیر تکین $A$ را با $s(A)$ نمایش می دهند، به این معنی که

$$s(A) = (s_{۱}(A), s_{۲}(A), ..., s_n(A))\,.$$

**قضیه ۳۴.۲.۱.** برای ماتریس های $A, B, C \in M_n$ گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اثر ماتریس $A$ برابر با مجموع مقادیر ویژه $A$ می‌باشد.

(۲) اثر حاصل‌ضرب چند ماتریس دارای خاصیت دوری است، به این معنی که

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA).$$

**برهان.** به [۲۱] مراجعه شود.□

**تعریف ۳۵.۲.۱.** اگر $T \in B(H)$، آن گاه طیف عملگر $T$ مجموعهٔ همه $\lambda$ هایی است که $T - \lambda I$ معکوس‌پذیر نباشد:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathcal{F} :\ T - \lambda I \quad \text{معکوس پذیر نباشد}\},$$

که $\mathcal{F}$ میدان اسکالر فضای $H$ می‌باشد.

**قضیه ۳۶.۲.۱.** اگر $T \in B(H)$، آن گاه

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} :\ \lambda \in \sigma(T)\}.$$

**برهان.** $T$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $T^*$ معکوس‌پذیر باشد و $T - \lambda$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر $(T - \lambda)^*$ معکوس‌پذیر باشد. لذا $T - \lambda$ معکوس‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $T^* - \bar{\lambda}$ معکوس‌ناپذیر باشد.

بنابراین

$$\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(T^*).\square$$

مفهوم اثر یک عملگر را بصورت زیر شرح می دهیم

فرض کنید $A \in B(H)$ و برای هر پایه متعامد یکه $\{\phi_\alpha\}$ از $H$، $\sum_\alpha |(A\phi_\alpha, \phi_\alpha)| < \infty$ ، باشد. آنگاه اگر $\{\psi_\beta\}$ پایه متعامد یکه دیگری از $H$ باشد،

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha (A\phi_\alpha, \phi_\alpha) &= \sum_\alpha A(\sum_\beta (\phi_\alpha, \psi_\beta)\psi_\beta, \sum_\beta (\phi_\alpha, \psi_\beta)\psi_\beta) \\
&= \sum_\alpha \sum_\beta (A\psi_\beta, \psi_\beta)|(\phi_\alpha, \psi_\beta)|^{۲} \\
&= \sum_\beta (A\psi_\beta, \psi_\beta)\sum_\alpha |(\phi_\alpha, \psi_\beta)|^{۲} \\
&= \sum_\beta (A\psi_\beta, \psi_\beta).
\end{aligned}$$

بنابراین $\sum_\alpha (A\phi_\alpha, \phi_\alpha)$ مستقل از پایه متعامد یکه $\{\phi_\alpha\}$ از $H$ می‌باشد. مقدار $\sum_\alpha (A\phi_\alpha, \phi_\alpha)$ را اثر $A$ می‌نامیم و توسط $trA$ نمایش می‌دهیم. اگر $A$ مثبت و فشرده باشد، $\{\phi_\alpha\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که پایه متعامد یکه برای $H$ شامل بردارهای ویژه $A$ باشد. بنابراین اثر $A$ به طور ساده جمع مقادیر ویژه $A$ است، که با دفعات تکرارشان شمارش پذیر می‌باشد[۱۹].

**گزاره ۳۷.۲.۱.** فرض کنید $-a \leq b < a$. آنگاه

اگر $۰ < \gamma \leq ۱$، $\quad ۲^{\gamma-۱}(a^\gamma + b^\gamma) \leq (a+b)^\gamma + (a-b)^\gamma \leq ۲(a^\gamma + b^\gamma)$؛

اگر $۱ \leq \gamma < \infty$، $\quad ۲(a^\gamma + b^\gamma) \leq (a+b)^\gamma + (a-b)^\gamma \leq ۲^{\gamma-۱}(a^\gamma + b^\gamma)$.

**برهان.** به [۱۹] مراجعه شود.$\square$

**لم ۳۸.۲.۱.** فرض کنید $A \in B(H)$ و $A \geq ۰$ و فرض کنید $\gamma$ عدد حقیقی مثبت باشد. آنگاه

(۱) اگر $۰ < \gamma \leq ۱$، $\quad (A^\gamma x, x) \leq (Ax, x)^\gamma |x|^{۲(۱-\gamma)}$؛

(۲) اگر $\infty > \gamma \geq ۱$، $(A^\gamma x, x) \geq (Ax, x)^\gamma |x|^{۲(۱-\gamma)}$.

**برهان.** به [۱۹] مراجعه شود.□

**لم ۳۹.۲.۱.** فرض کنید $A, B \in B(H)$ و $-A \leq B \leq A$. آنگاه

اگر $۱ \geq \gamma > ۰$، $tr(A+B)^\gamma + tr(A-B)^\gamma \leq ۲ tr A^\gamma$؛

اگر $\infty > \gamma \geq ۱$، $tr(A+B)^\gamma + tr(A-B)^\gamma \geq ۲ tr A^\gamma$.

**برهان.** فرض کنید $\{\phi_\alpha\}$ پایه متعامد یکه برای $H$، شامل بردارهای ویژه $A$ باشد، یعنی $A\phi_\alpha = \lambda_\alpha \phi_\alpha$. چون

$$-(A\phi_\alpha, \phi_\alpha) \leq (B\phi_\alpha, \phi_\alpha) \leq (A\phi_\alpha, \phi_\alpha),$$

بنا به گزاره ۳۷.۲.۱ داریم

$$((A+B)\phi_\alpha, \phi_\alpha)^\gamma + ((A-B)\phi_\alpha, \phi_\alpha)^\gamma \leq ۲(A\phi_\alpha, \phi_\alpha)^\gamma = ۲\lambda_\alpha^\gamma, \qquad (\gamma \leq ۱),$$

$$((A+B)\phi_\alpha, \phi_\alpha)^\gamma + ((A-B)\phi_\alpha, \phi_\alpha)^\gamma \geq ۲(A\phi_\alpha, \phi_\alpha)^\gamma = ۲\lambda_\alpha^\gamma, \qquad (\gamma \geq ۱),$$

همچنین $A+B \geq ۰$، $A-B \leq ۰$. بنابه لم ۳۸.۲.۱ نتیجه می‌گیریم

$$((A+B)^\gamma \phi_\alpha, \phi_\alpha) + ((A-B)^\gamma \phi_\alpha, \phi_\alpha) \leq ((A+B)\phi_\alpha, \phi_\alpha)^\gamma + ((A-B)\phi_\alpha, \phi_\alpha)^\gamma \leq ۲\lambda_\alpha^\gamma, \qquad (\gamma \leq ۱),$$

به طور مشابه

$$((A+B)^\gamma \phi_\alpha, \phi_\alpha) + ((A-B)^\gamma \phi_\alpha, \phi_\alpha) \geq ((A+B)\phi_\alpha, \phi_\alpha)^\gamma + ((A-B)\phi_\alpha, \phi_\alpha)^\gamma \geq ۲\lambda_\alpha^\gamma, \qquad (\gamma \geq ۱).$$

با جمع روی $\alpha$ نتیجه می‌شود

$$tr(A+B)^\gamma + tr(A-B)^\gamma \leq ۲\sum_\alpha \lambda_\alpha^\gamma = ۲ tr A^\gamma, \qquad (\gamma \leq ۱),$$

و

$$tr(A+B)^{\gamma}+tr(A-B)^{\gamma}\geq ۲\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}^{\gamma}=۲trA^{\gamma}, \qquad (\gamma\geq ۱).\square$$

**لم ۴۰.۲.۱.** فرض کنید $A,B\in B(H)$، $A,B\geq ۰$. آنگاه

اگر $۰<\gamma\leq ۱$، $tr(A+B)^{\gamma}\leq trA^{\gamma}+trB^{\gamma}$؛

اگر $۱\leq\gamma<\infty$، $tr(A+B)^{\gamma}\geq trA^{\gamma}+trB^{\gamma}$.

**برهان.** به [۱۹] مراجعه شود.□

## ۱ـ۳ نرم‌های به طور یکانی پایا

**تعریف ۱.۳.۱:** مجموعه $N\subset R$ یک ایدال جبری(دوطرفه) از حلقه $R$ است، اگر خواص زیر را داشته باشد:

(۱) برای هر دو عملگر $A$ و $B$ از $N$ داشته باشیم: $A^{*}+B\in N$.

(۲) برای هر دو عملگر $A$ و $B$ از $N$ داشته باشیم: $AB,BA\in N$.

(۳) $N\neq ۰$ و $N\neq R$.

اگر عملگر $A$ متعلق به ایدال دوطرفه $N$ از حلقه $R$ باشد، آن‌گاه عملگر $A^{*}$ نیز متعلق به این ایدال است. به عبارت دیگر، هر ایده‌ال دوطرفه خودالحاق می‌باشد.

**تعریف ۲.۳.۱.** نرم $|||.|||$ روی $M_n$ به‌طور یکانی پایاست، هرگاه علاوه بر دارا بودن خواص نرم، برای هر عملگر $A$ و هر دو عملگر یکانی $U$ و $V$، در خاصیت $|||UAV|||=|||A|||$ صدق کند. اگر فضا نامتناهی‌البعد باشد، نرم‌های به‌طور یکانی پایا روی ایدال نرمی متناظر با $|||.|||$(مشمول در ایدال عملگرهای فشرده) و اگر فضا با بعد متناهی باشد، روی تمام عملگرها تعریف می‌شود.

**تعریف ۳.۳.۱.** یک نرم روی $M_n$ نرمال شده گفته می‌شود، اگر $||diag(1,0,0,...,0)|| = 1$.

**تعریف ۴.۳.۱.** فرض کنید $S_n$ فضای تمام $n$ تایی‌ها از اعداد حقیقی به صورت $u=(u_1,...,u_n)$ باشد. تابع حقیقی مقدار $\phi(u)=\phi(u_1,...,u_n)$ روی $S_n$ یک تابع مقیاس نامیده می‌شود، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $\phi(u_1,...,u_n)>0$ (به‌جز $u_1=...=u_n=0$)؛

(۲) برای هر $c\geq 0$، $\phi(cu_1,...,cu_n)=c\,\phi(u_1,...,u_n)$؛

(۳) $\phi(u_1+v_1,...,u_n+v_n)\leq \phi(u_1,...,u_n)+\phi(v_1,...,v_n)$.

$\phi$ تابع مقیاس متقارن است، اگر علاوه بر شرایط فوق شرط زیر نیز برقرار باشد:

(۴) $\phi(u_1,...,u_n)=\phi(\varepsilon_1 u_{\rho(1)},...,\varepsilon_n u_{\rho(n)})$، که در آن $\varepsilon_i=\pm 1$ و $\rho(1),...,\rho(n)$ جایگشت هایی روی اعداد $1,...,n$ می‌باشند.

علاوه بر این $\phi$ را همیشه نرمال شده در نظر می‌گیریم. بنابراین $\phi(1,0,...,0)=1$.

**تعریف ۵.۳.۱.** از معروف ترین نرم‌های به‌طور یکانی پایا، نرم‌های کی—فن[1] $\|.\|_{(k)}$, $(k=1,2,...,n)$ هستند، که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\|A\|_{(k)}=\sum_{j=1}^{k}s_j(A)\ , \qquad (k=1,2,...,n).$$

**تعریف ۶.۳.۱.** شاتن[1] $p$—نرم‌ها دسته‌ای دیگر از نرم‌های به‌طور یکانی پایا هستند. آن‌ها نرم‌های $l_p$ از مقادیر تکین می‌باشند، که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\|A\|_p=\{\sum_{j=1}^{\infty}s_j^p(A)\}^{\frac{1}{p}}=\{tr(|A|^p)\}^{\frac{1}{p}}, \qquad 1\leq p<\infty.$$

ایدآل متناظر با شاتن $p$—نرم‌ها با $C_p$ نشان داده می‌شود. برای $0<p<1$، به‌جای نامساوی مثلثی، که در این حالت برقرار نمی‌باشد، داریم $||A+B||_p^p\leq ||A||_p^p+||B||_p^p$.

---

[1] Ky-Fan

[1] Schatten