به نام خدا

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته:
ریاضی محض

عنوان:

نگاشت های همدیس روی منیفلدهای فینسلر

نگارنده:
مریم تنیده

اساتید راهنما:

دکتر سینا هدایتیان

دکتر علی رضایی علی آباد

استاد مشاور:
دکتر عبدالمحمد فروزانفر

بهمن ۸۸

تقدیم به آنها که به من آموختند

گل را
عشق را
شعر را
حرمت را
رنگ را
آهنگ را

پدر و مادرم

دیوانه گرش پند دهی کار نبندد
ور بند نهی سلسله درهم گسلاند

تقدیر و تشکر

نکته بس مهم که اشاره بدان لازم و به جاست، سپاسگزاری از عزیزانی است که در این راه یار و یاورم بوده اند، ازجناب آقای دکتر هدایتیان استاد راهنمای گرامیم که در همه مراحل تدوین این تحقیق دلسوزانه حامی و مشوق من بوده اند صمیمانه تشکر و قدردانی نموده وبرایشان آرزوی سربلندی و پیروزی می‌نمایم. همچنین از آقایان دکتر رضایی(استادراهنمای دوم)، دکتر فروزانفر(استاد مشاور)، دکتر کرمزاده(داور) و دکتر مهرابی(داور) به خاطر قبول زحمت مطالعه تحقیق و ارائه تذکرات مفید سپاسگزاری می‌کنم.

مریم تنیده
بهمن ۸۸

چکیده

نام خانوادگی: تنیده **نام:** مریم	
عنوان پایان نامه: نگاشتهای همدیس روی منیفلدهای فینسلر	
اساتید راهنما: دکتر سینا هدایتیان،دکتر علی رضایی علی آباد	
استاد مشاور: دکتر عبدالمحمد فروزانفر	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی **گرایش:** محض	
محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز **دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر	
تاریخ فارغ التحصیلی:۱۷ /۱۱ /۱۳۸۸ **تعداد صفحات:** ۸۳	
واژه های کلیدی: میدان برداری همدیس، ترفیع یافته ی کامل، منیفلد فینسلری، فضای مماس، متر ترفیع یافته، متجانس،میدان برداری نگهدارنده ی تار	
چکیده:فرض کنیم (M,g) منیفلدی فینسلری، TM فضای مماس بر آن و $\tilde{g}$ متر ریمان مشتق شده از g روی TM باشد. آنگاه هر میدان برداری همدیس ترفیع یافته کامل روی M متجانس است.	

دانشگاه شهید چمران اهواز
مدیریت تحصیلات تکمیلی

به نام خدا

نتیجه ارزشیابی پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

بدین وسیله گواهی می شود پایان نامه خانم مریم تنیده دانشجوی رشته ریاضی محض از دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر به شماره دانشجویی ۸۶۲۵۲۰۵ تحت عنوان

نگاشت های همدیس روی منیفلد های فینسلر

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در تاریخ ۱۳۸۸/۱۱/۱۷ توسط هیات داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت وبا درجه عالی تصویب گردید.

۱-هیات داوران	مرتبه علمی	امضا
الف)استاد راهنمای اول:دکتر سینا هدایتیان	استادیار	
ب)استاد راهنمای دوم:دکتر علی رضایی علی آباد	دانشیار	
ج)استاد مشاور:دکتر عبدالمحمد فروزانفر	استادیار	
د)داور اول:دکتر امیدعلی شهنی کرمزاده	استاد	
ه)داور دوم:دکتر محمد حسین مهرابی	استادیار	
و)نماینده تحصیلات تکمیلی:دکتر نسرین شیرعلی	استادیار	
۲-مدیر گروه:دکتر سینا هدایتیان	استادیار	
۳-معاون پژوهشی تحصیلات تکمیلی:دکتر منصور سراج	استادیار	
۴-مدیر کل تحصیلات تکمیلی:دکتررحیم پیغان	استاد	

فهرست مطالب

پیشگفتار

هندسه فینسلر [۱] شاخه ای از هندسه ریمانی است و شاخه نسبتا جوانی از هندسه دیفرانسیل کلاسیک نیز می‌باشد که کاربردهای فراوانی در علوم از جمله فیزیک نظری وبیولوژی دارد.

نظریه ساختن یک فضا با متر تعمیم یافته ریمان نخستین بار در سال ۱۹۱۸ توسط پائول فینسلر بیان شد و مراحلی از آن به انجام رسید. سپس در سال ۱۹۲۰ این کار توسط ریاضی دانانی چون سینج [۲]، تیلور [۳] و به ویژه بروالد [۴] به عنوان تعمیمی از هندسه ریمان گسترش یافت. از طرفی دانشمندان فیزیک نظری و بیولوژی همچون راندرز [۵] نیز گام های موثری در پیشرفت این نظریه برداشتند.

در سال ۱۹۳۳ کارتان [۶] اصول هندسه ای را که فینسلر ابداع نموده و سایرین آن را کامل تر کرده بودند و به عنوان هندسه فینسلر شناخته می‌شد گسترش داد و با معرفی نوعی هموستار که به نام خود او یعنی هموستار کارتان نامیده شد، بیشترین کمک را در حصول نتایج جالب از فضای فینسلر نمود که ما نیز در اینجا به بررسی یکی از آنها خواهیم پرداخت.

اخیرا نیز پرفسور اکبرزاده مقالاتی را در مورد فضای فینسلر ارائه نموده که از جمله آنها در سال ۱۹۶۳ یک شرط لازم وکافی برای آنکه یک تبدیل بی‌نهایت کوچک روی یک فضای فینسلر همدیس باشد به دست آورد و نیز در سال ۱۹۷۹ ثابت کرد که روی یک منیفلد فینسلر با انحنای عددی ثابت، تحت شرایطی گروه تبدیلات همدیس ، به گروه تبدیلات ایزومتری کاهش می‌یابد.

---

[۱] P.Finsler

[۲] J.L.Synge

[۳] J.H.Taylore

[۴] L.Berwald

[۵] G.Randers

[۶] E.Cartan

در سال های اخیر نیز یامائوشی[۷] تحقیقاتی در این زمینه داشته است که به عنوان مثال در سال ۱۹۷۸ تبدیلات همدیس ، متجانس و ایزومتری را روی فضای ریمان مورد بحث قرار داده و همچنین در سال ۱۹۹۰ به بررسی تبدیلات همدیس و متجانس روی فضای فینسلر پرداخته است.

در مطالعه هندسه فینسلر میدان های برداری ترفیع یافته کامل اهمیت زیادی دارند. نتایج زیر در زمینه میدان های برداری ترفیع یافته کامل به دست آمده است:

- گیریم (M,g) منیفلدی ریمانی، X میدانی برداری روی M و X^c میدان برداری ترفیع یافته کامل X روی TM باشد. اگر TM را با متر $g_۲$ در نظر بگیریم آنگاه X^c یک میدان برداری همدیس روی TM است اگر وتنها اگر X روی M متجانس باشد.
- گیریم (M,g) منیفلدی ریمانی باشد، اگر TM را با متر $g_۱ + g_۳$ در نظر بگیریم آنگاه X^c یک میدان برداری همدیس روی TM است اگر وتنها اگر متجانس باشد.

در اینجا ما به معرفی متر وشبه متر ریمان ترفیع یافته روی TM یا $\tilde{g}$ می‌پردازیم وقضایای زیر را به اثبات می‌رسانیم:

- گیریم M منیفلدی ریمانی باشد و TM فضای مماس آن همراه با متر $\tilde{g}$ ،آنگاه هر میدان برداری ترفیع یافته کامل همدیس روی TM متجانس است.
- فرض کنیم (M,g) منیفلدی فینسلری، TM فضای مماس بر آن و $\tilde{g}$ متر ترفیع یافته g روی TM باشد. آنگاه هر میدان برداری ترفیع یافته کامل همدیس روی TM متجانس است.

این پایان نامه شامل پنج فصل است:
در فصل اول به بیان تاریخچه ونیز مقدمات هندسه منیفلد می‌پردازیم.
فصل دوم که خود شامل شش بخش است به معرفی منیفلد فینسلر وانواع آن ونیز ویژگیهای یک منیفلد همراه با هموستار فینسلر یا کارتان اختصاص دارد.
فصل سوم به بیان مشتق لی تانسورها نسبت به یک میدان برداری می‌پردازد ومشتق لی اعضای پایه فضای TTM و دوگان آن را محاسبه می‌کنیم و در ادامه با معرفی چهار متر ریمان متفاوت روی TM به محاسبه مشتق لی آنها می‌پردازیم.
فصل های چهارم وپنجم به اثبات قضایای مربوط به میدان های برداری ترفیع یافته کامل همدیس روی منیفلدهای ریمان وفینسلر خواهیم پرداخت.

---

[۷] K.Yamaushi

فصل ۱

تعاریف و قضایای مورد نیاز

۱.۱ تاریخچه

پائول فینسلر [۱] در یازدهم آوریل ۱۸۹۴ در هیلبورن [۲] واقع در آلمان دیده به جهان گشود، دوره ابتدایی خویش را در یورخ [۳] گذراند و در سال های ۱۹۰۸ تا ۱۹۱۲ در کانستا [۴] دوره ی متوسطه ی خویش را کامل نمود. پس از فارغ التحصیلی در سال ۱۹۱۳ برای ادامه تحصیل به گوتینگن [۵] رفت و از محضر جمعی از بهترین ریاضی دانان همچون ادموند [۶]، هیلبرت [۷] و کلین [۸] بهره مند گردید.

رساله دکترای فینسلر درباره رویه ها ومنحنی ها در فضاهای عمومی [۹] که توسط کاراتئودوری [۱۰] راهنمایی شد نام فینسلر را به عنوان یک هندسه دان مطرح کرد. در واقع کارتان [۱۱] در سال ۱۹۳۴ کتابی به نام هندسه ی فینسلر نوشت که نام وی را در هندسه دیفرانسیل پایه نهاد.

---

[۱] Paul Finsler

[۲] Hilborn

[۳] Urch

[۴] Consta

[۵] Gotingen

[۶] Edmond

[۷] Hilbert

[۸] Klein

[۹] Curvature and surfaces in general spaces

[۱۰] Caratheodori

[۱۱] Cartan

فضای فینسلر تعمیم فضای ریمان [۱۲] است که در آن تابع دیفرانسیل پذیر طول قوس ، هندسه مینکوفسکی [۱۳] را به طور موضعی حفظ می‌کند.[۱۰] فینسلر به نظریه مجموعه ها علاقه مند شده بود و تا مدت زمان زیادی هندسه دیفرانسیل را کنار گذاشت. پایان نامه فینسلر که در رابطه با خواص هندسه فینسلر بود در سال ۱۹۲۲ در دانشگاه کولوگن [۱۴] مورد تایید قرار گرفت ویک سال بعد مقاله غیر قابل پیش بینی وی تحت عنوان"آیا تناقضی در ریاضیات وجود دارد"به چاپ رسید.

در سال ۱۹۲۷ فینسلر به دانشگاه زوریخ رفت و به سال ۱۹۴۴ در آن دانشگاه به درجه استادی رسید.

در زوریخ علاوه بر نظریه مجموعه ها، روی هندسه دیفرانسیل ، نظریه اعداد، نظریه احتمال و مبانی ریاضیات به تحقیق پرداخت.

در ۱۹۲۶ فینسلر مهمترین کار را خود در نظریه مجموعه ها،تحت عنوان "مبانی نظریه مجموعه ها"به چاپ رساند. وی تمایل داشت که قسمت دوم این کار را نیز در دنباله ی بحث اول به چاپ برساند اما از آنجا که قسمت نخست مورد انتقاد شدید قرار گرفت برنامه اش را عوض کرد وقسمت دوم را به پاسخ دادن به نقدها اختصاص داد که در سال ۱۹۶۵ به چاپ رسید.

فینسلر در تاریخ ۲۹ آوریل ۱۹۷۰ در زوریخ در کشور سوییس چشم از جهان فرو بست.

۲.۱ منیفلد دیفرانسیل پذیر وکلاف مماس بر آن

فرض کنیم M یک مجموعه ناتهی و O زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$، $U \subseteq M$ باشد. نگاشت دوسویی

$$x : U \longrightarrow x(U) = O \subseteq \mathbb{R}^n$$

را یک کارت n بعدی و زوج (x, U) را یک کارت موضعی می‌نامیم.

تابع f را از کلاس C^k گوییم هر گاه k بار مشتق پذیرومشتق k ام آن پیوسته باشد.

[۱۲] Riemann

[۱۳] Minkowski

[۱۴] Cologn

اگر (x,U) و (y,V) دو کارت موضعی n بعدی روی M باشند گوییم این دو کارت مرتبط از کلاس C^k هستند هرگاه $x(U\cap V)$ و $y(U\cap V)$ باز بوده و نگاشت زیر

$$yox^{-1} : x(U\cap V) \longrightarrow y(U\cap V)$$

ومعکوس آن توابعی از کلاس C^k بین دو زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ باشند.

یک خانواده از کارتهای C^k مرتبط $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ تشکیل یک اطلس n بعدی C^k روی M می دهند هرگاه حوزه تعریف آنها M را بپوشاند.
مجموعه M همراه با یک اطلس ماکزیمال n بعدی C^k(که بنابر لم زورن موجود است) را یک منیفلد دیفرانسیل پذیر n بعدی از کلاس C^kمی‌نامند .

نگاشت $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه $p\in M$ دیفرانسیل پذیر گوییم هر گاه برای کارت دلخواه (x,U) حول نقطه p نگاشت

$$gox^{-1} : x(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

دیفرانسیل پذیر باشد. نگاشت g را روی M دیفرانسیل پذیر گویند هر گاه در تمام نقاطش دیفرانسیل پذیر باشد.
ثابت می‌شود که دیفرانسیل پذیری یک نگاشت مستقل از انتخاب کارت است [۱].
اگر M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد منظور از $C^\infty(M)$ مجموعه همه توابع حقیقی مقدار از کلاس C^∞ روی M است.

تعریف ۱.۲.۱. اگر $p\in M$ آنگاه یک بردار مماس بر M در نقطه ی p عبارتست از یک نگاشت:

$$X_p : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

به قسمی که:

$$\forall\ a,b,k\in\mathbb{R} \quad f,g\in C^\infty(M)$$

۱. $X_p(af+bg) = aX_p(f) + bX_p(g)$

۲. $X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$

۳. $X_p(k) = ۰$

مجموعه همه بردارهای مماس بر M در p تشکیل یک فضای برداری می‌دهند که آن را با T_pM نمایش می‌دهیم. ثابت می‌شود که اگر x یک کارت روی M باشد آنگاه خانواده مشتقات جزیی $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=۱}^{n}$ یک پایه برای T_pM است [۱]. بنابراین هر بردار مماس X_p را می‌توان به صورت

$$X_p = \sum_{i=۱}^{n} y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

نمایش داد.

فرض کنید $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ در این صورت TM یک منیفلد دیفرانسیل پذیر $۲n$ بعدی است که آن را کلاف مماس می‌نامیم. مختصات هر نقطه در TM توسط $۲n$ تایی (x^i, y^i) مشخص می‌شود که در آن x^i ها مختصات نقطه p و y^i ها مولفه های بردار مماس X_p هستند.

فرض کنید $T_{Xp}(TM)$ فضای مماس بر منیفلد TM در X_p باشد. به راحتی مشابه آنچه که در اثبات پایه بودن $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ گفته شده است می‌توان ثابت کرد $۲n$ تایی $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$ پایه ای موضعی برای $T_{X_p}(TM)$ است. قرار می‌دهیم

$$T(TM) = \bigcup_{X_p\in TM} T_{X_p}(TM)$$

در این صورت TTM نیز یک منیفلد دیفرانسیل پذیر $۴n$ بعدی است که آن را کلاف مماس دوم M می‌نامند.

فرض کنید (x', U')با مولفه های $(x'^{۱}, ..., x'^{n})$ یک دستگاه مختصات دیگر در همسایگی نقطه $m \in M$ باشد آنگاه:

$$x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$m \mapsto ((x^{۱}(m), ..., x^n(m))$$

$$x' : U' \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$m \mapsto (x'^{۱}(m), ..., x'^{n}(m))$$

نگاشت تغییر کارت عبارتست از :

$$x' o x^{-۱} : x(U \cap U') \longrightarrow x'(U \cap U')$$

$$(x^1(m), ..., x^n(m)) \mapsto (x'^1(m), ..., x'^n(m))$$

همچنین با توجه به قرارداد جمع بندی در هندسه دیفرانسیل مبنی بر حذف علامت زیگما هنگامی که یک اندیس در بالا وپایین تکرار شود[۱۵] داریم:

$$X_m = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \ , \ X_m = y'^i \frac{\partial}{\partial x'^i} \ , \ y'^k = y^i \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \ , \ y^k = y'^i \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$$

بنابراین ژاکوبین ماتریس تغییر مختصات داده شده با توجه به روابط بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^i}{\partial x^i} & \frac{\partial x'^i}{\partial y^i} \\ \frac{\partial y'^i}{\partial x^i} & \frac{\partial y'^i}{\partial y^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^i}{\partial x^i} & 0 \\ y^a \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^i \partial x^a} & \frac{\partial x'^i}{\partial x^i} \end{pmatrix}$$

با توجه به قضیه تابع معکوس چون دترمینان فوق مثبت است می‌توان گفت عکس نگاشت تغییر مختصات موجود و دیفرانسیل پذیر است.

چون $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$ پایه ای برای $T_{X_m}(TM)$ است لذا:

$$\frac{\partial}{\partial x'^j} = A^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} + B^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}$$

با اثر دادن طرفین رابطه بر x^k داریم: $A^k_j = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}$ وبا اثر دادن طرفین رابطه بر y^k داریم:

$$B^k_j = \frac{\partial y^k}{\partial x'^j} - \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x'^j} = y'^i \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^j}$$

بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + y'^i \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^i \partial x'^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

وبه همین ترتیب می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{\partial}{\partial y'^j} = \frac{\partial y^i}{\partial y'^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

فرض کنید $E \subseteq M$. یک میدان برداری X روی E تابعی است که به هر نقطه $m \in E$

[۱۵] برای مشاهده قانون رقص اندیس های انیشتین به [۱] مراجعه شود.

یک بردار مماس X_m از T_mM را نسبت می‌دهد به بیان دیگر:

$$X : E \longrightarrow TM$$

$$m \mapsto X_m \in T_mM$$

یک میدان برداری از کلاس C^∞ است هر گاه دامنه آن در M باز بوده وبرای هر m در دامنه X و هر $f \in C^\infty(M)$ داشته باشیم $X_m.f$ نیز عضوی از $C^\infty(M)$ باشد.

قضیه ۱.۲.۲. [۱] *فرض کنید X یک میدان برداری از کلاس C^k روی باز W از M باشد. به ازای هر W عددی مانند $\epsilon > 0$، همسایگی از m مانند U در W ویک خانواده یکتا از دیفئومورفیسم های C^k مانند $\{\phi_t\}$ وجود دارد به طوری که:*

$$\phi_t : U \longrightarrow \phi_t(U) \subseteq M$$

و ϕ_t با شرط $|t| < \epsilon$ در موارد زیر صدق می‌کند:

- نگاشت

$$\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow W$$
$$(t, m) \mapsto \phi_t(m)$$

ازکلاس C^k است.

- $|t| < \epsilon, |s| < \epsilon, |s+t| < \epsilon \qquad \phi_s o \phi_t = \phi_{s+t}$

$$\phi_0 = Id$$

که در آن o عمل ترکیب توابع است.

- *اگر $m \in U$ آنگاه X_m بردار سرعت منحنی $\phi_m : t \mapsto \phi_t(m)$ است. به بیان دیگر:*

$$X(m) = \frac{d}{dt}\phi_t(m)\big|_{t=0}$$

در این صورت خانواده $\{\phi_t\}$ از دیفئومورفیسم های موضعی را گروه یک پارامتری تولید شده توسط X می‌نامیم.
بنابراین هر میدان برداری یک گروه موضعی یک پارامتری تعریف می‌کند و برعکس [۱].

تعریف ۳.۲.۱. میدان برداری X را کامل [۱۶] می‌نامیم هر گاه گروه موضعی یک پارامتری آن به ازا هر عدد حقیقی t تعریف شود.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم $X,Y \in TM$ در این صورت نگاشت:

$$[X,Y] : C^{\infty}(TM) \longrightarrow C^{\infty}(TM)$$

$$f \mapsto [X,Y].f$$

که در آن

$$[X,Y].f = X.(Y.f) - Y.(X.f)$$

کروشه دو میدان برداری X و Y نامیده می‌شود.

[۱۶] Complete

فصل ۲

فضای فینسلر

۱.۲ مقدمه

در این بخش ابتدا به تعریف منیفلد ریمانی که مقدمه ای بر منیفلد فینسلر است می‌پردازیم.
در این راستا ابتدا تانسورها را مورد بررسی قرار می‌دهیم وسپس با استفاده از آنها به معرفی ساختار ریمانی روی منیفلد دیفرانسیل پذیر می‌پردازیم. در ادامه منیفلد فینسلری را تعریف کرده ومترها وساختارهای خاص آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.
در انتهای فصل هموستار خطی وغیر خطی که نقش بسیار مهمی در اثبات قضایای اصلی این تحقیق دارد تعریف خواهد شد.

۲.۲ منیفلد ریمانی

فرض کنید E یک فضای برداری n بعدی روی میدان K باشد، هر نگاشت p خطی f را روی E یک تانسور از نوع $\binom{\cdot}{p}$ کوواریان می‌نامیم.

$$f : \underbrace{E \times \ldots \times E}_{p \text{ مرتبه}} \longrightarrow K$$

مجموعه همه تانسورهای p مرتبه کوواریان را به $\otimes^{\cdot}_{p} E$ نمایش می‌دهیم.

یک تانسور $\binom{\cdot}{p}$ کوواریان متناوب را یک p-فرمی می‌نامیم.

$$f:\underbrace{E\times\ldots\times E}_{p\ \text{مرتبه}}\longrightarrow K$$

$$f(X_1,...,X_i,...,X_j,...,X_p)=-f(X_1,...,X_j,...,X_i,...,X_p)$$

مجموعه تمام تانسورهای $\binom{\cdot}{q}$ کوواریان روی E^* (که E^* فضای دوگان E می‌باشد) را تانسورهای $\binom{q}{\cdot}$ کنتراواریان روی E گویند.

$$f:\underbrace{E^*\times\ldots\times E^*}_{q\ \text{مرتبه}}\longrightarrow K$$

در حالت کلی تانسور $\binom{q}{p}$ یعنی p مرتبه کوواریان و q مرتبه کنتراواریان یک نگاشت $p+q$ خطی به فرم زیر است:

$$f:\underbrace{E\times\ldots\times E}_{p\ \text{مرتبه}}\times\underbrace{E^*\times\ldots\times E^*}_{q\ \text{مرتبه}}\longrightarrow K$$

می‌دانیم که اگر M یک منیفلد باشد آنگاه برای هر $m\in M$ داریم T_mM یک فضای برداری است. پس قرار می‌دهیم $E=T_mM$ و $K=C^\infty(M)$ لذا تعریف زیر را داریم

تعریف ۱.۲.۲. قرار می‌دهیم

$$\otimes_p^{\cdot}TM=\bigcup_{m\in M}\otimes_p^{\cdot}T_mM$$

اگر M یک منیفلد n بعدی باشد، منظور از یک p تانسور کوواریان روی M، یک p تانسور کوواریان روی TM است یعنی

$$\otimes_p^{\cdot}M\cong\otimes_p^{\cdot}TM$$

مجموعه تمام p-فرمی ها روی M را با $\Omega^p(M)$ نشان می دهیم.
اگر T یک تانسور p مرتبه کوواریان روی منیفلد n بعدی M باشد، نمایش آن به صورت زیر است [۱]:

$$T(X_{i_1},...,X_{i_p})=t_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{i_p}(X_{i_1},...,X_{i_p})\qquad 1\leq i_k\leq n\ ,\ \ k=1,..,p$$

واگر T تانسور مرتبه $\binom{q}{p}$ باشد داریم:

$$T(X_{i_1},...,X_{i_p},\omega_{j_1},\ldots,\omega_{j_q}) = t^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_p} \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_q}}(X_{i_1},...,X_{i_p},\omega_{j_1},\ldots,\omega_{j_q})$$

$$1 \leq i_k \leq p, 1 \leq j_k \leq q \quad ,\omega_{j_k} \in C^\infty(M)$$

که در آن $X_{i_k} \in T_mM$ و $\{dx^{i_k}\}$ دوگان پایه $\{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\}$ از T_mM نسبت به کارت (x,U) حول نقطه $m \in M$ می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۲. یک متر ریمان [1] یا ساختار ریمانی روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M نگاشتی است که به هر $p \in M$ یک ضرب داخلی $\langle,\rangle_p$ روی فضای مماس T_pM که متقارن ،دو خطی و مثبت معین است نسبت می‌دهد. به بیان دیگر

$$g: M \longrightarrow \{TM \text{ فضای ضرب داخلی روی } \}$$

$$p \mapsto g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$< X,Y >_p := g_p(X,Y) = g_{ij}dx^i \otimes dx^j(X,Y)$$

که در آن

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}|_p \right\rangle_p$$

یک تابع دیفرانسیل پذیر روی M است.

معمولا در صورت عدم وجود ابهام اندیس p در تابع $\langle,\rangle_p$ نوشته نمی‌شود.

g_{ij} ها را مولفه های متر ریمان می‌نامند. یک منیفلد دیفرانسیل پذیر به همراه یک متر ریمان، منیفلد ریمانی نامیده می‌شود.

می‌توان متر ریمان را به عنوان یک تانسور به صورت زیر نیز تعریف کرد:

منظور از یک متر ریمان روی منیفلد M یک تانسور g از نوع $\binom{0}{2}$ به قسمی که:

- متقارن باشد $\qquad g(X,Y) = g(Y,X) \qquad \forall X,Y \in TM$
- مثبت معین باشد $g(X,Y) \geq 0$

ومنظور از یک متر شبه ریمان [2] روی منیفلد M یک تانسور g از نوع $\binom{0}{2}$ است که

[1] Riemannian metric

[2] Pseudo Riemannian metric

متقارن بوده و اگر به ازا هر $Y \in TM$ داشته باشیم: $g(X,Y)=۰$ آنگاه $X=۰$.

در واقع هر متر ریمان به صورت $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ نوشته می‌شود که در آن $g_{ij} = g_{ji}$.
منیفلد M را همراه با یک متر ریمان یک *منیفلد ریمانی* می‌نامیم.

مثال ۳.۲.۲. ضرب داخلی بردارها روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ یک متر ریمان به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$g(X,Y) = g_{ij}dx^i dx^j(X,Y)$$

که در آن

$$g_{ij} =< e_i, e_j >= \delta^i_j$$

بنابراین:

$$g = (dx^۱)^۲ + (dx^۲)^۲$$

با تعریف متر ریمان روی یک منیفلد می‌توان طول قوس منحنی c را روی آن با استفاده از رابطه

$$s = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{\frac{۱}{۲}} dt$$

به دست آورد که اثبات این رابطه در کتب مقدماتی هندسه دیفرانسیل آمده است [۵]. لذا محاسبه طول قوس یک منحنی روی یک منیفلد مستلزم تعریف متر ریمان روی آن منیفلد است و این خود انگیزه ای بود برای تعریف فضای فینسلر که در آن می‌توان بدون استفاده از ضرایب متر ریمان طول قوس یک منحنی روی منیفلد را محاسبه کرد که در این فضا نیز اگر (x,U) یک کارت روی منیفلد باشد تابعی با متغیرهای x^i و dx^i برای اندازه گیری طول قوس معرفی می‌شود[۴].

۳.۲ منیفلد فینسلری

تعریف ۱.۳.۲. منظور از یک ساختار فینسلری روی منیفلد M نگاشت

$$F : TM \setminus \circ \longrightarrow [۰, \infty)$$
$$F(x,y) = F(y^i \tfrac{\partial}{\partial x^i}|_x)$$

است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

- $F(x,y)$ از کلاس C^∞ باشد.