دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

قاب‌های مخلوط پراکنده: وجود و ساخت

تدوین

حمید رضا عاشوری

استاد راهنما

دکتر امیر خسروی

اسفند ۱۳۹۱


بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به روح پدرم و

مادر مهربانم

سپاسگزاری

استاد عزیز ، جناب آقای دکتر امیر خسروی

زیباترین سپاس‌ها را تقدیم به شما می‌کنم، به شما که دلسوزانه راهنمای من بودید، به شما که علاوه بر حق استادی جای خالی پدرم را پر کرده بودید. همدلی و همراهی‌تان را ارج می‌نهم و پایندگی و تندرستی‌تان را خالصانه آرزومندم.

هم‌چنین از اساتید گران‌مایه، جناب آقای دکتر علیرضا مدقالچی و جناب آقای دکتر عبدالرسول پورعباس که کار داوری این پایان‌نامه را پذیرفته‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فرصت را غنیمت شمرده و از تمامی اساتید دوران تحصیلم مخصوصاُ جناب آقای دکتر امیر خسروی و جناب آقای دکتر طاهر قاسمی هنری و سرکار خانم دکتر حکیمه ماهیار که در این مدت بسیار از آنان آموختم، سپاسگزاری می‌کنم.

در انتها به رسم ادب از تمامی دوستان عزیزم مخصوصاُ آقای دکتر رضا بهمانی و آقایان صادق حسن‌زاده و حسن حاجی‌نژاد که در تدوین این پایان‌نامه کمک شایانی به اینجانب نمودند، تشکر کرده و خوشبختی، سعادت و کامیابی‌شان را آرزو می‌کنم.

حمید رضا عاشوری

اسفند ۹۱

چکیده

دراین پایان‌نامه ابتدا توصیف کاملی از قاب‌های مخلوط پارسوال ارائه می‌شود. سپس دو روش کلی برای ساخت قاب‌های مخلوط جدید با استفاده از قاب‌های مخلوط موجود، یعنی روش مکمل فضایی و روش مکمل نیمارک، معرفی شده و رابطه‌ی بین پارامترهای قاب مخلوط اصلی و قاب مخلوط جدید مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. هم‌چنین مفهوم قاب مخلوط پراکنده، یعنی قاب مخلوطی با زیرفضاهای تولید شده توسط بردارهای پایه‌ی یکامتعامد، معرفی می‌شود.

تمرکز اصلی این پایان‌نامه روی طراحی الگوریتم‌هایی است که با اجرای آن‌ها بتوان یک قاب مخلوط ۲-پراکنده ساخت به‌طوری‌که عملگر قاب مخلوط وابسته به این قاب مخلوط پراکنده دارای مقادیر ویژه‌ی دلخواهی باشند. در پایان کاربردی ازاین الگوریتم‌ها برای ساخت قاب‌های مخلوط تنگ نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: قاب، قاب مخلوط، قاب مخلوط پراکنده، قاب تنگ، عملگر قاب مخلوط، عملگر ترکیب، عملگر تحلیلی.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: $94A12$، $42C15$، $46C99$، $68P30$.

مقدمه

در این پایان‌نامه به‌طور عمده با خواص و ویژگی‌های قاب‌های مخلوط سروکار خواهیم داشت.

فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و I یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار (زیرمجموعه‌ی متناهی یا نامتناهی از $\mathbb{Z}$) و $\{W_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای بسته‌ی $\mathcal{H}$ باشد. هم‌چنین $\{v_i\}_{i\in I}$، خانواده‌ای از وزن‌ها (یعنی برای هر $i \in I$، $v_i > 0$) باشد. دراین‌صورت $\{(W_i, v_i)\}_{i\in I}$ یک قاب مخلوط برای $\mathcal{H}$ است هرگاه ثابت‌هایی مانند A و B وجود داشته باشند به‌طوری‌که $0 < A \leq B < \infty$ و برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته‌باشیم

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} v_i^2 \parallel P_{W_i}(f) \parallel^2 \leq B\|f\|^2$$

که درآن برای هر $i \in I$، P_{W_i} تصویر متعامد $\mathcal{H}$ روی W_i است. قاب‌های مخلوط مفهوم قاب‌ها را تعمیم می‌دهند و بیشتر در تحلیل داده یا سیگنال دومرحله‌ای (موضعی و کلی) مورد نیاز هستند. کاربرد اصلی آن‌ها در نواحی قرار می‌گیرد که نیاز به فرایند پخش است. برای درک بهتر این موضوع یکی از کاربردهای فرایند پخش را که درآن قاب مخلوط به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود، در نظر می‌گیریم.

تعدادی از حس‌گرهای کوچک را درنظر می‌گیریم که در یک ناحیه به منظور اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی گوناگون و یا نظارت بر آن ناحیه گسترش یافته‌اند. به دلیل عوامل اقتصادی و کاربردی نظیر پهنای باند ارتباطی پایین، قدرت محدود پردازش سیگنال، عمر محدود باتری یا عوامل جغرافیایی ناحیه‌ی تحت نظارت، حس‌گرها به‌صورت دسته دسته قرار می‌گیرند به‌طوری‌که هر دسته شامل یک واحد با قدرت محاسبه‌ای و انتقالی بالا برای پردازش داده است. بنابراین یک شبکه‌ی حس‌گر بزرگ را می‌توان به مثابه یک مجموعه‌ی اضافی از زیرشبکه‌ها دانست که یک مجموعه از زیرفضاها را تشکیل می‌دهند.([۳۱] و [۱۲] و [۳۰] را ببینید). اطلاعات زیرفضای موضعی به ایستگاه پردازش مرکزی انتقال می‌یابد. اصل پردازش سیگنال دو مرحله‌ای برای مدل کردن پوسته‌ی دیداری انسان قابل اجرا می‌باشد.([۳۳] را ببینید).

مفهوم قاب‌های مخلوط پراکنده و ساخت این نوع قاب‌های مخلوط مهم‌ترین بخش از این پایان‌نامه را بشکیل می‌دهد. اگر بعد سیگنال بزرگ باشد دراین‌صورت تجزیه‌ی سیگنال به اندازه‌های قاب مخلوطش از طریق تصاویر زیرفضا به تعداد زیادی جمع و ضرب نیاز دارد و این امر ممکن است برای پردازش داده غیرعملی باشد. اما حالتی که قاب مخلوط به‌گونه‌ای طراحی شود که ساختارش نسبتاً "پراکنده" است محاسبه‌ی بردارهای ضریب سیگنال کاهش می‌یابد. در چند سال گذشته پراکندگی به یک مفهوم کلیدی در رشته‌های مختلف ریاضیات کاربردی،

علوم کامپیوتر و مهندسی الکتریک تبدیل شده است. روش‌شناسی پردازش سیگنال پراکنده این واقعیت اساسی را آشکار می‌کند که با انتخاب یک پایه و یا به‌طور کلی یک قاب، تعداد زیادی از سیگنال‌ها را می‌توان تنها با تعداد کمی از ضرایب غیرصفر نمایش داد. یک سیگنال قابل نمایش با تنها k-بردار، k-پراکنده نامیده می‌شود. برای آشنایی بیشتر با این مفهوم به [۶] و [۸] و [۲۲] و [۵] مراجعه کنید.

هم‌چنین برای آشنایی بیشتر با نظریه‌ی قاب‌ها و کاربردهای آن می‌توانید [۷] و [۱۶] و [۳] و [۳۷] و [۱۵] و [۴] و [۲۳] و [۳۲] و [۲۱] و [۱۴] را ببینید.

در نگارش این پایان‌نامه از مقاله‌ی

Robert Calderbank, Peter Casazza, Andreas Heineck, Gitta Kutyniok, and Ali Pezeshki, *Sparse Fusion Frames:Existence and Construction*, Adv. Comput. Math. 35(2011), 1-31.

به عنوان مقاله‌ی اصلی و از مقاله‌های

[1]. Asgari, M.S., Khosravi, Amir, *Frames and bases of subspaces in Hilbert spaces*, Mathematical Analysis and Applications, Volume 308, Issue 2, Pages 541-553, (2005).

[2]. Casazza, P.G., Kutyniok, G., *Frames of subspaces*, in: Wavelets, Frames and Operator Theory, (College Park, MD, 2003), Contemp. Math. 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 87–113.

[3]. Casazza, P.G., Kutyniok, G., Li, S., *Fusion Frames and Distributed Processing*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 25, 114–132 (2008).

[4]. Casazza, P.G., Heinecke, A., Kutyniok, G., *Optimally Sparse Fusion Frames: Existence and Construction*, IEEE Trans. Inform. Theory, to appear.

به عنوان مقاله‌های فرعی استفاده شده است.

در فصل اول به بیان مفاهیم و مقدمات اولیه که در مطالعه‌ی نظریه‌ی قاب‌ها مورد نیاز است، می‌پردازیم.

فصل دوم به معرفی قاب‌ها در فضای هیلبرت اختصاص یافته است. دراین فصل سعی برآن شده تا خواننده شناخت نسبتاً کاملی با نظریه‌ی قاب‌ها داشته و تعاریف و قضایای مهمی مانند قضیه‌ی نیمارک و تعریف عملگر قاب دراین فصل گنجانده شده است.

در فصل سوم با قاب‌های مخلوط که مفهوم قاب‌ها را تعمیم می‌دهند، آشنا می‌شویم. با مطالعه‌ی این فصل و برهان قضایای مربوط به قاب مخلوط، درمی‌یابیم که بیشتر قضایایی که در رابطه با قاب‌ها بودند، برای قاب‌های مخلوط

نیز برقرار هستند.

اما تمرکز اصلی این پایان‌نامه روی فصل ۴ و ۵ است که در آن‌ها مباحث زیر را مورد تحلیل قرار داده‌ایم.

توصیف قاب‌های مخلوط پارسوال: توصیف کاملی از قاب‌های مخلوط پارسوال بر حسب وجود طولپاییِ‌های خاص ارائه می‌شود. این توصیف را می‌توان تعمیمی از قضیه‌ی نیمارک برای قاب‌ها دانست.

ساخت قاب مخلوط جدید با استفاده از قاب‌های مخلوط موجود: با استفاده از دو روش کلی، روش مکمل فضایی و روش مکمل نیمارک، به ساخت قاب‌های مخلوط جدید با استفاده از نمونه‌های موجود می‌پردازیم و رابطه‌ی بین مقادیر ویژه عملگر قاب مخلوط، کران‌های قاب، ابعاد زیرفضاها و فاصله‌ی وتری بین زیرفضاها را برای قاب مخلوط ساخته شده و قاب مخلوط اصلی بررسی می‌کنیم.

وجود و ساخت قاب‌های مخلوط پراکنده با استفاده از الگوریتم: در پایان به ساخت قاب‌های مخلوط پراکنده‌ای می‌پردازیم که عملگر قاب مخلوط وابسته به آن‌ها مقادیر ویژه‌ی دلخواهی داشته‌باشند. با طراحی یک الگوریتم و برهان آن به این نتیجه می‌رسیم که این مقادیر ویژه باید بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشند. در نهایت به عنوان کاربردی از این الگوریتم، به ساخت قاب‌های مخلوط تنگ می‌پردازیم.

فهرست مطالب

فهرست مطالب خ

۱ پیش‌نیازها و نمادها **۱**

۱.۱ خواص و مفاهیم مقدماتی . . . ۱

۲.۱ فضای هیلبرت . . . ۵

۳.۱ مجموعه‌های متعامد و پایه‌ها در فضای هیلبرت . . . ۶

۴.۱ عملگرها . . . ۹

۲ مقدمه‌ای بر نظریه‌ی قاب‌ها در فضاهای هیلبرت **۱۸**

۱.۲ تعاریف مقدماتی قاب‌ها . . . ۱۸

۲.۲ عملگر قاب . . . ۲۴

۳.۲ پایه‌های ریس . . . ۳۱

۳ قاب‌های مخلوط **۳۴**

۱.۳ تعریف و خواص پایه‌ی قاب مخلوط . . . ۳۴

۲.۳ عملگر قاب مخلوط . . . ۴۰

۴ ساخت قاب‌های مخلوط **۴۸**

۱.۴ توصیف قاب‌های مخلوط پارسوال . . . ۴۸

۲.۴ ساخت قاب‌های مخلوط جدید با استفاده از نمونه‌های موجود . . . ۵۱

۱.۲.۴ روش مکمل فضایی . . . ۵۱

۲.۲.۴ روش مکمل نایمارک . . . ۵۷

۵ ساخت قاب های مخلوط پراکنده با یک عملگر قاب مخلوط مطلوب ۶۲

۱.۵ حالت صحیح ۶۳

۲.۵ حالت کلی ۶۶

مراجع ۸۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۹۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۵

نمایه ۹۷

فصل ۱

پیش‌نیازها و نمادها

در این فصل نمادها، تعاریف و قضایای مورد نیاز را که برای این پایان‌نامه مورد نیاز است، بیان می‌کنیم. مجموعه‌ی اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد حقیقی و اعداد مختلط را به‌ترتیب با $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم.

از آن جهت که فصل‌های بعد بر پایه‌ی فضای هیلبرت[1] هستند، بنابراین بیشتر تمرکز ما روی فضاهای هیلبرت و ویژگی‌های این فضا است.

۱.۱ خواص و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. گوییم فضای برداری X یک **فضای نرم‌دار** است اگر به هر $x \in X$ عدد حقیقی و نامنفی مانند $\| x \|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

(i) به ازای هر x و y در X، $\| x+y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

(ii) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، آن‌گاه $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$.

(iii) $x \neq 0$ اگر و فقط اگر $\| x \| > 0$.

در واقع، نرم به معنای تابعی است که x را به $\| x \|$ می‌نگارد.

هر فضای نرم‌دار را می‌توان یک فضای متریک در نظر گرفت که در آن فاصله‌ی $d(x,y)$ بین دو نقطه x و y مساوی $\| x-y \|$ است. به عبارت دیگر برای هر $x,y \in X$ داریم $d(x,y) = \| x-y \|$.

[1] Hilbert

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری و E یک زیرمجموعه‌ی آن باشد. زیرفضای **پیمایش خطی** [۲] E که با $\mathrm{Span}(E)$ نشان داده می‌شود اشتراک همه زیرفضاهای X است که شامل E هستند؛ یعنی $\mathrm{Span}(E)$ نمایش‌دهنده گردایه ترکیبات خطی متناهی از عناصر E به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{Span}(E) := \begin{cases} \{0\}, & E = \phi \\ \text{مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی متناهی اعضای } E, & E \neq \phi \end{cases}$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم X فضای نرم‌دار با نرم $\|.\|$ باشد و $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ دنباله‌ای از عناصر X باشد.

(i) هرگاه عضو $x \in X$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$ گوییم دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ به $x \in X$ **همگرا** است و می‌نویسیم $x_n \longrightarrow x$ وقتی $n \longrightarrow \infty$.

(ii) هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ثابت $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $N \leq n, m$ داشته باشیم: $\| x_n - x_m \| < \varepsilon$ آن‌گاه دنباله $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ را **کوشی** [۳] می‌نامیم.

(iii) هرگاه عضو $x \in X$ وجود داشته باشد که دنباله $S_N = \sum_{-N}^{N} x_n$ به x همگرا باشد، گوییم سری $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ به x همگراست و می‌نویسیم $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n = x$.

(iv) هرگاه $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \| x_n \|$ همگرا باشد، سری $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ را مطلقاً همگرا می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. فضای خطی نرم‌دار X مفروض است.

(i) زیرمجموعه‌ی E از X **کامل** است اگر $\overline{\mathrm{Span}(E)} = X$ ، یعنی $\mathrm{Span}(E)$ در X چگال باشد.

(ii) فضای X **کامل** است هرگاه هر دنباله کوشی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از عناصر X همگرا باشد.

(iii) فضای X جدایی‌پذیر است اگر شامل یک زیرمجموعه‌ی چگال شمارا باشد.

[۲] Linear Span

[۳] Cauchy

قضیه ۵.۱.۱. [35, 3.9] فرض کنیم $1 \leq p \leq \infty$ و f و g توابع اندازه‌پذیر مختلط روی فضای اندازه‌ی X باشند. همچنین $\big(\int_X |f|^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}} < \infty$ و $\big(\int_X |g|^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}} < \infty$. در این صورت $\big(\int_X |f+g|^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}} < \infty$ و

$$\big(\int_X |f+g|^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}} \leq \big(\int_X |f|^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\int_X |g|^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}}$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $1 \leq p \leq \infty$ و f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر فضای اندازه‌ی X باشد. تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = \big(\int_X |f|^p d\mu\big)^{\frac{1}{p}}$$

و فرض می‌کنیم $S = \{f$هایی اندازه پذیر و مختلط $: \|f\|_p < \infty\}$. $\|f\|_p$ را نرم L^p تابع f می‌نامیم. اگر $f \in S$ و α یک عدد مختلط باشد، واضح است که $\alpha f \in S$. همچنین با توجه به قضیه‌ی ۵.۱.۱ نتیجه می‌گیریم که S یک فضای برداری مختلط است. فرض کنیم که f و g و h در S باشند. از تعویض f با $f-g$ و g با $g-h$ در قضیه‌ی ۵.۱.۱ داریم

$$\|f-h\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g-h\|_p$$

این امر پیشنهاد می‌کند که اگر فاصله‌ی f و g را با $\|f-g\|_p$ تعریف شود، یک متر بدست می‌آید. این فاصله را یک لحظه $d(f,g)$ می‌نامیم. در این صورت $0 \leq d(f,g) < \infty$، $d(f,f) = 0$، $d(f,g) = d(g,f)$، و با توجه به نابرابری بالا، نابرابری مثلثی نیز برقرار است. تنها خاصیت دیگری که d باید داشته باشد تا یک فضای متری را تعریف کند آنست که $d(f,g) = 0$ باید $f = g$ را ایجاب کند. در این وضعیت لازم نیست چنین باشد. ما $d(f,g) = 0$ را دقیقاً وقتی داریم که تقریباً به ازای هر x، $f(x) = g(x)$. می‌نویسیم $f \sim g$ اگر و تنها اگر $d(f,g) = 0$. این بوضوح یک رابطه‌ی همارزی در S است که S را به رده‌های همارزی افراز می‌کند. هر رده از تمام توابعی تشکیل شده است که همارز تابع مخصوصی می‌باشند. اگر F و G دو رده‌ی همارزی باشند، $f \in F$ و $g \in G$ را اختیار کرده و تعریف می‌کنیم $d(F,G) = d(f,g)$. حال مجموعه‌ی تمام رده‌های همارزی را با $L^p(\mu)$ نشان داده و بنابراین مجموعه‌ی

$$L^p(\mu) = \{[f]: \qquad f \in S\}$$

با متر تعریف شده در بالا یک فضای متریک است.

نمادگذاری ۷.۱.۱. اگر μ اندازه‌ی شمارشی بر مجموعه‌ی A باشد، معمولاً فضای L^p نظیر را با $\ell^p(A)$ یا اگر A شمارا باشد فقط با ℓ^p نشان می‌دهیم. هر عنصر ℓ^p را می‌توان یک دنباله‌ی مختلط $x = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ در نظر گرفت که

$$\|x\|_p = \big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

همچنین ℓ^∞ را تمام دنباله‌های مختلط $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ می‌گیریم به‌طوری‌که $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty$ و قرار می‌دهیم $\|x\|_\infty = \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$.

قضیه ۸.۱.۱. [35, 3.8] اگر p و q نماهای مزدوج باشند، (یعنی p و q دو عدد حقیقی و مثبت باشند و $p+q = pq$)، $1 \leq p \leq \infty$ و $f \in L^p(\mu)$ و $g \in L^q(\mu)$، دراین‌صورت $fg \in L^1(\mu)$ و داریم

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

نابرابری بالا به **نابرابری هولدر** [۴] معروف است.

تعریف ۹.۱.۱. فضای خطی نرم‌دار X را یک **فضای باناخ** [۵] می‌گوییم هرگاه یک فضای کامل باشد.

قضیه ۱۰.۱.۱. [35, 3.11] $L^p(\mu)$ برای $1 \leq p \leq \infty$ و هر اندازه‌ی مثبت μ یک فضای باناخ است.

قضیه ۱۱.۱.۱. [1, 27.6]

(i) در هر فضای نرم‌دار متناهی‌بعد هر دو نرم دلخواه هم‌ارزند.

(ii) هر زیرفضای برداری متناهی‌بعد در یک فضای نرم‌دار با توپولوژی حاصل از نرم بسته است.

(iii) یک فضای نرم‌دار با توپولوژی حاصل از نرم **موضعاً فشرده** است اگر و تنها اگر متناهی بعد باشد.

[۴] Holder

[۵] Banach

۲.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X فضایی برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. یک **ضرب داخلی** روی X، تابعی مانند $\langle .\,,. \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که برای هر α، β در $\mathbb{C}$ و برای هر x، y و z در X شرایط زیر برقرار باشد:

(i) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

(ii) $0 \leq \langle x, x\rangle$.

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(iv) اگر $\langle x, x\rangle = 0$ آن‌گاه $x = 0$ است.

توجه داریم که اگر $\alpha = 0$ باشد بنا بر خاصیت (i) برای هر $y \in X$ داریم

$$\langle 0, y\rangle = \langle 0 \cdot x, y\rangle = 0\langle x, y\rangle = 0$$

پس برای هر ضرب داخلی $\langle .\,,. \rangle$ و برای هر $y \in X$، x، $\langle x, 0\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$.

قضیه ۲.۲.۱. نامساوی کوشی - شوارتز[۶] [20, 4.1.1] اگر $\langle .\,,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری X باشد آن‌گاه برای هر $y \in X$، x

$$|\ \langle x, y\rangle\ |^2 \leqslant \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

علاوه بر این، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر اسکالرهای α و β ، که حداقل یکی از آن‌ها ناصفر است، به گونه‌ای وجود داشته باشند که $\alpha x + \beta y = 0$.

قضیه ۳.۲.۱. [20, 5.1.1] اگر $\langle .\,,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی X باشد و برای هر $x \in X$، $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ را تعریف کنیم، آن‌گاه

---

[۶] Schwarz

(i) برای هر x و y در X، $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

(ii) برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in X$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

(iii) اگر $\|x\| = 0$، آن‌گاه $x = 0$.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم $(X, \langle .,. \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد. به‌ازای‌هر $x \in X$ تابع نرم با ضابطه‌ی $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ را نرم القا شده از این ضرب داخلی تعریف می‌کنیم. درصورتی‌که X با این نرم یک فضای باناخ تشکیل دهد، X را یک **فضای هیلبرت** می‌نامیم و معمولاً با $\mathcal{H}$ نمایش می‌دهیم.

در سرتاسر این پایان نامه، منظور از $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ است.

مثال ۵.۲.۱. فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و $\mathbb{C}^n := \{z = (z_1, \ldots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n\}$ دراین‌صورت $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است

$$\langle x.y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \qquad ; \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)\ ,\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

مثال ۶.۲.۱. فرض کنیم μ یک اندازه‌ی مثبت روی سیگما جبر $\mathfrak{m}$ در فضای اندازه‌پذیر X باشد. دراین‌صورت فضای $L^2(\mu)$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است.

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\bar{g} d\mu, \qquad\qquad f, g \in L^2(\mu)$$

انتگرالده سمت راست طبق قضیه‌ی ۸.۱.۱ در $L^1(\mu)$ است. در نتیجه $\langle f, g\rangle$ خوش‌تعریف است. توجه می‌کنیم که

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}} = \big(\int_X |f|^2 d\mu\big)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$$

کامل بودن $L^2(\mu)$، بنابر قضیه‌ی ۱۰.۱.۱ نشان می‌دهد که درواقع $L^2(\mu)$ یک فضای هیلبرت است.

۳.۱ مجموعه‌های متعامد و پایه‌ها در فضای هیلبرت

تعریف ۱.۳.۱. اگر $A, B, E, \{\nu_\alpha\}_{\alpha \in I}$ و $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ زیرمجموعه‌هایی از $\mathcal{H}$ و x, y اعضایی از $\mathcal{H}$ باشند آن‌گاه

۱. دو عضو x, y را **متعامد** یا عمودبرهم گوییم هرگاه $\langle x, y\rangle = 0$ که دراین‌صورت می‌نویسیم $x \perp y$ اگر $x \perp y$ باشد آن‌گاه $y \perp x$ است و $x \perp x$ اگر و تنها اگر $x = 0$ باشد.

۲. دو مجموعه‌ی A و B را متعامد یا عمودبرهم نامیم هرگاه به‌ازای‌هر $x \in A$ و $y \in B$، $\langle x, y\rangle = 0$ که دراین‌صورت می‌نویسیم $A \perp B$.

۳. زیرمجموعه‌ی E از $\mathcal{H}$ یک زیرمجموعه‌ی متعامد است هرگاه برای هر $e_1, e_2 \in E$ که $e_1 \neq e_2$ داشته باشیم $e_1 \perp e_2$.

۴. **مکمل متعامد** A را با $A^{\perp}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} : \langle x, y\rangle = 0, \quad x \in A \text{ به‌ازای‌هر }\}.$$

۵. مجموعه‌ی A را **یکامتعامد** گوییم هرگاه هر دو عضو متمایز A بر هم عمود بوده و به‌ازای‌هر $x \in A$، داشته باشیم: $\|x\| = 1$.

۶. دو مجموعه‌ی $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in I}$ و $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را **دومتعامد** نامیم، هرگاه $\langle \nu_\alpha, u_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

۷. مجموعه‌ی $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را یک **پایه** برای $\mathcal{H}$ گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

(آ) به‌ازای‌هر $x \in \mathcal{H}$ خانواده‌ای از اسکالرها مانند $\{c_\alpha\}_{\alpha\in I}$ موجود باشد به‌طوری‌که $x = \sum\limits_{\alpha\in I} c_\alpha \nu_\alpha$.

(ب) مجموعه‌ی $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in I}$ **مستقل خطی** باشد یعنی اگر ضرایب $\{c_\alpha\}_{\alpha\in I}$ موجود باشند به‌طوری‌که $\sum\limits_{\alpha\in I} c_\alpha \nu_\alpha = 0$ آن‌گاه به‌ازای‌هر $\alpha \in I$ بتوان نتیجه گرفت $c_\alpha = 0$.

۸. دنباله‌ی $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را در $\mathcal{H}$ **کامل** گوییم اگر تنها عضو عمود بر این خانواده صفر باشد یعنی اگر $x \in \mathcal{H}$ چنان باشد که به‌ازای‌هر $\alpha \in I$، $\langle x, \nu_\alpha\rangle = 0$ آن‌گاه $x = 0$ و یا به عبارت دیگر $\overline{\mathrm{Span}}\{\nu_\alpha\} = \mathcal{H}$. اگر فضایی کامل نباشد آن را غیرکامل می‌نامیم.

۹. هر مجموعه‌ی یکامتعامد که در فضای $\mathcal{H}$ کامل باشد یک **پایه‌ی یکامتعامد** نامیده می‌شود.

۱۰. اگر $\mathcal{H}$ دارای زیرمجموعه‌ی چگال و شمارا باشد، $\mathcal{H}$ را فضای هیلبرت **جدایی‌پذیر** می‌نامیم.

ملاحظه ۲.۳.۱. اگر $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ مجموعه‌ای متعامد در $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$$

مثال ۳.۳.۱. فرض کنیم برای $n \in \mathbb{N}$، e_n عضوی از $\ell^2(\mathbb{N})$ باشد که مؤلفه‌ی n -ام آن ۱ و بقیه مولفه‌های آن صفر باشد. در این صورت $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ برای $\ell^2(\mathbb{N})$ پایه‌ی یکامتعامد است که **پایه‌ی متعامد استاندارد** نامیده می‌شود.

قضیه ۴.۳.۱. نامساوی بسل [۷] [20, 8.4.1] فرض کنیم دنباله‌ی $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی یکامتعامد و $x \in \mathcal{H}$. در این صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid \langle x, e_n\rangle \mid^2 \leqslant \| x \|^2 .$$

نتیجه ۵.۳.۱. [20, 9.4.1] اگر E مجموعه‌ای یکامتعامد در $\mathcal{H}$ باشد و $x \in \mathcal{H}$ ، آن‌گاه برای حداکثر تعدادی شمارا از بردارهای $e \in E$، $\langle x, e\rangle \neq 0$.

قضیه ۶.۳.۱. [1, 34.4][35, 4.18] هر فضای هیلبرت دارای پایه‌ی یکامتعامد است و هر خانواده‌ی یکامتعامد در یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر $\mathcal{H}$، شمارا است.

قضیه ۷.۳.۱. [35, 4.19] اگر $\{x_n\}_{n\in I}$ یک پایه‌ی یکامتعامد برای $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{H}$ با $\ell^2(I)$ یکریخت است.

قضیه ۸.۳.۱. [1, 34.2] فرض کنیم $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک مجموعه‌ی یکامتعامد در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. دراین‌صورت احکام زیر هم‌ارزند.

۱. دنباله‌ی $\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پایه‌ی یکامتعامد برای $\mathcal{H}$ است.

۲. برای‌هر $x \in \mathcal{H}$، $x = \sum_{\alpha\in I} \langle x, \nu_\alpha\rangle \nu_\alpha$.

۳. برای‌هر $x \in \mathcal{H}$، $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in I} |\langle x, \nu_\alpha\rangle|^2$، این تساوی به **اتحاد پارسوال** [۸] معروف است.

[۷] Bessel

[۸] Parseval

۴. $\overline{\mathrm{Span}}\{\nu_\alpha\}_{\alpha\in I}=\mathcal{H}$.

۵. اگر $x\in\mathcal{H}$ و اگربرای‌هر $\alpha\in I$ داشته باشیم $\langle x,\nu_\alpha\rangle=0$، آن‌گاه $x=0$.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم X فضایی نرم‌دار و M زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X باشد. اگر زیرمجموعه‌ی بسته‌ای مانند N وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M\cap N=\{0\}$ و $X=M+N$ آن‌گاه M را یک **زیرفضای متکامل** X می‌نامیم و می‌نویسیم $X=M\oplus N$.

قضیه ۱۰.۳.۱. [34, 12.4] اگر M زیرفضای بسته‌ای از $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه داریم $\mathcal{H}=M\oplus M^\perp$.

نتیجه ۱۱.۳.۱. [34, 12.4] اگر M زیرفضای بسته‌ای از $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه $M=\left(M^\perp\right)^\perp$.

تعریف ۱۲.۳.۱. دنباله‌ی کامل $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ را در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ **پایه‌ی ریس** [۹] می‌نامیم هرگاه اعداد مثبتی مانند A و B موجود باشند به طوری که به‌ازای‌هر دنباله‌ی متناهی $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z})$ داشته باشیم

$$A\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2\leqslant\|\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_nx_n\|^2\leqslant B\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2.$$

در صورتی‌که $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\subseteq\mathcal{H}$ پایه‌ی ریس برای $\overline{\mathrm{Span}}\{x_n\}$ باشد آن را یک **دنباله ریس** می‌نامیم.

A و B را کران‌های بالایی و پایینی پایه‌ی ریس می‌نامیم و ثابت پایه‌ی ریس برابر است با ماکسیمم، کران بالای پایه‌ی ریس و عکس کران پایین پایه‌ی ریس، یعنی

$$\text{ثابت پایه‌ی ریس}=\max\{B,\frac{1}{A}\}$$

قضیه ۱۳.۳.۱. [19, 2.3.4] فرض کنیم $x\in\mathcal{H}$. دراین‌صورت

$$\|x\|=\sup\{|\langle x,y\rangle|\quad;\quad y\in\mathcal{H}\ \ ,\ \ \|y\|=1\}.$$

۴.۱ عملگرها

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری مختلط باشند. نگاشت $T:X\longrightarrow Y$ را یک **عملگر خطی** می‌نامیم اگر به ازای هر $x,y\in X$ و هر اسکالر $\alpha\in\mathbb{C}$، $T(\alpha x+y)=\alpha T(x)+T(y)$.

[۹] Riesz

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. دراین‌صورت نرم عملگر خطی T را با $\|T\|$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\}$$

عملگر خطی T را کران‌دار نامیم درصورتی‌که $\|T\| < \infty$ و در غیراین‌صورت آن را عملگر خطی بی‌کران می‌نامیم. مجموعه‌ی تمام تبدیلات خطی کران‌دار از X به Y را با $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. اگر $X = Y$، T را یک عملگر روی X می‌نامیم و $B(X,X)$ را با $B(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۴.۱. [34, 4.1] مجموعه‌ی $B(X,Y)$ با نرم عملگر یک فضای نرم‌دار تشکیل می‌دهد. اگر Y فضای باناخ باشد آن‌گاه $B(X,Y)$ نیز یک فضای باناخ است.

اگر $B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ مجموعه‌ی تمام تبدیلات خطی کران‌دار از $\mathcal{H}_1$ به $\mathcal{H}_2$ باشد آن‌گاه این مجموعه با نرم $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_{\mathcal{H}_1} \leqslant 1} \|Tx\|_{\mathcal{H}_2}$ یک فضای باناخ است. اگر $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ آن‌گاه فضای $B(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ را با $B(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم.

اگر $Y = \mathbb{C}$ آن‌گاه T را **تابعک خطی** می‌گوییم و مجموعه تمام تابعک‌های خطی و کران‌دار روی X را با X^* نشان می‌دهیم و **فضای دوگان** X می‌نامیم. زیرفضاهای

$$Ker(T) = \{x \in X : T(x) = 0\}$$

و

$$Ran(T) = \{y \in Y : T(x) = y \quad \text{برای } x \in X \text{ای}\}$$

به ترتیب از X و Y را فضای پوچ و فضای برد T می‌نامیم.

قضیه ۴.۴.۱. [19, 2.2.3](**قضیه نویمان** [۱۰]) اگر X یک فضای برداری نرم‌دار و $T \in B(X)$ و $\|I - T\| < 1$

[۱۰] Neumann