

سورة الفاتحة



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

تناظر ترمودینامیکی برخی سیاه چاله ها با گاز وان دروالس

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

امیر هومان آران پور

استاد راهنما
دکتر بهروز میرزا



دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده ی فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک ذرات بنیادی آقای امیر هومان آران پور
تحت عنوان

تناظر ترمودینامیکی برخی سیاه چاله ها با گاز وان دروالس

در تاریخ ۱۳۹۰/۱۱/۱۰ توسط کمیته ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

- | | |
|-------------------|--------------------------------|
| دکتر بهروز میرزا | ۱- استاد راهنما پایان نامه |
| دکتر مسلم زارعی | ۲- استاد مشاور پایان نامه |
| دکتر منصور حقیقت | ۳- استاد ممتحن داخلی |
| دکتر مسلم زارعی | ۴- استاد ممتحن داخلی |
| دکتر مجتبی اعلائی | سرپرست تحصیلات دانشکده ی فیزیک |

قدردانی

از تمامی عزیزانی که این حقیر را در انجام این کار یاری کردند، ممنون و سپاس گزارم.

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج
مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی
از تحقیق موضوع این پایان‌نامه (رساله)
متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به تمام مردمان ایران زمین

فهرست مطالب

۱	چکیده
۱	۱ دیباچه
۴	۲ گاز وان دروالس
۴	۱.۲ معرفی گاز وان دروالس
۸	۱.۱.۲ قانون تطابق حالت‌ها
۹	۲.۱.۲ پتانسیل‌های ترمودینامیکی و انرژی آزاد گیبس
۱۱	۳.۱.۲ قانون مساحت‌های مساوی ماکسول
۱۱	۲.۲ نماهای بحرانی
۱۵	۳.۲ گذار فاز
۱۵	۱.۳.۲ مرتبه‌های گذار فاز
۱۶	۲.۳.۲ پتانسیل شیمیایی و تغییر فاز
۱۷	۳.۳.۲ معادله کلاسیوس-کلاپیرون
۱۸	۴.۲ هنگرد
۱۹	۳ نسبیت عام
۱۹	۱.۳ اصول حاکم بر نسبیت
۱۹	۱.۱.۳ اصل ماخ
۲۱	۲.۱.۳ اصل هم‌ارزی
۲۳	۳.۱.۳ اصل ناوردایی
۲۳	۴.۱.۳ اصل کمینه جفت‌شدگی گرانشی
۲۳	۵.۱.۳ اصل تطابق
۲۴	۲.۳ معرفی برخی مفاهیم مهم در نسبیت
۲۴	۱.۲.۳ بردارها، متریک، تک‌ریخت
۲۴	۲.۲.۳ تانسور ریمان، تانسور ریچی، اسکالر ریچی و تانسور اینشتین
۲۵	۳.۳ معادلات ساختاری کارتان
۲۵	۱.۳.۳ پایه‌های غیر هولونومیک
۲۵	۲.۳.۳ معادله ساختاری کارتان و ضرائب دوران ریچی
۲۷	۴.۳ معادلات میدان اینشتین
۲۷	۱.۴.۳ معادلات میدان اینشتین در حضور ثابت کیهان‌شناسی
۲۸	۲.۴.۳ تانسور انرژی-تکانه
۲۸	۵.۳ قانون اول ترمودینامیک و معادلات اینشتین

۳۱	سیاه‌چاله‌ها	۴
۳۲	۱.۴ افق‌های سیاه‌چاله	۱.۴
۳۲	۱.۱.۴ سرخ‌گرایی در یک میدان گرانشی	۱.۱.۴
۳۲	۲.۱.۴ افق	۲.۱.۴
۳۳	۲.۴ قوانین ترمو دینامیک سیاه‌چاله‌ها	۲.۴
۳۳	۱.۲.۴ قانون صفرم	۱.۲.۴
۳۳	۲.۲.۴ قانون اول	۲.۲.۴
۳۴	۳.۲.۴ قانون دوم	۳.۲.۴
۳۴	۴.۲.۴ قانون سوم	۴.۲.۴
۳۵	۳.۴ فضای فاز تعمیم یافته	۳.۴
۳۶	۴.۴ سیاه‌چاله‌های ریسر-نوردستروم	۴.۴
۳۸	۱.۴.۴ معادله‌ی تطابق حالت‌ها	۱.۴.۴
۳۸	۲.۴.۴ انرژی آزاد گیبس	۲.۴.۴
۳۹	۳.۴.۴ نماهای بحرانی	۳.۴.۴

۴۲	سیاه‌چاله‌های دورانی	۵
۴۲	۱.۵ سیاه‌چاله‌های کر	۱.۵
۴۳	۱.۱.۵ انرژی آزاد گیبس	۱.۱.۵
۴۶	۲.۵ سیاه‌چاله‌های کر-نیومن	۲.۵
۴۸	۱.۲.۵ معادله حالت	۱.۲.۵
۵۱	۲.۲.۵ پتانسیل‌های شیمیایی	۲.۲.۵
۵۲	۳.۵ سیاه‌چاله‌های گاوس-بونه	۳.۵
۵۴	۱.۳.۵ رفتار بحرانی در ۵ بعد	۱.۳.۵
۵۵	۲.۳.۵ انرژی آزاد گیبس	۲.۳.۵
۵۷	۳.۳.۵ نماهای بحرانی	۳.۳.۵

۶۰	۶ نتایج
۶۲	مراجع

چکیده

ثابت کیهان شناسی پارامتری است که ابتدا در معادلات میدان اینشتین بیان شد اما بعدها بنابر بررسی هایی که در ترمودینامیک سیاهچاله ها انجام شد دریافتند که این پارامتر را می توان به عنوان یک متغیر ترمودینامیکی در نظر گرفت. در مقایسه ای که بین سیاهچاله ها، در فضای پاد دوسپته، و سیستم های ترمودینامیکی نظیر گاز وان دروالس انجام گرفت این نتیجه به دست آمد که ثابت کیهان شناسی نقشی شبیه فشار را در قانون اول ترمودینامیک بازی می کند. کمیت همیوگ مرتبط با آن هم، حجم ترمودینامیکی می باشد (که با استفاده از تبدیل لژاندر در قانون اول به دست می آید) و جمله PdV به قانون اول اضافه می شود. علاوه بر این، نکته مهم دیگری که در این مقایسه ها بیش تر از همه مورد توجه قرار می گیرد جرم سیاهچاله است که به عنوان یک پتانسیل ترمودینامیکی، انتالپی، مطرح می شود. در این پایان نامه برخی خصوصیات سیاهچاله ها و نیز با توجه به معادله حالتی که برای سیاهچاله ها به دست آمده است، نمودارهای $P - V$ و $G - T$ و یا $G - P$ آن ها با نمودارهای گاز وان دروالس مقایسه می گردد. سیاهچاله هایی که در این جا بررسی می شوند، سیاهچاله های ریسنر-نوردستروم، کر و کر-نیومن هستند. در سیاهچاله های گائوس-بونه، معکوس ثابت جفت شدگی گائوس-بونه به عنوان فشار گائوس-بونه در نظر گرفته می شود و متناظر با آن حجم ترمودینامیکی گائوس-بونه نیز برای سیاهچاله در نظر گرفته می شود. در این سیاهچاله ثابت کیهان شناسی به عنوان یک پارامتر ثابت در نظر گرفته می شود.

کلمات کلیدی:

سیاهچاله، وان دروالس، ریسنر-نوردستروم، کر، کر-نیومن، گائوس-بونه.

فصل ۱

دیباچه

ویژگی‌های ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌ها بسیار مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ترمودینامیک سیاه‌چاله‌ها در حضور ثابت کیهان‌شناسی منفی نیز مورد توجه زیادی بوده است. مطالعه‌ی خصوصیات ترمودینامیکی سیاه‌چاله‌های پاد دو سیتته^۱ با مقاله‌ی هاوکینگ و پیچ^۲ آغاز شد [۱]، در آن مقاله وجود یک گذار فاز در فضای فاز سیاه‌چاله پاد دو سیتته شوارتزشیلد نشان داده شده است. از آن به بعد فهم ما از گذارهای فاز و پدیده‌های بحرانی سیاه‌چاله‌ها در زمینه‌های گوناگون و پیچیده‌تر، توسعه یافته است. مهم‌تر از همه کشف گذار فاز مرتبه اول برای فضا زمان سیاه‌چاله‌ی پاد دو سیتته‌ی ریسنر-نوردستروم^۳ باردار (بدون دوران) بود. این گذار فاز، رفتار بحرانی کلاسیک داشت و مشابه گذار فاز گاز-مایع برای گاز وان‌دروالس بود.

اخیرا ایده متغیر در نظر گرفتن ثابت کیهان‌شناسی بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. از دید نظریه‌ی

^۱ Anti de sitter black holes

^۲ Hawking & Page

^۳ Reissner-Nordström-AdS

نسبیت عام این متغیر بودن اندکی بعید به نظر می‌رسد، چرا که ثابت کیهان شناسی بایستی به عنوان پارامتر ثابت نظریه در نظر گرفته شود. در بررسی‌های ترمودینامیکی نیز متغیر در نظر گرفتن ثابت‌های مساله به آسانی قابل باور نیست.

حداقل ۳ دلیل وجود دارد که چرا باید در بررسی‌های ترمودینامیکی Λ را متغیر در نظر گرفت

۱. در بررسی نظریه‌های بنیادی، ثابت‌های فیزیکی از قبیل ثابت جفت شدگی یوکاوا، ثابت‌های جفت شدگی پیمان‌های، ثابت نیوتن و یا ثابت کیهان شناسی ذاتا ثابت نیستند اما به خاطر مقادیر انتظاری خلا به وجود می‌آیند، بنابراین می‌توان آن‌ها را متغیر در نظر گرفت و طبیعی است که قانون اول ترمودینامیک نیز این تغییرات را شامل شود.

۲. در عمل با حضور ثابت کیهان شناسی در قانون اول ترمودینامیک سیاه‌چاله‌ها، این قانون با رابطه اسمار سازگار نیست، مگر آنکه تغییرات Λ در قانون اول در آن لحاظ شود.

۳. وقتی تغییرات Λ را در قانون اول در نظر بگیریم جرم M سیاه‌چاله مفهوم انتالپی را می‌دهد نه انرژی درونی.

با بررسی Λ به عنوان فشار ترمودینامیکی بدیهی است که یک متغیر ترمودینامیکی همیوگ با آن را در نظر بگیریم این کمیت حجم ترمودینامیکی نام دارد، که یکی از مشخصه‌های سیاه‌چاله در فضا زمان داده شده می‌باشد.

با استفاده از یکاهای هندسی $1 = k = c = \hbar = G_n$ برای سیاه‌چاله‌ی پاد دوسیتیه مجانبی چهار بعدی رابطه‌ی فشار با ثابت کیهان شناسی به صورت زیر می‌باشد.

$$P = \frac{-1}{8\pi} \Lambda,$$

و حجم ترمودینامیکی مرتبط با سیاه‌چاله عبارت است از

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{S,Q,J}.$$

که در ساده‌ترین حالت برای یک سیاه‌چاله‌ی پاد دو سیتیه‌ی ریسنر-نوردستروم^۴ برابر است با

$$V = \frac{4}{3}\pi r_+^3,$$

در اینجا r_+ شعاع افق رویداد سیاه‌چاله در مختصات شعاعی شوارتزشیلد^۵ می‌باشد [۲] در این پایان نامه به مقایسه‌ی ترمودینامیک برخی سیاه‌چاله‌ها با گاز وان‌دروالس می‌پردازیم. ابتدا

^۴Reissner-Nordstrom-AdS

^۵Schwarzschild

اندکی این گاز و نمودارهایش را معرفی می‌کنیم، سپس برای سیاه‌چاله‌های مختلف نمودارهایی که برای گاز وان‌دروالس رسم شده است را بررسی می‌کنیم.

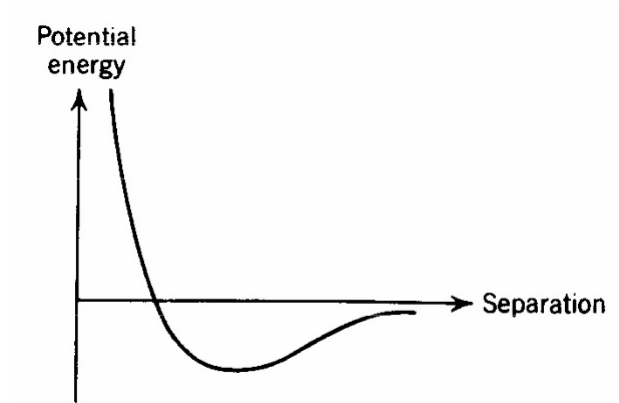
فصل ۲

گاز وان در والس

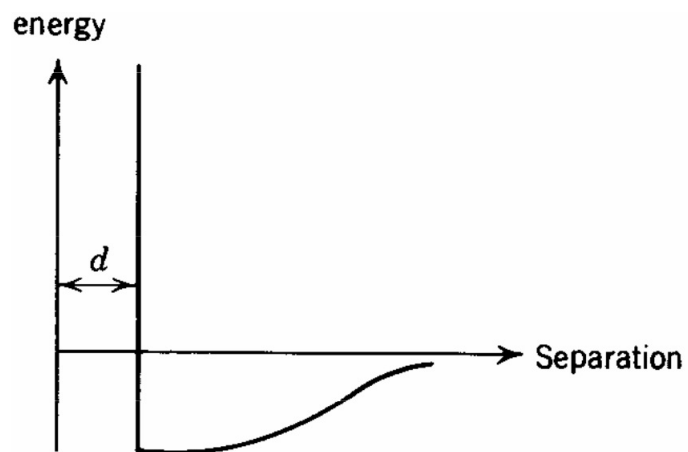
۱.۲ معرفی گاز وان در والس

وان در والس^۱ با در نظر گرفتن اثرات برهم کنش‌های مولکولی، یک راه حل کیفی ساده برای بهبود معادله حالت گازهای رقیق پیدا کرد، که بعدها به معادله حالت وان در والس معروف شد. در بیشتر مواد انرژی پتانسیل بین دو مولکول به صورت تابعی از جدایی بین مولکولی، همانند شکل (۱.۲) می‌باشد. بخش مربوط به جاذبه از قطبش الکتریکی متقابل بین دو مولکول ناشی می‌شود و بخش رانشی نیز به علت درگیر شدن ابرهای الکترونی دو مولکول، از دافعه‌ی کولنی، ایجاد می‌شود. وان در والس با در نظر گرفتن مولکول‌ها همانند یک جسم کروی سخت، مسئله را ایده‌آل سازی کرد. پس انرژی پتانسیل بین مولکولی به شکل (۲.۲) است. بنابراین هر مولکول، یک کره سخت الاستیک با قطر d که در یک میدان نیروی جاذب محصور شده است تصور می‌شود و اثرات بخش‌های دافعه و جاذبه جداگانه بررسی می‌شود.

^۱Van der Waals



شکل ۱.۲: انرژی پتانسیل بر حسب جدایی بین مولکول‌ها [۳].



شکل ۲.۲: انرژی پتانسیل ایده‌آل [۳].

یکی از اثرات کره سخت در نظر گرفتن مولکول‌ها این است که، به‌طور حتم در یک حجم مشخصی اطراف مولکول هیچ مولکول دیگری نمی‌تواند حضور داشته باشد. اگر V حجم کلی اشغال شده توسط یک ماده باشد حجم مؤثر در دسترس مولکول‌هایش کمتر از V خواهد بود. این کمتر بودن ثابتی است که به قطر مولکول و تعداد آنها بستگی دارد.

$$V_{eff} = V - b, \quad (1.2)$$

b همان ثابتی است که از مشخصه‌های ماده می‌باشد.

اگر نیروی جاذبه به حد کافی قوی باشد سیستم اصطلاحاً در حالت مرزی $-n$ جسم می‌باشد، یعنی به هیچ ظرفی برای نگه داری این سیستم نیازی نیست. بنابراین می‌توان فرض کرد جاذبه باعث کاهش فشار سیستم روی دیواره‌های خارجی می‌گردد. این کاهش فشار متناسب با تعداد جفت مولکول‌های دارای برهم‌کنش در یک لایه‌ی نزدیک به دیواره‌ها است، بدین معنا که تقریباً متناسب است با $\frac{N^2}{V^2}$ از آنجا که N و نرخ برهم‌کنش‌ها هر دو ثابت هستند، فشار تصحیح شده سیستم دو جمله را شامل می‌شود

$$P = P_{kinetic} - \frac{a}{V^2}, \quad (2.2)$$

a از دیگر مشخصه‌های سیستم است. وان‌دروالس برای یک مول از ماده فرض کرد

$$V_{eff} P_{kinetic} = RT, \quad (3.2)$$

در عبارت فوق R ثابت گازها است. بنابراین معادله حالت به‌صورت زیر می‌شود

$$(V - b)\left(P + \frac{a}{V^2}\right) = RT, \quad (4.2)$$

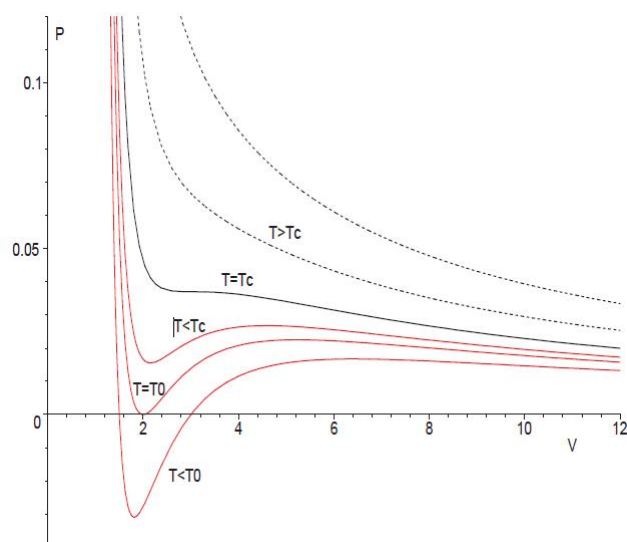
این همان معادله حالت وان‌دروالس است [۳]. حال اگر حجم ویژه گاز را $v = \frac{V}{N}$ در نظر بگیریم و k ثابت بولتزمن^۲ باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$(v - b)\left(P + \frac{a}{v^2}\right) = k_B T, \quad (5.2)$$

^۲Boltzmann constant

	$a(\text{Pa} \cdot \text{m}^6/\text{mol}^2)$	$b(\text{m}^3/\text{mol})$
H ₂	0.02476	0.02661
He	0.003456	0.02370
CO ₂	0.3639	0.04267
H ₂ O	0.5535	0.03049
O ₂	0.1378	0.03183
N ₂	0.1408	0.03913

شکل ۳.۲: ثابت‌های وان‌دروالس برای برخی گازهای ساده [۴]



شکل ۴.۲: نمودار فشار بر حسب حجم برای گاز وان‌دروالس در دماهای مختلف [۲].

بطور کلی ثابت $b > 0$ مربوط است به غیر صفر در نظر گرفتن اندازه مولکول‌ها، در حالی که $a > 0$ به اثر نیروهای جاذبه بین آنها بستگی دارد. در جدول (۳.۲) مقادیر a و b برای برخی از گازها آورده شده است. معادله‌ی (۵.۲) را می‌توان به صورت یک معادله درجه ۳ بر حسب v نوشت

$$pv^3 - (kT + bP)v^2 + av - ab = 0, \quad (6.2)$$

شکل (۴.۲) تغییرات فشار را بر حسب حجم برای مقادیر مختلف دما نشان می‌دهد. نقطه‌ی بحرانی در آن دمایی است که $P = P(v)$ یک نقطه‌ی عطف دارد.

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0, \quad (7.2)$$

این دما را دمای بحرانی گویند. اگر این مشتق‌گیری‌ها را انجام دهیم به روابط بین فشار و حجم و دمای بحرانی با ثابت‌های گاز خواهیم رسید [۲]

$$kT_c = \frac{8a}{27b}, \quad v_c = 3b, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}. \quad (8.2)$$

البته از روش دیگری هم می‌توان به همین روابط رسید، بدین صورت که از بسط حجم حول نقطه‌ی بحرانی استفاده کنیم و هم‌چنین معادله حالت گاز وان‌دروالس را برحسب v مرتب کنیم. اگر ضرائب بسط را با ضرائب معادله حالت مقایسه کنیم باز به همین روابط می‌رسیم [۳]. در شکل (۴.۲) دما از بالا به پایین کم می‌شود، دو نمودار بالایی که به صورت خط‌چین رسم شده‌اند شبیه همان نمودارهایی هستند که برای گازهای ایده‌آل به دست می‌آیند. در دماهای بالاتر از دمای بحرانی رفتار گاز وان‌دروالس هم شبیه رفتار گازهای ایده‌آل است، اما در دماهای کمتر از دمای بحرانی این گاز رفتار متفاوتی نشان می‌دهد. در این دماها یک گذار فاز گاز-مایع در سیستم وجود دارد. برای بررسی بیشتر این حالت باید به تغییرات انرژی آزاد گیبس^۳ و گذار فاز^۴ سیستم پردازیم.

۱.۱.۲ قانون تطابق حالت‌ها

با توجه به مقادیر به دست آمده P_c ، v_c ، T_c برای گاز وان‌دروالس داریم

$$\frac{P_c v_c}{kT_c} = \frac{3}{8}. \quad (9.2)$$

نکته قابل توجه در اینجا این است که عدد به دست آمده مستقل از a و b است و این یعنی برای تمام گازها حاصل این رابطه یک مقدار خواهد داشت. در فصل‌های بعد نمونه همین مورد را برای سیاه‌چاله‌ها هم خواهیم دید، جالب‌تر اینکه برای برخی سیاه‌چاله‌ها دوباره به همین مقدار $\frac{3}{8}$ خواهیم رسید. حال اگر عبارت‌های زیر را تعریف کنیم

$$\mathcal{P} = \frac{P}{P_c}, \quad \nu = \frac{v}{v_c}, \quad \tau = \frac{T}{T_c}, \quad (10.2)$$

و آن‌ها را در معادله حالت گاز وان‌دروالس جای‌گذاری نماییم آنگاه خواهیم داشت

$$8\tau = (3\nu - 1)\left(\mathcal{P} + \frac{3}{\nu^2}\right). \quad (11.2)$$

^۳Gibbs free energy

^۴phase transition

این رابطه به قانون تطابق حالت‌ها^۵ معروف است، چراکه مستقل از a ، b بوده و برای تمام گازها معتبر است.

۲.۱.۲ پتانسیل‌های ترمودینامیکی و انرژی آزاد گیبس

قانون اول ترمودینامیک با رابطه‌ی

$$dU = dQ + dW. \quad (۱۲.۲)$$

بیان می‌شود که در این رابطه dQ گرمای داده شده به سیستم است و برابر است با TdS و dW نیز کار انجام شده روی سیستم است که می‌توان آن را به صورت $-PdV$ نوشت. U انرژی درونی^۶ سیستم است و یک تابع حالت است زیرا برای هر معادله حالت سیستم یک مقدار خوش تعریف دارد. بنابراین با دادن گرما یا انجام کار بر روی سیستم مقدار آن نیز تغییر خواهد کرد. U به تنهایی کمیت مفیدی محسوب نمی‌شود اما با اضافه کردن ترکیباتی از V, P, T, S ، به صورتی که نتیجه همچنان از جنس انرژی باقی بماند می‌توان به معادلات حالت مفیدی دست پیدا کرد. سه تا از مهم‌ترین آن‌ها

$$H = U + PV, \quad F = U - TS, \quad G = U + PV - TS. \quad (۱۳.۲)$$

هستند که به ترتیب انتالپی،^۷ انرژی آزاد هلمهولتز^۸ و انرژی آزاد گیبس^۹ نام دارند فرم دیفرانسیلی این روابط به صورت زیر است

$$dH = TdS + VdP,$$

$$dF = -SdT - PdV,$$

$$dG = -SdT + VdP. \quad (۱۴.۲)$$

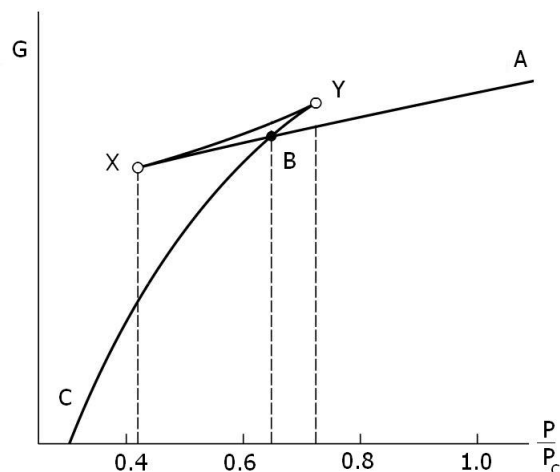
^۵law of corresponding states

^۶Internal energy

^۷Enthalpy

^۸Helmholtz free energy

^۹Gibbs free energy



شکل ۵.۲: نمودار تغییرات انرژی آزاد گیبس برحسب فشار در دمای $T = 0.9T_c$ [۵].

انرژی آزاد گیبس معادله حالت مفیدی است زیرا تنها به کمیت های T, P بستگی دارد و بررسی تغییرات این کمیت ها در آزمایشگاه راحت است، برای S و V هم داریم [۵]

$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P, \\ V &= \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T. \end{aligned} \quad (15.2)$$

برای به دست آوردن رابطه‌ی انرژی آزاد گیبس برای گاز وان دروالس کافی است از رابطه‌ی

$$dF = -SdT - PdV$$

رابطه‌ی زیر را نوشته

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad (16.2)$$

انرژی آزاد هلمهولتز را به دست آورد، با استفاده از رابطه‌ی $G = F + PV$ ، در نهایت خواهیم داشت

$$G = f(T) - RT \ln(V - b) - \frac{a}{V} + PV \quad (17.2)$$

حال با جای گذاری v از رابطه‌ی (۵.۲) می‌توان نمودارهای $G - P$ را برای دماهای مختلف رسم نمود. همان گونه که در شکل (۵.۲) مشخص است برای دماهای کمتر از T_c بازای برخی مقادیر P چند مقدار برای انرژی آزاد گیبس داریم. از آنجا که سیستم در دمای ثابت می‌باشد و انرژی آزاد گیبس می‌بایست حداقل باشد، طبیعتاً حلقه بالایی نمودار ناپایدار است (مسیر $BXYB$) و با کاهش

فشار مسیر ABC پایدار خواهد بود. نقطه‌ی B ناحیه‌ای است که دو فاز گاز-مایع هم‌زمان وجود خواهند داشت، بنابراین در مسیر $A \rightarrow B$ مایع در حالت پایدار خواهد بود و در مسیر $B \rightarrow C$ گاز به‌صورت پایدار خواهیم داشت.

مسیر BX یک حالت نیمه پایدار می‌باشد در واقع مایع در حالت فوق داغ وجود دارد، در مسیر YB هم یک حالت نیمه پایدار است اما در این ناحیه گاز فوق سرد داریم. این مسیرها نیمه پایدارند چون برای فشار و دمای تعیین شده کمترین مقدار انرژی آزاد گیبس را ندارند و فقط برای یک بازه‌ی زمانی کوتاه وجود خواهند داشت. بدیهی است مثلث BXY برای دماهای بالاتر از دمای بحرانی وجود نخواهد داشت [۵].

۳.۱.۲ قانون مساحت‌های مساوی ماکسول

رابطه‌ای که برای انرژی آزاد گیبس بین دو نقطه از نمودار برقرار است برابر است با

$$G(P_1, T) = G(P_2, T) + \int_{P_2}^{P_1} \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T dP. \quad (18.2)$$

از سومین معادله‌ی رابطه‌ی (۱۴.۲) داریم $V = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T$ حال اگر این رابطه را برای آن دو نقطه از نمودار بکار ببریم که انرژی آزاد گیبس یکسانی دارند خواهیم داشت

$$\int_{P_2}^{P_1} V dP = 0, \quad (19.2)$$

که به این رابطه قانون مساحت‌های مساوی ماکسول می‌گویند. که در شکل (۶.۲) نشان داده شده است، بین دو نقطه که هم زیستی دو فاز وجود دارد مساحت قسمت‌های تیره‌تر با هم برابر است.

۲.۲ نماهای بحرانی

بررسی سیستم‌های ترمودینامیکی در نزدیکی نقاط بحرانی‌شان بسیار مهم است، برای این منظور ایده‌ی نماهای بحرانی معرفی شد. نماهای بحرانی^{۱۰} رفتار کمیت‌های ترمودینامیکی سیستم را در نزدیکی نقاط بحرانی‌اش شرح می‌دهند. چهار نمای بحرانی هستند که اغلب برای توصیف خصوصیات سیستم‌های ترمودینامیکی PTV به کار می‌روند.

^{۱۰} critical exponents