بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

پدیده جمع- مجموعه‌ای در گروه‌های میانگین پذیر شمارا

از:

المیرا شیرازی شیخدرآبادی

استاد راهنما:

دکتر داود احمدی دستجردی

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که بزرگترین شانس زندگیم بوده اند.

تقدیر و تشکر...

خدا را شکر می‌کنم که در تمام مراحل زندگی کمکم کرد و هرگز تنهایم نگذاشت. خدا را شاکرم که در این مرحله نیز مرا مورد لطف خود قرار داد. حال وظیفه خود می‌دانم از اساتید محترم، خانواده و دوستانم تشکر کنم.
از جناب آقای دکتر فرهاد درستکار که بعنوان نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاعیه من حضور داشتند و همچنین جناب آقای دکتر حسین سهله و جناب آقای دکتر اسماعیل عزیزپور که داوری پایان نامه مرا بعهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.
از استاد عزیزم، جناب آقای دکتر داود احمدی دستجردی به پاس تمام راهنمایی‌ها و زحماتی که برایم کشیدند، سپاسگزارم. از پدر و مادر دلسوز و خواهران عزیزم که همیشه در تمام مراحل زندگی حمایتم کردند، قدردانی می‌کنم.
از دوستان عزیزم ملیحه دباغیان، سمیه جنگجو، مریم حسینی و ساناز لامعی که در این پایان نامه کمکم کردند و همچنین از دوستان خوب و مهربانم که خاطرات قشنگی را در دوران تحصیل برایم بوجود آوردند، صمیمانه متشکرم.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

۱ پیش نیازها **۳**

۱-۱ نظریه اندازه ۴

۱-۲ گروه‌های توپولوژیکی ۶

۱-۳ نظریه کاراکتر ۸

۱-۴ مقدماتی از آنالیز تابعی ۹

۱-۵ سیستم‌های دینامیکی ۱۲

۱-۵-۱ ارگودیک ۱۶

۲ قضیه جین در $\mathbb{Z}$ **۱۹**

۲-۱ جدول هیندمن در $\mathbb{Z}$ ۲۰

۲-۲ قضیه جین در $\mathbb{Z}$ ۲۵

۳ قضیه جین در گروه‌های میانگین پذیر شمارا **۳۲**

۳-۱ جدول هیندمن در نیم گروه‌ها و گروه‌ها ۳۳

۳-۲ گروه‌های میانگین پذیر ۳۶

۳-۳ قضیه جین در گروه‌های میانگین پذیر شمارا ۳۸

۳-۴ ساختارهای ظریفتر از مجموعه‌های حاصلضربی ۴۴

۳-۵ مجموعه‌های بُهر و توابع تقریباً متناوب ۵۱

۳-۶ گروه آبلی در مقایسه با گروه غیر آبلی ۶۴

منابع و مآخذ **۶۹**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۷۲**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۷۴**

چکیده:

پدیده جمع-مجموعه‌ای در گروه‌های میانگین پذیر شمارا

المیرا شیرازی شیخدرآبادی

در این پایان نامه، هدف ما تعمیم " قضیه جین " برای گروه‌های میانگین پذیر است. برای این منظور، ابتدا مفهوم چگالی بالایی باناخ را برای این گروه‌ها تعریف می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که اگر A و B مجموعه‌های با چگالی بالایی باناخ مثبت در گروه میانگین پذیر G باشند، آنگاه $A+B$ تکه‌ای سیندتیک است. علاوه براین، ثابت می‌کنیم که چنین جمع-مجموعه‌ای تکه‌ای بُهر است.

کلید واژه:

گروه میانگین پذیر، چگالی بالایی باناخ، مجموعه بُهر، تکه‌ای سیندتیک، پدیده جمع-مجموعه‌ای.

Abstract:

Sumset Phenomenon in Countable Amenable Groups
Elmira Shirazi Sheykhdarabadi

In this dissertation, we aim to extend “Jin’s Theorem” for amenable groups. To achieve this, we need to introduce the concept of upper Banach density for such groups. Then we show that whenever A and B are sets of positive upper banach density in a countable amenable group G, $A+B$ is piecewise syndetic. Moreover, we establish that such sumsets are piecewise Bohr.

Key words:
amenable group, upper Banach density, Bohr set, piecewise syndetic, sumset phenomenon.

پیشگفتار:

اگر $A \subseteq \mathbb{Z}$ دارای چگالی بالایی باناخ مثبت باشد یعنی، $\left(\limsup_{b-a\to\infty}\frac{|A\cap\{a,...,b\}|}{b-a+1} > 0\right)$ آنگاه $A-A$ مجموعه‌ای با حفره‌های کراندار می‌شود که اصطلاحاً به این گونه مجموعه‌ها، مجموعه سیندتیک می‌گوییم. با توجه به تعریفی که برای چگالی بالایی باناخ در گروه‌های میانگین پذیر در فصل ۳ ارائه می‌دهیم، می‌بینیم که در گروه‌های میانگین پذیر نیز مجموعه A با چگالی بالایی باناخ مثبت مجموعه تفاضلش[1] سیندتیک می‌شود. حال می‌خواهیم ببینیم که مجموعه‌های با چگالی بالایی باناخ مثبت A و B چه خاصیتی را به جمع-مجموعه[2] $A+B$ می‌دهند.

جین[3] ابتدا در [۲۰] از راه آنالیز غیر استاندارد ثابت کرد که اگر دو مجموعه از اعداد صحیح با چگالی بالایی باناخ مثبت باشند آنگاه جمع-مجموعه آنها تکه‌ای سیندتیک می‌شود یعنی، مجموعه‌ای که شامل اشتراک مجموعه سیندتیک و مجموعه با بازه‌های به طول دلخواه است که مجموعه با بازه‌های به طول دلخواه را مجموعه ضخیم می‌نامیم. جین و کسلر[4] هم در [۲۲] ثابت کردند که اگر $A, B \subseteq \mathbb{Z}^d$ و دارای چگالی بالایی باناخ مثبت باشند آنگاه $A+B$ تکه‌ای سیندتیک است. سپس جین این مفهوم را به $\bigoplus_{d=1}^{\infty}\mathbb{Z}$ تعمیم داد. حال می‌خواهیم ببینیم که اگر G گروه میانگین پذیر باشد و $A, B \subseteq G$ دارای چگالی بالایی باناخ مثبت باشند آنگاه $A+B$ تکه‌ای سیندتیک است.

این پایان نامه بر اساس [۴] است و شامل ۳ فصل می‌باشد. در فصل اول به تعاریف و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی موردنیاز است. فصل دوم شامل دو بخش است که در بخش اول قسمتی از جدول هیندمن در اعداد صحیح را بیان می‌کنیم و در بخش دوم اثبات جدیدی برای قضیه جین ارائه می‌دهیم. فصل سوم شامل شش بخش است که در بخش اول، قسمتهایی از جدول هیندمن که در فصل دوم برای اعداد صحیح گفته شده است را به نیم گروه‌ها تعمیم می‌دهیم که واضح است برای هر گروه نیز برقرار می‌شود. در بخش دوم، با تعریف دنباله فلنر، گروه میانگین پذیر را تعریف می‌کنیم. در بخش سوم، قضیه جین را برای گروه‌های میانگین پذیر بیان می‌کنیم. در بخش چهارم، ساختارهایی برای حاصلضرب دو مجموعه از گروه میانگین پذیر ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم که مجموعه حاصلضربی که از قضیه جین بدست می‌آید چه ساختاری می‌تواند داشته باشد. در بخش پنجم، فشرده سازی بُهر، مجموعه بُهر، توپولوژی بُهر، مجموعه تکه‌ای بُهر و... را تعریف می‌کنیم و صورت جدیدی از قضیه جین را بیان می‌کنیم. یعنی، نشان می‌دهیم که اگر G گروه میانگین پذیر باشد و $A, B \subseteq G$ دارای چگالی

[1] difference Set [2] sumset [3] Jin [4] Keisler

بالایی باناخ مثبت باشند آنگاه $A+B$ تکه‌ای بُهر است. در بخش ششم نیز خواهیم دید که عکس قضیه بخش پنج فقط برای گروه‌های آبلی برقرار است.

لازم به ذکر است که در این پایان نامه همه تعریف‌ها، لم‌ها، قضایا، ملاحظه‌ها و نتایج، شماره متوالی دارند. بعنوان مثال، در بخش ۳ از فصل اول، چهارمین عنوان دارای شماره ۱-۳-۴ می‌باشد.

فصل ۱

پیش نیازها

در این فصل از بیان تعاریف و قضایای مقدماتی توپولوژی صرفنظر می‌کنیم و به بیان مفاهیمی که برای درک بهتر فصل‌های دیگر مورد نیاز است می‌پردازیم.

۱-۱ نظریه اندازه

مفاهیم این بخش از [۲۴] و [۲۶] گرفته شده است.

تعریف ۱-۱-۱. گردایه $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های X را *نیم-جبر*[۱] نامیم اگر ۳ شرط زیر برقرار باشد

۱. $\phi \in \mathcal{C}$.

۲. اگر $A, B \in \mathcal{C}$، آنگاه $A \cap B \in \mathcal{C}$.

۳. اگر $A \in \mathcal{C}$، آنگاه $X \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ که هر $E_i \in \mathcal{C}$ و E_iها دوبدو از هم جدا هستند.

تعریف ۱-۱-۲. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. جبر[۲] از مجموعه‌ها روی X گردایه غیر تهی $\mathcal{B}$ است که تحت اجتماع متناهی و متمم بسته باشد. یعنی، در دو شرط زیر صدق کند

۱. اگر $E_1, ..., E_n \in \mathcal{B}$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{B}$.

۲. اگر $E \in \mathcal{B}$ آنگاه $X \setminus E \in \mathcal{B}$.

یک σ-جبر[۳] یک جبر است اگر تحت اجتماع شمارا بسته باشد.

تعریف ۱-۱-۳. اشتراک هر خانواده از σ-جبرهای روی X یک σ-جبر است. از این نتیجه می‌شود که اگر $\mathcal{E}$ یک زیرمجموعه $P(X)$ باشد، اشتراک همه σ-جبرهای شامل $\mathcal{E}$ را که کوچکترین σ-جبر شامل $\mathcal{E}$ است، σ-جبر *تولید شده توسط* $\mathcal{E}$ گوییم.

تعریف ۱-۱-۴. فرض کنیم X یک مجموعه و $\mathcal{B}$ یک σ-جبر باشد. یک *اندازه*[۴] روی X یک تابع $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ است بطوریکه در دو شرط زیر صدق کند

---

[۱] semi-Algebra [۲] algebra [۳] σ-algebra [۴] measure

۱. $\mu(\phi) = 0$.

۲. اگر $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک دنباله از مجموعه‌های مجزا روی $\mathcal{B}$ باشد، آنگاه
$$\mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

در تعریف اندازه، خاصیت (۲) راجمعی *شمارا*[1] گویند و اگر فقط داشته باشیم
$$\mu\left(\cup_{j=1}^{n} E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(E_j)$$

اندازه μ جمعی *متناهی*[2] نامیده می‌شود.

زوج $(X, \mathcal{B})$ *فضای اندازه پذیر* و عناصر $\mathcal{B}$ مجموعه‌های اندازه پذیر نامیده می‌شوند. اگر μ یک اندازه روی $\mathcal{B}$ باشد، آنگاه $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک *فضای اندازه* نامیده می‌شود. اگر $\mu(X) = 1$ آنگاه به $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *فضای احتمال*[3] می‌گوییم.

فرض کنید $(X, \mathcal{B})$ یک فضای اندازه باشد، مجموعه $E \in \mathcal{B}$ با شرط $\mu(E) = 0$ *مجموعه پوچ* نامیده می‌شود. اگر خاصیتی در مورد عنصر $x \in X$ همواره برقرار باشد مگر برای xهای در یک مجموعه پوچ، می‌گوییم این عبارت *تقریباً همه جا*[4] برقرار است که با $a.e$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۵. اگر X یک فضای متری یا بطور کلی یک فضای توپولوژیکی باشد، σ-جبر تولید شده توسط خانواده بازهای X (یا بطور هم ارز، خانواده بسته‌های X) σ-جبر بورل[5] روی X نامیده می‌شود و با $\mathcal{B}(X)$ نمایش داده می‌شود. عناصر آنرا *مجموعه‌های بورل* نامند.

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنیم $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. تابع $f : X \to R$ اندازه پذیر است اگر $f^{-1}(D) \in \mathcal{B}$ که $D \in \mathcal{B}(R)$ یا بطور معادل اگر برای هر $c \in \mathbb{R}$، $f^{-1}(c, \infty) \in \mathcal{B}$.

تابع $f : X \to \mathbb{C}$ اندازه پذیر است اگر هم قسمت حقیقی و هم قسمت موهومی آن اندازه پذیر باشند. اگر $E \subset X$، تابع*مشخصه* $\mathcal{X}_E$[6] از E بصورت زیر تعریف می‌شود

[1]countably additive [2]finitely additive [3]probability space [4]almost everywhere [5]borel σ-algebra
[6]characteristic function

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} ۱ & x \in E \\ ۰ & x \notin E. \end{cases}$$

تعریف ۱-۱-۷. اگر f یک تابع اندازه پذیر روی X باشد، نرم pام f را بصورت

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

تعریف می‌کنیم و فضای $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ را بصورت

$$L^p(X, \mathcal{B}, \mu) = \{f | f : X \to \mathbb{C} : \|f\|_p < \infty \text{ و اندازه پذیر است } f\}$$

تعریف می‌کنیم.

فضای توابع اندازه پذیر و کراندار روی X را با $L^\infty(X)$ نشان می‌دهیم و این فضا در $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ چگال است. نرم تابع $f \in L^\infty(X)$ برابر است با

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq ۰ : \mu(\{x : |f(x)| > M\}) = ۰\}.$$

ملاحظه ۱-۱-۸. *اگر* $\mu(X) < \infty$ *و* $۱ \leq p < q$ *آنگاه* $L^q(X, \mathcal{B}, \mu) \subset L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.

۱-۲ گروه‌های توپولوژیکی

مطالب این بخش از [۱۹] ، [۱۷] و [۱۴] گرفته شده است.

تعریف ۱-۲-۱. اگر مجموعه S با عمل دوتایی $\cdot$ بسته و شرکت پذیر باشد آنگاه $(S, \cdot)$ را *نیم‌گروه* می‌نامیم.

تعریف ۱-۲-۲. اگر G گروه و همچنین فضای توپولوژیکی باشد آنگاه گروه G را *گروه توپولوژیکی* گوییم اگر توابع

$$G \times G \to G \quad , \quad (x, y) \mapsto xy \quad (x, y \in G)$$

و

$$G \to G \quad , \qquad x \mapsto x^{-1} \qquad (x, y \in G)$$

پیوسته باشند.

گروه توپولوژیکی G را گسسته گویند اگر توپولوژی روی G گسسته باشد.

تعریف ۱-۲-۳. فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی باشد و $1 \leq p < \infty$. فضای $L^p(G)$ را بصورت

$$L^p(G) = \{f | f : X \to \mathbb{C} : \int_G |f|^p d\mu < \infty \text{ و } f \text{ اندازه پذیر است}\}$$

تعریف می‌کنیم. نرم تابع f در فضای $L^p(G)$ برابر است با

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

فضای توابع اندازه پذیر و کراندار روی G را با $L^\infty(G)$ و نرم تابع $f \in L^\infty(G)$ را با $\|f\|_\infty$ نشان می‌دهیم. به $\|f\|_\infty$ سوپریمم ذاتی f می‌گویند و بصورت

$$\|f\|_\infty = ess \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

نوشته می‌شود و سوپریمم ذاتی بصورت زیر تعریف می‌شود

$$ess \sup f = \sup\{N : \mu\{f > N\} > 0\}.$$

یکی از اندازه‌هایی که روی فضاهای توپولوژیکی فشرده تعریف می‌شود اندازه هار است. برای تعریف این اندازه ابتدا تعریف اندازه منظم را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱-۲-۴. اندازه m روی σ-جبر بورل $\mathcal{B}(X)$ از فضا توپولوژیکی فشرده X *منظم*[1] است، اگر برای هر $\epsilon > 0$ و $E \in \mathcal{B}(X)$ مجموعه فشرده M و مجموعه باز U وجود داشته باشد بقسمیکه $M \subset E \subset U$ و $m(U \setminus M) < \epsilon$.

[1] regular

در قضیه زیر اندازه هار را برای گروه‌های توپولوژیکی تعریف می‌کنیم. برای اثبات این قضیه به [۲۷] رجوع شود.

قضیه ۱-۲-۵ (قضیه هار[۱]). *فرض کنید G یک گروه توپولوژیکی فشرده باشد. اندازه احتمال m روی σ-جبر $\mathcal{B}(G)$ از زیرمجموعه‌های بورل G وجود دارد بطوریکه به ازای هر $x \in G$ و $E \in \mathcal{B}(G)$، $m(xE) = m(E)$ و m اندازه منظم است. فقط یک اندازه احتمال روی $(G, \mathcal{B}(G))$ وجود دارد که تحت دوران پایاست.*

اندازه یکتایی را که در قضیه هار گفته شده است *اندازه هار* می‌نامیم.

تعریف ۱-۲-۶. فرض کنیم G یک گروه باشد. هومورفیسم از G به G را *اندومرفیسم*[۲] می‌نامیم و اگر این هومورفیسم یک به یک و پوشا باشد آنرا *آتومرفیسم*[۳] می‌گوییم.

۱-۳ نظریه کاراکتر

حال به بیان نظریه کاراکترها می‌پردازیم. با استفاده از کاراکتر در فصل سوم مجموعه‌های بُهر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنیم G یک گروه آبلی فشرده موضعی باشد. خانواده همه هومورفیسم‌های پیوسته G بتوی دایره واحد $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\}$ را با $\widehat{G}$ نشان می‌دهیم و به آن *گروه دوگان* می‌گوییم. اعضای $\widehat{G}$ را *کاراکتر*[۴]های G می‌نامیم.

مثال ۱-۳-۲. اگر $G = K$ آنگاه اعضای $\widehat{G}$ مجموعه همه توابع $z \to z^n$ که $n \in \mathbb{Z}$ است. حال اگر گروه چنبره $n-$بعدی باشد. یعنی، $G = K^n$ ، اعضای $\widehat{K^n}$ برای $(p_۱, ..., p_n) \in \mathbb{Z}^n$ بصورت زیر است

$$\gamma(z_۱, ...z_n) = z_۱^{p_۱} \cdot z_۲^{p_۲} \cdot ... \cdot z_n^{p_n} \qquad (\gamma \in K^n).$$

از لم‌های زیر در فصل‌های آینده استفاده می‌کنیم.

لم ۱-۳-۳. *گروه G گسسته است اگر وتنها اگر $\widehat{G}$ گروه فشرده باشد.*

برهان. به قضیه ۴.۴، [۱۷] رجوع شود. □

[۱] Haar [۲] endomorphism [۳] automorphism [۴] character

لم ۱-۳-۴. *گروه G فشرده است اگر وتنها اگر $\widehat{G}$ گروه گسسته باشد.*

برهان. به قضیه ۴.۳۵، [۱۷] رجوع شود. $\square$

۱-۴ مقدماتی از آنالیز تابعی

در این بخش خلاصه‌ای از فضای باناخ، ضرب داخلی و فضای هیلبرت را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۴-۱. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد. تابع $\rho : X \to \mathbb{R}$ را یک *نیم نرم* گویند هرگاه،

۱. به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y).$$

۲. به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر α،

$$\rho(\alpha x) \leq |\alpha| \rho(x).$$

با استفاده از (۲) واضح است که $\rho(\circ) = \circ$. اگر علاوه بر این از $\rho(x) = \circ$ نتیجه شود که $x = \circ$ آنگاه ρ را یک نرم روی X نامند.

اگر $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد، X را یک *فضای نرمدار* می‌نامیم.

اگر X یک فضای برداری نرمدار باشد، تابع $d(x,y) = \|x-y\|$ یک متر روی X تعریف می‌کند. زوج (X,d) یک فضای متری خواهد بود که متر d را *متر تولید شده توسط نرم* گوییم. توپولوژی تعریف شده توسط این متر روی X *توپولوژی نرم* روی X نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۴-۲. فرض کنید X یک فضای برداری و $\|\cdot\|$ یک نرم روی X باشد. اگر X با متر تولید شده توسط نرم یک فضای تام باشد آنگاه (X,d) را یک *فضای باناخ* می‌گوییم.

منظور از فضای تام این است که هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

توجه ۱-۴-۳. فضای برداری نرمدار X تام است اگر وتنها اگر هر سری همگرای مطلق (اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد که $\sum_{1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$) یک سری همگرا در X باشد.

تعریف ۱-۴-۴. فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی[1] گوییم هرگاه به هر دو بردار x و y در H عدد مختلط $\langle x, y\rangle$ نسبت داده شود بطوریکه به ازای هر $x, y, z \in H$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

۲. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

۳. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle y, x\rangle$.

۴. $\langle x, x\rangle \geq 0$.

۵. $\langle x, x\rangle = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

اگر $\langle \cdot, \cdot\rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری H باشد، زوج $(H, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی مختلط و عدد مختلط $\langle x, y\rangle$ را برای هر $x, y \in H$ *ضرب داخلی* x و y می‌نامیم.

در فضای ضرب داخلی H نرم x با نماد $\|x\|$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle.$$

که $\langle x, x\rangle$ همه خواص یک نرم را دارد.

قضیه ۱-۴-۵ (*نامساوی کوشی شوارتز*). *برای هر x و y در فضای برداری H داریم*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

تعریف ۱-۴-۶. اگر $\langle \cdot, \cdot\rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط H باشد آنگاه با تعریف $\|x\| = \langle x, x\rangle$ برای هر $x \in H$، H یک فضای خطی نرمدار است، که این نرم را *نرم تولید شده توسط ضرب داخلی* گویند.

[1] inner product space

تعریف ۱-۴-۷. فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ را یک *فضای هیلبرت* گویند هرگاه $\mathcal{H}$ با نرم تولید شده توسط ضرب داخلی یک فضای کامل باشد، یا به عبارتی فضای باناخی است که در آن نرم ضرب داخلی می‌باشد. یعنی، $\mathcal{H}$ فضای باناخ است و تابع $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ وجود دارد بطوریکه خطی است و به ازای هر $f, g \in \mathcal{H}$

- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.
- $\langle f, f \rangle \geq 0$.
- $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$.

نرم روی $\mathcal{H}$ است.

فضای باناخ $L^p(X, \beta, m)$ فضای هیلبرت است اگر و تنها اگر $p = 2$. ضرب داخلی در $L^2(X, \beta, m)$ بصورت

$$|\langle f, g \rangle| = \int f\overline{g} dm$$

تعریف می‌شود.

در هر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نامساوی کوشی شوارتز صدق می‌کند

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\| \qquad (\forall f, g \in \mathcal{H}).$$

ملاحظه ۱-۴-۸. *اگر V زیرفضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد آنگاه*

$$V^{\perp} = \{h \in \mathcal{H} : \langle v, h \rangle = 0, \forall v \in V\}$$

زیرفضای بسته از $\mathcal{H}$ است و $\mathcal{H} = V \oplus V^{\perp}$. یعنی، برای هر $f \in \mathcal{H}$، $f_1 \in V$ و $f_2 \in V^{\perp}$ وجود دارند که $f = f_1 + f_2$ و $V \cap V^{\perp} = \phi$.

تعریف ۱-۴-۹. عملگر خطی $P : \mathcal{H} \to V$ که بصورت $P(f) = f_1$ تعریف می‌شود را تصویر متعامد[1] از $\mathcal{H}$ بتوی V می‌نامیم.

[1] orthogonal projection

ملاحظه ۱-۴-۱۰. *$P(f)$ تنها عضو از V است که در زیر صدق می‌کند*

$$\|f - P(f)\| = \inf\{\|f - v\| : v \in V\}.$$

از طرفی داریم $P|V = id$ و

$$\langle Pf, g\rangle = \langle f, Pg\rangle \qquad (\forall f, g \in \mathcal{H}).$$

تعریف ۱-۴-۱۱. ایزومرفیسم از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ به خودش را عملگر یکانی[۱] می‌نامیم.

قضیه ۱-۴-۱۲. *اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و عملگرهای $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ و $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ یکانی باشند. در این صورت*

۱. *عملگر U ایزومتری است. بنابراین،* $\|Ux\| = \|x\|$.

۲. $\|U\| = 1$.

۳. *عملگر U^{-1} نیز یکانی است.*

۴. *عملگر UV یکانی است.*

۱-۵ سیستم‌های دینامیکی

در این بخش برخی از ویژگی‌های تبدیل $T : X \to X$ روی مجموعه X را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطالب این بخش از [۲۷] و [۲۳] گرفته شده است. در ابتدا سیستمهای دینامیکی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱-۵-۱. اگر X یک مجموعه و T تبدیل از X به X باشد آنگاه زوج (X, T) را *سیستم دینامیکی*[۲] می‌نامیم.

تعریف کلی‌تری برای سیستم دینامیکی وجود دارد که به صورت زیر است. در ابتدا به تعریف عمل گروه روی مجموعه می‌پردازیم سپس سیستم دینامیکی که از عمل گروه بدست می‌آید ارائه می‌دهیم.

[۱]unitary operator [۲]dynamical system

تعریف ۱-۵-۲. عمل[1] گروه G روی مجموعه X یک نگاشت $T : G \times X \to X$ است بطوریکه برای هر $h, g \in G$ و $x \in X$ داشته باشیم

$$T(g, T(h, x)) = T(gh, x).$$

در این صورت خانواده $\{T_g\}_{g \in G}$ از توابع ایجاد می‌شود که برای هر $g \in G$

$$\begin{aligned} T_g : X &\to X \\ x &\mapsto T(g, x). \end{aligned}$$

در تعریف فوق G را *گروه عمل کننده* یا *اثر کننده روی* X نامند.

اگر G گروه عمل کننده روی مجموعه X باشد، در این صورت زوج $(X, \{T_g\}_{g \in G})$ را *سیستم دینامیکی* می‌نامیم.

توجه ۱-۵-۳. مجموعه X در یک سیستم دینامیکی می‌تواند یک فضای اندازه یا یک فضای توپولوژیکی یا یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت، به ازای هر $g \in G$، T_g بترتیب اندازه پذیر یا پیوسته یا مشتق پذیر است.

تعریف ۱-۵-۴. فرض کنید (X_1, β_1, m_1) و (X_2, β_2, m_2) فضاهای احتمال باشند.

۱. تبدیل $T : X_1 \to X_2$ اندازه پذیر است اگر $T^{-1}(\beta_2) \subset \beta_1$. یعنی، $B_2 \in \beta_2$ آنگاه $T^{-1}B_2 \in \beta_1$.

۲. تبدیل $T : X_1 \to X_2$ تبدیل حافظ اندازه[2] است اگر T اندازه پذیر باشد و

$$m_1(T^{-1}(B_2)) = m_2(B_2) \qquad (\forall B_2 \in \beta_2).$$

۳. تبدیل $T : X_1 \to X_2$ را تبدیل حافظ اندازه معکوس پذیر[3] می‌نامیم اگر T حافظ اندازه، دو سویی و T^{-1} هم حافظ اندازه باشد.

[1] action [2] measure preserving Transformation [3] invertible measure preserving transformation