دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

حل مسائل کنترل بهینه غیر خطی بازخورد با استفاده از معادلات شمول و نظریه اندازه

استاد راهنما

دکتر محمد هادی فراهی

استاد مشاور

دکتر علی وحیدیان کامیاد

نگارش

محمد کامیابی نژاد

شهریور ۱۳۹۰

اظهارنامه

اینجانب محمد کامیابی نژاد دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان نامه حل مسائل کنترل بهینه غیر خطی بازخورد با استفاده از معادلات شمول ونظریه اندازه تحت راهنمایی جناب آقای دکتر فراهی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه فردوسی مشهد » و یا « Ferdowsi University of Mashhad » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افر ادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان ن امه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ امضای دانشجو

1390/06/14

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوي این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه هاي رایانه اي، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه فردوسي مشهد مي باشد . این مطلب باید به نحو مقتضي در تولیدات علمي مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمي‌باشد.

- متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده وجود داشته باشد.

بسمه تعالی

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: حل مسائل کنترل بهینه غیر خطی بازخورد با استفاده از معادلات شمول و نظریه اندازه

نام نویسنده: محمد کامیابی نژاد

نام استاد(ان) راهنما: دکتر محمد هادی فراهی

نام استاد(ان) مشاور: دکتر علی وحیدیان کامیاد

دانشکده : علوم ریاضی	گروه:ریاضی کاربردی	رشته تحصیلی: ریاضی کاربردی
تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۰۱/۲۱		تاریخ دفاع: ۱۳۹۰/۰۶/۰۶
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد ●	○ دکتری	تعداد صفحات:73

چکیده رساله/پایان نامه :

در این پایان نامه ابتدا روش نشاندن بر مبنای تئوری اندازه، که یک روش کارا برای حل مسائل کنترل بهینه می باشد، به طور مختصر بیان شده. سپس مسائل کنترل بهینه غیر خطی بازخورد مورد بررسی قرار گرفته است. به این صورت که ابتدا مساله کنترل بهینه غیر خطی بازخورد به یک مساله بهینه سازی روی معادلات شمول تبدیل می گردد. سپس با معرفی یک متغیر کنترل مصنوعی مساله معادلات شمول به یک مساله کنترل بهینه خطی بر حسب متغیر کنترل تبدیل شده و در نهایت با روش نشاندن مساله مذکور با یک مساله برنامه ریزی خطی تقریب زده می شود. سپس با استفاده از جواب مساله برنامه ریزی خطی کنترل مصنوعی تقریبا بهینه و در ادامه مسیر وکنترل اولیه تقریبا بهینه به دست می آیند.

کلید واژه:

1.کنترل بهینه غیر خطی بازخورد

2.معادلات شمول بهینه

3.تئوری اندازه

4.برنامه ریزی خطی

5.

امضای استاد راهنما:

تاریخ:

بسمه تعالی

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: حل مسائل کنترل بهینه غیر خطی بازخورد با استفاده از معادلات شمول و نظریه اندازه

نام نویسنده: محمد کامیابی نژاد

نام استاد(ان) راهنما: دکتر محمد هادی فراهی

نام استاد(ان) مشاور: دکتر علی وحیدیان کامیاد

دانشکده : علوم ریاضی	گروه:ریاضی کاربردی	رشته تحصیلی: ریاضی کاربردی
تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۰۱/۲۱		تاریخ دفاع: ۱۳۹۰/۰۶/۰۶
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد ●	دکتری ○	تعداد صفحات:73

چکیده رساله/پایان نامه :

در این پایان نامه ابتدا روش نشاندن بر مبنای تئوری اندازه، که یک روش کارا برای حل مسائل کنترل بهینه می باشد، به طور مختصر بیان شده. سپس مسائل کنترل بهینه غیر خطی بازخورد مورد بررسی قرار گرفته است. به این صورت که ابتدا مساله کنترل بهینه غیر خطی بازخورد به یک مساله بهینه سازی روی معادلات شمول تبدیل می گردد. سپس با معرفی یک متغیر کنترل مصنوعی مساله معادلات شمول به یک مساله کنترل بهینه خطی بر حسب متغیر کنترل تبدیل شده و در نهایت با روش نشاندن مساله مذکور با یک مساله برنامه ریزی خطی تقریب زده می شود. سپس با استفاده از جواب مساله برنامه ریزی خطی کنترل مصنوعی تقریبا بهینه و در ادامه مسیر وکنترل اولیه تقریبا بهینه به دست می آیند.

کلید واژه: 1.کنترل بهینه غیر خطی بازخورد 2.معادلات شمول بهینه 3.تئوری اندازه 4.برنامه ریزی خطی 5.	امضای استاد راهنما: تاریخ:

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ مقدمه ای بر مسائل کنترل بهینه

امروزه مسائل کنترل بهینه[1] در زمینه های مختلف علوم مانند مهندسی، فیزیک، پزشکی و ... کاربردهای فراوانی پیدا کرده است. ازهمین رو در چند دهه اخیر تلاش های زیادی در جهت پیدا کردن روش های مناسب برای حل مسائل کنترل بهینه غیر خطی صورت گرفته است.

بطور کلی یک مساله کنترل بهینه کلاسیک بصورت زیر است:

$$\min I = \int_J f(t, x(t), u(t))dt$$

$$s.t.$$

$$\dot{x} = g(t, x(t), u(t)) \tag{۱.۱}$$

$$x(t_a) = x_a, x(t_b) = x_b$$

[1] Optimal control

$$t \in [t_a, t_b]$$

که در آن $J = [t_a, t_b]$ و

$$x : t \in J \to x(t) \in A$$

تابعی مطلقا پیوسته و به عنوان تابع مسیر[۲] است و $A \subset \mathbb{R}^n$ فشرده می باشد، همچنین

$$u : t \in J \to u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$$

تابع قطعه ای پیوسته یا اندازه پذیر و به عنوان تابع کنترل[۳] است.

از روش های کلاسیکی که برای حل مسائل کنترل بهینه مطرح است، می توان به روش استفاده از شرایط اولر و لاگرانژ[۴] و نیز روش استفاده از اصل بیشینه سازی پونتریاگین[۵] ([۱۴] را ملاحظه کنید) اشاره کرد.

یکی از روش هایی که در سه دهه اخیر برای حل مسائل کنترل بهینه ابداع شده است روش نشاندن بر مبنای تئوری اندازه است. این روش بر اساس ایده ای از یانگ[۶] بنا شده است که مبنای آن تبدیل مساله کنترل بهینه به مساله جدید در فضای اندازه می باشد.

نمونه ای از کاربرد این ایده در سال ۱۹۶۷ به وسیله گیلاهوری[۷] و رزنبلوم[۸] ارائه گردید. درسال ۱۹۷۷ برای اولین بار روش نشاندن به وسیله ویلسون[۹] و روبیو[۱۰] برای حل یک مساله کنترل به کار گرفته شد. سپس این روش به صورت نظری توسط روبیو در سال ۱۹۸۶ در [۱۰] بیان شد. (اعلام پور [۱۱]) این

---

[۲] Trajectory

[۳] Control function

[۴] Euler-Lagrange

[۵] Pontryagin maximum principle

[۶] Young

[۷] Ghouila-Houri

[۸] Rosenbloom

[۹] Wilson

[۱۰] Rubio

روش به این دلیل که کارایی بسیار زیادی دارد در دو دهه اخیر بسیار مورد توجه کارشناسان مسائل کنترل بهینه قرار گرفته است.
در توسعه این روش نمی توان از نقش عمده وحیدیان، فراهی و فخارزاده [۱۶] چشم پوشی کرد.
در سال ۱۹۹۱ و ۱۹۹۲ وحیدیان و دیگران در [۸] و [۹] این روش را برای حل مسائل کنترل بهینه سیستم های تحت معادله حرارت بکار گرفتند.
همچنین در سال ۱۹۹۶ فراهی و دیگران در [۳] و [۴] این روش را در حل مسائل کنترل بهینه که با معادلات موج خطی و غیر خطی همراه می شوند، استفاده نمودند. و در سال ۱۹۹۷ نیز به بررسی خطاهای محاسباتی در کاربرد این روش پرداخته شد([۵] را ملاحظه کنید).

۲.۱ مقدمه ای بر مسائل کنترل بهینه بازخورد

یک رده مهم از مسائل کنترل بهینه، مسائل کنترل بهینه بازخورد[۱۱] می باشند که کاربردهای فراوانی به ویژه در مهندسی دارند.
در مسائل کنترل بهینه بازخورد متغیر کنترل علاوه بر زمان به مسیر نیز وابسته است. و این باعث می شود که بعضی از روش هایی که در حل مسائل کنترل بهینه حلقه باز بکار می روند برای مسائل کنترل بهینه بازخورد مناسب نباشند یا مستلزم ایجاد تغییراتی هستند.
مسائل کنترل بهینه بازخورد در حالت کلی بصورت زیر می باشند:

$$\min I = \int_J f(t, x(t), u(t, x(t)))dt$$

$$s.t.$$

$$\dot{x} = g(t, x(t), u(t, x(t))) \tag{۲.۱}$$

$$x(t_a) = x_a, x(t_b) = x_b$$

$$t \in [t_a, t_b]$$

[۱۱] Feedback optimal control problems

که در آن $J = [t_a, t_b]$ و

$$x : t \in J \to x(t) \in A \subset \mathbb{R}^n$$

تابعی مطلقا پیوسته و

$$u : (t, x) \in J \times A \to u(t, x) \in U \subset \mathbb{R}^m$$

تابع قطعه ای پیوسته یا اندازه پذیر است.
روش های زیادی در سال های اخیر برای حل مسائل کنترل بهینه بازخورد ارائه شده است، که از جمله آن می توان به روش برنامه ریزی پویا که بائو ژو[۱۲] و تائو تائو[۱۳] [۱] مطرح کرده اند، و یا روشی که هی[۱۴] و دیگران [۶] بر مبنای الگوریتم شبکه های عصبی بیان کرده اند، نام برد.
سیمن[۱۵] و بنکس[۱۶] نیز روشی به نام دنباله ی تقریبی از معادلات ریکاتی[۱۷] (ASRE) برای حل مسائل کنترل بهینه غیر خطی بازخورد مطرح کرده اند [۲]. و این روش را برای حل مساله کنترل هواپیمای جنگنده F8 بکار گرفته اند.
اما روشی که ما در فصل های ۳و۴ این پایان نامه به آن پرداختیم، روشی است که برای اولین بار وحیدیان، کیانپور و فراهی در [۷] برای مسائل کنترل بهینه غیر خطی مطرح کرده اند.
اساس کار در این روش بر این است که مساله کنترل بهینه غیر خطی بازخورد را به یک مساله به فرم معادلات شمول بهینه[۱۸] تبدیل می کنیم سپس با تعریف یک متغیر کنترلی جدید مساله معادلات شمول بهینه را به یک مساله کنترل بهینه خطی بر حسب متغیر کنترل(LCV)[۱۹] تبدیل می شود.

---

[۱۲] Bao-zho

[۱۳] Tao-tao

[۱۴] He

[۱۵] Cimen

[۱۶] Banks

[۱۷] Approximating sequence of Riccati equations

[۱۸] Optimal inclusion eqations problem

[۱۹] Linear of control variable

۳.۱ مروری بر مطالب پایان نامه

درفصل ۲ این پایان نامه به دلیل کارایی بسیار بالایی که روش نشاندن در حل مسائل کنترل بهینه دارد و با توجه به این که در ادامه مطلب از آن استفاده خواهیم نمود، این روش را به اختصار بیان می کنیم. در انتهای فصل نیز یک مساله کنترل بهینه را که با این روش حل نموده ایم، بیان می کنیم.
در فصل ۳ بر مبنای روشی که در [۷] آمده است، به بررسی حل مسائل کنترل بهینه غیر خطی بازخورد می پرازیم.
در فصل ۴ نیز چند مثال از مسائل کنترل بهینه غیر خطی بازخورد که با روش فصل سوم حل شده است، ارائه شده تا کارایی این روش مشاهده شود.

فصل ۲

روش نشاندن بر مبنای تئوری اندازه برای حل مسائل کنترل بهینه

۱.۲ مقدمه

یکی از روش هایی که در دو دهه اخیر برای حل مسائل کنترل بهینه ابداع شده است روش نشاندن بر مبنای تئوری اندازه است که به اختصار به آن روش نشاندن می گوئیم و در این فصل به طور خلاصه این روش را بیان خواهیم کرد و در پایان نیز یک مساله کنترل بهینه را به عنوان مثال به این روش حل خواهیم نمود.

در این روش ابتدا تابع هدف و قیود مساله را به صورت انتگرالی می نویسیم . سپس تابعی های خاص بر مبنای توابع کنترل و مسیر تعریف می کنیم. بر اساس قضیه نمایش ریز[۱] اندازه های یکتایی یافت می شوند که این تابعی ها را می توان با آنها نمایش داد به گونه ای که یک تناظر یک به یک بین زوجهای قابل قبول کنترل و مسیر و اندازه های رادون مثبت که روی فضایی که توسط قضیه نمایش ریز معرفی می شود وجود دارد. در این جا فضای جواب مساله کلاسیک در فضای اندازه نشانده می شود و مساله

[۱] Riez representation theorem

تبدیل به یک مساله برنامه ریزی غیر خطی می شود. در مرحله بعد مساله را با یک مساله برنامه ریزی خطی تقریب می زنیم. در انتها نیز با استفاده از جواب مساله برنامه ریزی خطی تابع کنترل تقریبا بهینه ومسیر بهینه را بدست می آوریم.

۲.۲ معرفی مساله کلاسیک

مساله کنترل کلاسیکی که در این فصل می خواهیم به حل آن بپردازیم به صورت زیر است:

$$\min I = \int_J f_\circ(t,x,u)dt$$

$$s.t.$$

$$\dot{x} = g(t,x,u) \qquad (۱.۲)$$

$$x(t_a) = x_a$$

$$x(t_b) = x_b$$

که در آن J، x و u شرایطی مانند آنچه در مساله (۱.۱) آمده است، دارند. در این مساله زوج $p = [x(.), u(.)]$ را قابل قبول می گوئیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) مقدار تابع مسیر $x(.)$ برای $t \in J$ در مجموعه A باشد و روی دامنه J بطور مطلقا پیوسته باشد.

(۲) تابع کنترل $u(.)$ اندازه پذیر لبگ باشد و مقادیر خود را روی مجموعه U اختیار کند.

(۳) تابع $x(.)$ در شرایط مرزی $x(t_a) = x_a$ و $x(t_b) = x_b$ صدق کند.

(۴) زوج p تقریبا همه جا در معادله دیفرانسیل (۱.۲) صدق کند.

مجموعه تمام زوج های قابل قبول p را با W نشان می دهیم. در حالت کلی روش های کلاسیک دارای معایب زیر است ([۱۰])

(۱) مجموعه W ممکن است تهی باشد. مثلا وقتی که معادله دیفرانسیل مساله (۱.۲) غیر خطی است. تعیین شرایطی که تضمین کند W ناتهی است مشکل است.

(۲) حتی اگر W ناتهی باشد ممکن است اینفیمم I روی W هیچ یک از عناصر W را شامل نشود.

(۳) اگر W ناتهی باشد واینفیمم I روی W موجود باشد،در بعضی مسائل تعیین آن مشکل است.

(۴) برآورد عددی زوج بهینه ممکن است بسیار مشکل باشد.

در روش نشاندن سعی بر این است که این معایب تا حد امکان برطرف شوند. در ادامه به ترتیبی که در قبل ذکر شد مراحل این روش را به طور مختصر شرح خواهیم داد.

۳.۲ تبدیل قیود مساله به قیود انتگرالی

فرض کنید $p = [x(.), u(.)]$ یک زوج قابل قبول باشد، $B \subset \mathbb{R}^{(n+1)}$ را یک گوی باز در نظر می گیریم که مجموعه $J \times A$ را شامل است وبرای هر $\phi \in C'(B)$ تعریف می کنیم:

$$\phi^g(t,x,u) = \phi_x(t,x)g(t,x,u) + \phi_t(t,x) \tag{۲.۲}$$

بنابراین داریم:

$$\int_J \phi^g(t,x,u)dt = \int_J (\phi_x(t,x)\dot{x} + \phi_t(t,x))dt = \int_J \dot{\phi}(t,x)dt = \Delta\phi \tag{۳.۲}$$

هم چنین $D(J^\circ)$ را فضای توابع حقیقی با تکیه گاه فشرده که به طور نامتناهی در $D(J^\circ)$ مشتق پذیرند می نامیم وبرای هر $\psi \in D(J^\circ)$ تعریف می کنیم

$$\psi_i^g(t,x,u) = x_i(t)\dot{\psi}(t) + g_i(t,x,u)\psi(t) \qquad i = ۱, ۲, \ldots, n \tag{۴.۲}$$

که برای این دسته از توابع نیز داریم :

$$\int_J \psi_i^g(t,x,u)dt = x_i(t)\psi(t)|_J = ۰ \tag{۵.۲}$$

برای اثبات رابطه (۵.۲) به [۱۰] مراجعه شود

هم چنین توابع دیگری از $C'(B)$ انتخاب می کنیم که فقط به متغیر زمان وابسته باشند. از این رو

$$C_۱(\Omega) \subset C(\Omega)$$

را مجموعه توابع فقط وابسته به زمان می نامیم یعنی :

$$\phi(t,x,u)=f(t)$$

و اگر a_f را انتگرال f روی J در نظر بگیریم داریم :

$$\int_J f(t,x,u)dt=a_f \qquad \forall f\in C_۱(\Omega) \tag{۶.۲}$$

رابطه های (۳.۲)، (۵.۲) و (۶.۲) همان خواص زوج های قابل قبول در مساله کلاسیک را بیان می کنند.

۴.۲ انتقال مساله به فضای اندازه

در این بخش مساله را به یک مساله در فضای اندازه تبدیل می کنیم که درآن صورت تابع اندازه دارای خاصیت خطی است.

فرض می کنیم $p=[x(.),u(.)]$ یک زوج قابل قبول و $C(\Omega)$ فضای همه توابع Ω به $\mathbb{R}$ باشد. تابعی زیر را تعریف می کنیم :

$$\Lambda_p:F\in C(\Omega)\to\int_J F(t,x,u)dt \tag{۷.۲}$$

این تابعی خوش تعریف، خطی، پیوسته و مثبت است. خطی است به این معنا که

$$\Lambda_p(\alpha F+\beta G)=\alpha\Lambda_p(F)+\beta\Lambda_p(G) \qquad \forall F,G\in C(\Omega),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

ومثبت است به این معنا که اگر به ازای هر $(t,x,u)\in\Omega$ ، $F(t,x,u)$ مثبت باشد، آن گاه $\Lambda_p(F)\geq ۰$،

قضیه ۱.۴.۲. نگاشت $\Lambda_p \to p$ از جفت های قابل قبول $p=[x(.),u(.)]$ به توی نگاشت های خطی تعریف شده در رابطه (۷.۲) یک نگاشت یک به یک می باشد.

برهان: به [۱۰] رجوع شود.

قضیه ۲.۴.۲. (قضیه نمایش ریز)

فرض کنید Ω یک فضای هاسدورف فشرده[۲]، Λ یک تابعی مثبت پیوسته روی $C(\Omega)$ باشد آنگاه یک اندازه برل منظم μ روی Ω چنان یافت می شود که:

$$\Lambda(F) = \int_\Omega F d\mu \quad , \qquad F \in C(\Omega)$$

اندازه μ را اندازه نمایشگر Λ می گوئیم.

با توجه به تعریف تابعی Λ واندازه μ می توان مساله مورد نظر را به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}
&\min I = \mu(f_\circ) \\
&s.t. \\
&\mu(\phi^g) = \Delta\phi \qquad\qquad \forall \phi \in C'(B) \\
&\mu(\psi_i^g) = \circ \qquad\qquad \forall \psi \in D(J^\circ) \quad i = ۱, ۲, \ldots, n \\
&\mu(f) = a_f \qquad\qquad \forall f \in C_۱(\Omega)
\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

مجموعه همه ی اندازه های مثبت μ روی $M^+(\Omega)$ را که در شرایط مساله (۸.۲) صدق می کنند را با Q نشان می دهیم.

قضیه ۳.۴.۲. (i) مجموعه Q یک مجموعه فشرده است وقتی که $M^+(\Omega)$ با توپولوژی ضعیف*[۳]در نظر گرفته شود.

(ii) یک اندازه بهینه $\mu^\star$ روی مجموعه $M^+(\Omega)$ وجود دارد به طوری که داریم

$$\mu^\star(f_\circ) \le \mu(f_\circ)$$

[۲] Compact housdorff

[۳] Weak-Topology

برای هر $\mu \in M^+(\Omega)$

برهان: به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

۵.۲ تقریب مساله

همانطور که در قبل گفته شد مساله(۸.۲) یک مساله برنامه ریزی خطی است وچون $\mu \in M^+(\Omega)$ لذا μ نیز مثبت است. اما مساله (۸.۲)یک مساله با بعد متناهی نیست زیرا هم فضای جواب دارای بعد نامتناهی است و هم تعداد قیود نامتناهی است. از این رو باید این مساله را با یک مساله برنامه ریزی خطی متناهی تقریب بزنیم.

بدین منظور در گام اول ابتدا قیود مساله را محدود می کنیم یعنی به جای این که کمینه سازی تابع $\mu \to \mu(f_0)$ را روی Q انجام دهیم، روی زیر مجموعه ای از$M^+(\Omega)$ انجام می دهیم که با تعداد متناهی از قید های مساله (۸.۲) تعریف شده اند. برای این کار ابتدا تعداد شمارش پذیری تابع از هر یک ازفضاهای $C'(B)$، $D(J^0)$ و $C_1(\Omega)$ که ترکیبات خطی آنها در این فضاها چگال باشند، پیدا می کنیم و از بین آنها تعداد متناهی را انتخاب می کنیم.

دسته اول قیود مساله (۸.۲) را در نظر می گیریم فرض کنیم مجموعه $\{\phi_i : i = 1, 2, \ldots\}$ به گونه ای باشد که ترکیبات خطی توابع ϕ_i در $C(\Omega)$ چگال باشند، به عنوان مثال این توابع را می توان تک جمله ای هایی از x یا t در نظر گرفت. تعداد M_1 تابع از این توابع را انتخاب می کنیم و با استفاده از روابط (۲.۲) و (۳.۲) دسته اول از قیود را می سازیم.

و برای دسته دوم از قیود نیز تعداد M_2 تابع $\psi(t)$ از بین توابع زیر که در $D(J^0)$ چگال هستند، انتخاب می کنیم. این توابع می توانند توابعی از جنس توابع سری فوریه به صورت زیر باشند.

$$\sin(2\pi r(t-t_a)/\Delta t) \qquad r = 1, 2, \ldots$$

$$1-\cos(2\pi r(t-t_a)/\Delta t) \qquad r = 1, 2, \ldots$$

که در آنها $\Delta t = t_b - t_a$ و با استفاده از روابط (۴.۲) و (۵.۲) دسته دوم از قیود را نیز می سازیم.
و برای دسته سوم از قیود نیز توابع زیر را انتخاب می کنیم.

$$f_s(t) = \begin{cases} ۱ & t \in J_s \\ ۰ & t \notin J_s \qquad s = ۱, ۲, \ldots, M_۳ \end{cases}$$

که در آن

$$J_s = [\frac{(t_b - t_a)(s-۱)}{M_۳}, \frac{(t_b - t_a)(s)}{M_۳}]$$

مساله (۸.۲) در این مرحله با مساله زیر تقریب زده شده است.

$$\min I = \mu(f_۰)$$

$$s.t.$$

$$\mu(\phi_i^g) = \Delta\phi_i \qquad i = ۱, ۲, \ldots, M_۱$$

$$\mu(\psi_h^g) = ۰ \qquad h = ۱, ۲, \ldots, M_۲ \qquad (۹.۲)$$

$$\mu(f_s) = a_s \qquad s = ۱, ۲, \ldots, M_۳$$

قضیه ۱.۵.۲. فرض کنید $Q(M', M_۲)$ زیر مجموعه ای از $M^+(\Omega)$ متشکل از اندازه های μ باشد که در شرایط زیر صدق می کنند:

$$\mu(\phi_i^g) = \Delta\phi_i \qquad i = ۱, ۲, \ldots, M_۱ + M_۳ = M'$$

$$\mu(\psi_h^g) = ۰ \qquad h = ۱, ۲, \ldots, M_۲$$

آنگاه حد مقدار

$$\eta(M', M_۲) = \inf_{Q(M', M_۲)} \mu(f_۰)$$

وقتی که M' و $M_۲$ به بینهایت میل کنند، به مقدار زیر میل می کند:

$$\eta = \inf_{Q} \mu(f_۰)$$

تذکر:دسته اول و سوم قیود در مساله (۹.۲)را در قضیه ۱.۵.۲ و قضیه ۲.۵.۲ که در ادامه بیان می شود، با هم در نظر گرفته ایم.
برهان: به [۱۰] رجوع شود.

تعریف ۱.۵.۲. تابع $\delta(z) : C(\Omega) \Rightarrow \mathbb{R}$ را اندازه اتمی واحد می گوییم هر گاه :

$$\forall z \in \Omega, \forall f \in C(\Omega) : \qquad \delta(z)(f) = f(z)$$

قضیه ۲.۵.۲. اندازه بهینه $\mu^\star$ در مجموعه $Q(M', M_۲)$ که تابع $\mu \to \mu(f_۰)$ را کمینه می کند به شکل زیر می باشد $\mu^\star = \sum_{j=۱}^{M'+M_۲} \alpha_j^\star \delta(z_j^\star)$ که در آن $z_j^\star \in \Omega$ وضرایب $\alpha_j^\star \geq ۰$ برای $j = ۱, ۲, \ldots, M' + M_۲$

برهان: به [۱۰] رجوع شود

مجددا متذکر می شویم که دسته سوم قیود (۹.۲) حالت خاصی از دسته اول هستند به همین دلیل تعداد آنها به صورت مجزا در صورت قضیه نیامده است. با فرض $M_۱ + M_۲ + M_۳ = M$ واستفاده از قضیه فوق، اندازه بهینه برای مساله (۹.۲) به شکل زیر است:

$$\mu^\star = \sum_{j=۱}^{M} \alpha_j^\star \delta(z_j^\star)$$

بنابر این مساله (۹.۲) معادل یک مساله برنامه ریزی غیر خطی است. این مساله اکنون به شکل زیر است:

$$\min I = \sum_{j=۱}^{M} \alpha_j^\star f_۰(z_j^\star)$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{M}\alpha_j^\star\phi_i^g(z_j^\star)=\Delta\phi_i \qquad i=1,2,\ldots,M_1$$

$$\sum_{j=1}^{M}\alpha_j^\star\psi_h^g(z_j^\star)=0 \qquad h=1,2,\ldots,M_2 \tag{۲.۱۰}$$

$$\sum_{j=1}^{M}\alpha_j^\star f_s(z_j^\star)=a_s \qquad s=1,2,\ldots,M_3$$

$$z_j^\star\in\Omega$$

می توان این مساله را با یک مساله برنامه ریزی خطی تقریب زد. این موضوع در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۲.۵.۳. فرض کنید ω یک مجموعه چگال و شمارا در Ω باشد، به ازای هر $\epsilon>0$ یک اندازه $v'\in M^+(\Omega)$ موجود است به طوری که:

$$|(\mu^\star-v')(f_0)|<\epsilon$$

$$|(\mu^\star-v')(\phi_j^g)|<\epsilon \qquad i=1,2,\ldots,M_1$$

$$|(\mu^\star-v')(\psi_h^g)|<\epsilon \qquad h=1,2,\ldots,M_2$$

$$|(\mu^\star-v')(f_s)|<\epsilon \qquad s=1,2,\ldots,M_3$$

و اندازه v' به شکل $v'=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k^\star\delta(z_k)$ می باشد که در آن $z_k\in\omega$ برای $k=1,2,\ldots,M$ که $M=M_1+M_2+M_3$ و $\alpha_k^\star(k=1,2,\ldots,M)$ ضرایب اندازه بهینه می باشد.

برهان: برای اثبات [۱۰] را ملاحظه کنید.

با استفاده از نتایج فوق مساله (۲.۱۰) به یک مساله برنامه ریزی خطی به صورت زیر تبدیل می شود: