بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

پایان‌نامه

جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

عنوان:

یک روش نقطه-درونی اولیه-دوگان بهنگام‌سازی بزرگ دینامیکی برای بهینه‌سازی خطی

استاد راهنما:

دکتر بهروز خیرفام

پژوهشگر:

نسرین حسین‌پور

شهریورماه ۱۳۹۳

تبریز-ایران

تقدیم

به پدرم به استواری کوه، مادرم به زلالی چشمه

سپاس‌گزاری...

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

تشکر می‌کنم از استاد مهربانم آقای دکتر **بهروز خیرفام** به خاطر زحمات فراوانی که برایم کشیدند و استادی را به تمام معنا در حقم تمام کردند.

از آقایان دکتر **جعفر پورمحمود** و **علیرضا غفاری حدیقه** نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

و بوسه می‌زنم بر دستان مادر و پدر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم.

نسرین حسین‌پور

شهریورماه ۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

روش‌های نقطه-درونی اولیه-دوگان برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی مؤثر می‌باشند، از لحاظ تئوری بهترین کران پیچیدگی شناخته شده برای الگوریتم‌های با طول گام کوتاه، در مقایسه با الگوریتم‌های بهنگام‌سازی بزرگ بهتر است. ولی در عمل الگوریتم‌های بهنگام‌سازی بزرگ مؤثر بوده و این پدیده را شکاف بین تئوری و عمل می‌نامند.

در این پایان‌نامه ابتدا برخی ویژگی‌های تابع نزدیکی خود-منظم برای مسائل بهینه‌سازی خطی بیان می‌شود که توسط رس[1] و همکاران مطرح گردیده است. توابع نزدیکی خود-منظم خاص که ما در این‌جا از آن‌ها استفاده می‌کنیم، دارای ویژگی‌های خاصی هستند این ویژگی‌ها سبب می‌شوند که وقتی تکرار کنونی در یک همسایگی بزرگ از مسیر مرکزی قرار داشته باشد، تنها انتخاب طبیعی برای بهنگام‌سازی، بهنگام‌سازی بزرگ باشد. ما این نتایج را برای طرح یک روش نقطه-درونی برپایه توابع خود-منظم خاص $\Gamma_{1,3}$ و $\Gamma_{1,q}$ به‌کار می‌بریم و نشان می‌دهیم که این روش می‌تواند همانند روش‌های نقطه-درونی استاندارد، تغییرهای شکاف دوگانی را پیش‌بینی کند. روش ارائه شده یک روش بهنگام‌سازی بزرگ دینامیکی در همسایگی بزرگ بوده که برخلاف روش‌های بهنگام‌سازی بزرگ پیشین از هیچ تکرار داخلی برای بهبود مرکزیت استفاده نمی‌کند.

کران تکرار در بدترین حالت برای این روش $\mathcal{O}\left(qn^{\frac{q+1}{2q}}\log(\frac{n}{\epsilon})\right)$ می‌باشد، که q پارامتر مانع اندازه نزدیکی خود-منظم می‌باشد. برای $q = \log n$ این الگوریتم بهترین کران پیچیدگی را برای روش‌های

[1] Roos

بهنگام‌سازی بزرگ، یعنی $\mathcal{O}\left(\sqrt{n}\log n \log\frac{n}{\epsilon}\right)$ را نتیجه می‌دهد. همچنین برای تابع نزدیکی $\Gamma_{1,3}$ کران پیچیدگی در بدترین حالت، یعنی $\mathcal{O}\left(n^{\frac{2}{3}}\log\frac{n}{\epsilon}\right)$ را به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی خطی، روش نقطه-درونی اولیه-دوگان، تابع نزدیکی خود-منظم، پیچیدگی چندجمله‌ای.

پیشگفتار

بهینه‌سازی خطی (LO) مسئله‌ای با تابع هدف خطی تحت برخی محدودیت‌های خطی به‌صورت مساوی یا نامساوی می‌باشد. مسئله‌ی LO یکی از پرکاربردترین زمینه‌های ریاضی است. اولین روش عملی برای حل مسائل LO روش سادک بوده که درسال ۱۹۴۷ توسط دانتزیگ [۲] ارائه گردیده است [۳]. سپس روش چندجمله‌ای برای حل مسائل LO توسط خاچیان [۳] درسال ۱۹۷۹ ارائه گردید که این روش براساس تکنیک بیضی‌گون برای بهینه‌سازی غیرخطی بوده است. با استفاده از این تکنیک خاچیان نشان داد که مسائل LO در مدت زمان چندجمله ای قابل حل هستند [۸].

در سال ۱۹۸۴ کارمارکار [۴] یک الگوریتم چندجمله ای با کران پیچیدگی بهتری از الگوریتم خاچیان ارائه داد که در عمل هم، کاراتر از الگوریتم خاچیان بوده است [۷]. در بین سال‌های ۱۹۸۴ تا ۱۹۸۶ بیش از ۱۳۰۰ مقاله برای درک بهتر روش تصویری کارمارکار ارائه گردیدند که این روش‌ها به روش‌های نقطه-درونی مشهور شدند. نام روش‌های نقطه-درونی از این حقیقت که نقاط تولید شده به‌وسیله‌ی این روش، در داخل ناحیه‌ی شدنی قرار دارند ناشی شده است.

دسته‌ای از روش‌های نقطه-درونی روش‌های تعقیب -مسیر بوده که به سه گروه تقسیم می‌شوند: روش‌های با طول گام کوتاه، روش‌های بهنگام‌سازی بزرگ و روش‌های پیشگو-تصحیح.

با وجود این‌که کران پیچیدگی الگوریتم‌های با طول گام کوتاه بهتر از کران پیچیدگی الگوریتم‌های بهنگام‌سازی بزرگ بوده ولی در عمل الگوریتم‌های بهنگام‌سازی بزرگ مؤثر واقع شدند که این را

[۲] Dantzing
[۳] Khachian
[۴] Karmarkar

شکاف بین تئوری و عمل می‌گویند. تلاش‌های بسیاری برای بهتر کردن کران تکرار الگوریتم‌های بهنگام‌سازی بزرگ صورت گرفته است. رس [۵]، پنگ [۶]و ترلاکی [۷] اولین کسانی بودند که به بررسی روش‌های نقطه-درونی اولیه-دوگان براساس کلاسی از توابع مانع، تحت عنوان توابع هسته‌ی خود-منظم، برای مسائل بهینه‌سازی خطی پرداخته و کران پیچیدگی را برای الگوریتم‌های بهنگام‌سازی بزرگ بهبود بخشیدند[۹]. بای [۸]، الغامی [۹]و رس روش‌های نقطه-درونی اولیه-دوگان براساس دسته‌ای از توابع هسته تحت عنوان توابع هسته‌ی واجد شرایط، که لزوماً خود-منظم نبوده را ارائه دادند[۱].

در این پایان‌نامه براساس ویژگی‌های جالب تابع نزدیکی خود-منظم، کران تکرار را برای مسائل LO بیان می‌کنیم.

در فصل اول، تعاریف، مفاهیم مقدماتی و ویژگی‌هایی از توابع خود-منظم خاص بیان می‌شود. در فصل دوم، یک روش بهنگام‌سازی دینامیکی برای یک تابع خود-منظم بیان می‌شود و سپس پیچیدگی الگوریتم مشخص می‌گردد. در فصل سوم، روش بهنگام‌سازی بزرگ دینامیکی برای خانواده‌ای از توابع خود-منظم همراه با پیچیدگی الگوریتم بیان می‌شود و نهایتاً برخی نتایج در فصل چهارم بیان می‌گردد.

[۵] Roos
[۶] Peng
[۷] Terlaky
[۸] Bai
[۹] El Ghami

نمادها

مجموعه بردارهای با n مؤلفه‌ی نامنفی	$\mathbb{R}^n_+$
مجموعه بردارهای با n مؤلفه‌ی مثبت	$\mathbb{R}^n_{++}$
مؤلفه‌ی iام x	x_i
$\forall u \in \mathbb{R}^n$، $\parallel u \parallel_۲ = (\sum_{i=۱}^{n} u_i^۲)^{\frac{۱}{۲}}$	$\parallel x \parallel$
بزرگترین مؤلفه‌ی x	$x_{\max}$
کوچکترین مؤلفه‌ی x	$x_{\min}$

فصل ۱
مفاهیم مقدماتی و تعاریف

ابتدا برخی مفاهیم مقدماتی و قضیه‌های اساسی مربوط به روش‌های نقطه-درونی اولیه-دوگان را برای بهینه‌سازی خطی بیان می‌کنیم.

۱.۱ مسئله برنامه‌ریزی خطی

یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت

$$(\mathrm{P}) \quad \min\{c^T x \ : \ Ax = b,\ x \geq 0\}$$

تعریف می‌شود که در آن $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $\mathbf{rank}(A) = m$، $x, c \in \mathbb{R}^n$ و $b \in \mathbb{R}^m$. دوگان این مسئله به‌صورت

$$(\mathrm{D}) \quad \max\{b^T y : A^T y + s = c,\ s \geq 0\}$$

بیان شده است که در آن $s \in \mathbb{R}^n$ و $y \in \mathbb{R}^m$.

هر بردار نامنفی x که در محدودیت‌های $Ax = b$ صدق کند یک جواب شدنی مسئله اولیه و هر (y, s) که در قیود $A^T y + s = c$ صدق کند یک جواب شدنی دوگان نامیده می‌شود. قضیه زیر شرایط لازم و کافی برای بهینگی یک جواب اولیه-دوگان (x, y, s) را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۱ (*شرایط کروش- کان- تاکر*[۱]): *هرگاه x نقطه‌ی شدنی برای (P) و (y,s) نقطه‌ی شدنی برای (D) باشد، آنگاه شرایط لازم و کافی برای این‌که x و (y,s) جواب‌های بهینه به‌ترتیب برای (P) و (D) باشند، این است که*

$$\begin{aligned} Ax &= b, \quad x \geq ۰, \\ A^T y + s &= c, \quad s \geq ۰, \\ xs &= ۰. \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

در دستگاه ۱.۱ ، معادله سوم شرط مکملی نامیده می‌شود.

در ادامه دو لم که در تحلیل الگوریتم‌ها زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۱ [۸]: *به ازای هر $t \geq -۱$ و $۰ \leq \alpha \leq ۱$ ، داریم*

$$(۱+t)^\alpha \leq ۱ + \alpha t, \tag{۲.۱}$$

برهان: به ازای هر $t \geq -۱$ و $۰ \leq \alpha \leq ۱$ ، تعریف می‌کنیم

$$f(t) = (۱+t)^\alpha - ۱ - \alpha t$$

که مشتق‌های اول و دوم به‌صورت زیر هستند

$$f'(t) = \alpha(۱+t)^{\alpha-۱} - \alpha, \qquad f''(t) = \alpha(\alpha-۱)(۱+t)^{(\alpha-۲)}.$$

واضح است که $f''(t) \leq ۰$ بنابراین تابع $f(t)$ مقعر بوده و چون $f'(۰) = ۰$، پس $f(t)$ در $t = ۰$ بیشترین مقدارش را می‌گیرد، یعنی

$$f(t) \leq f(۰) = ۰.$$

که از $f(۰) = ۰$ نامساوی مطلوب نتیجه می‌شود. □

[۱] Kaurush-Kuhn-Tucker

لم ۱.۲ [۸]: *فرض کنید $h(t)$ یک تابع محدب مشتق‌پذیر مرتبه دوم باشد به طوری‌که $h(0) = 0$ و $h'(0) < 0$. به‌علاوه فرض کنید $h(t)$ در $t^* > 0$ کمترین مقدارش را بگیرد. اگر $h''(t)$ در $[0, t^*]$ صعودی باشد، آنگاه به ازای هر t در $0 \leq t \leq t^*$،*

$$h(t) \leq \frac{th'(0)}{2}$$

برهان : با استفاده از $h(0) = 0$، $h''(t) \geq 0$ برای $t > 0$ و $h'(t) \leq 0$ به ازای هر $t \in [0, t^*]$ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_0^t h'(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= h'(0)t + \int_0^t \int_0^\xi h''(\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi \leq h'(0)t + \int_0^t \xi h''(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= h'(0)t + \int_0^t \xi \mathrm{d}h'(\xi) \\
&= h'(0)t + (\xi h'(\xi))\,|_0^t - \int_0^t h'(\xi)\mathrm{d}\xi = h'(0)t - h(t),
\end{aligned}$$

به این‌ترتیب لم ثابت می‌شود. □

۱.۱.۱ مسیر مرکزی

ایده‌ی اصلی روش‌های نقطه-درونی اولیه-دوگان این است که معادله‌ی سوم دستگاه (۱.۱) را با معادله‌ی غیرخطی $xs = \mu e$، که در آن $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$ و $\mu > 0$، عوض می‌کنند که منجر به دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
Ax &= b, \quad x \geq 0, \\
A^T y + s &= c, \quad s \geq 0, \\
xs &= \mu e.
\end{aligned} \tag{۳.۱}$$

با توجه به تعریف $\mu > 0$ و بردار e، پس x و s فقط در صورت مثبت بودن می‌توانند جواب دستگاه فوق باشند. بنابراین بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم که (x^0, y^0, s^0) ای وجود دارد به‌طوری

که

$$Ax^{\circ} = b, \quad x^{\circ} > \circ, \quad A^T y^{\circ} + s^{\circ} = c, \quad s^{\circ} > \circ.$$

این شرط به شرط نقطه-درونی مشهور است. دستگاه (۳.۱) را می‌توان در یک مسئله‌ی بزرگتر خود-دوگان جانشانی کرد که در شرط نقطه-درونی صدق می‌کند، بنابراین با استفاده از جانشانی خود-دوگان، فرض می‌کنیم $x^{\circ} = s^{\circ} = e$، یک نقطه‌ی اکیداً شدنی باشد در این‌صورت جواب بهینه برای مسائل اولیه و دوگان وجود دارد، پس شرط نقطه-درونی یک شرط لازم و کافی برای قابل حل بودن دستگاه (۱.۱) است. در واقع درصورت برقراری شرط نقطه-درونی، به ازای هر $\mu > \circ$ دستگاه (۳.۱) دارای جواب یکتاست که آن را با $(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$ نشان می‌دهیم. $x(\mu)$ را μ-مرکز (P)، $(y(\mu), s(\mu))$ را μ -مرکز (D) و مجموعه‌ی $\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) : \mu > \circ\}$ را مسیر مرکزی (P) و (D) می‌نامیم [۱۵]. اگر $\mu \to \circ$، آنگاه حد مسیر مرکزی وجود دارد. چون حد در شرط مکملی صدق می‌کند، پس جواب‌های بهینه برای مسائل (P) و (D) به‌دست می‌آیند. توجه کنید که معادله‌ی سوم دستگاه (۳.۱) معادله‌ی غیرخطی بوده و برای حل آن باید از روش‌های تکراری استفاده شود. با به کار بستن روش نیوتن جواب‌های تقریبی دستگاه (۳.۱) را می‌توان به‌دست آورد [۱۷].

۲.۱.۱ جهت‌های نیوتن

فرض کنید $x > \circ$ و $s > \circ$، برای $\mu > \circ$ یک جواب دستگاه (۳.۱) باشند، هدف این است که با تعیین جهت‌های جستجوی Δx، Δy و Δs در جهت μ-مرکزها حرکت کنیم. بنابراین می‌خواهیم نقاط تکرار $x + \Delta x$، $y + \Delta y$ و $s + \Delta s$ در دستگاه (۳.۱) صدق کنند یعنی

$$\begin{aligned}
A(x + \Delta x) \qquad &= b, \quad x + \Delta x > \circ,\\
A^T(y + \Delta y) + (s + \Delta s) \quad &= c, \quad s + \Delta s > \circ,\\
(x + \Delta x)(s + \Delta s) \qquad &= \mu e.
\end{aligned}$$

چون x و s جواب‌های شدنی اولیه و دوگان هستند خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A\Delta x &= 0, \\ A^T\Delta y + \Delta s &= 0, \\ s\Delta x + x\Delta s + \Delta x\Delta s &= \mu e - xs. \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

معادله‌ی سوم با توجه به عبارت درجه‌ی دوم $\Delta x\Delta s$ غیرخطی است. بنابراین با نادیده گرفتن عبارت غیرخطی $\Delta x\Delta s$، دستگاه بالا منجر به دستگاه زیر می‌شود

$$\begin{aligned} A\Delta x &= 0, \\ A^T\Delta y + \Delta s &= 0, \\ s\Delta x + x\Delta s &= \mu e - xs. \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

به‌دلیل نادیده گرفتن $\Delta x\Delta s$، نقاط تکرار $x+\Delta x$، $y+\Delta y$ و $s+\Delta s$ روی مسیر مرکزی قرار نمی‌گیرند ولی تقریب‌های بهتری برای جواب هستند. قضیه زیر نشان می‌دهد که جهت‌های جستجوی نیوتن $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ جواب یکتای دستگاه (۵.۱) هستند.

قضیه ۱.۲ [۱۲]: *دستگاه (۵.۱) دارای جواب یکتای به‌صورت*

$$\Delta y = \left(AXS^{-1}A^T\right)^{-1}\left(b - \mu AS^{-1}\right).$$

$$\Delta s = -A^T\Delta y.$$

$$\Delta x = \mu s^{-1} - x - xs^{-1}\Delta s.$$

می‌باشد که در آن $X := \mathbf{diag}(x)$ *و* $S := \mathbf{diag}(s)$.

برهان : از معادله سوم دستگاه (۵.۱) داریم

$$\Delta x + xs^{-1}\Delta s = \mu s^{-1} - x. \tag{۶.۱}$$

با ضرب این معادله از چپ به A و استفاده از $A\Delta x = 0$ و $Ax = b$ نتیجه می‌شود که

$$AXS^{-1}\Delta s = \mu As^{-1} - Ax = \mu As^{-1} - b.$$

با جایگذاری $\Delta s = -A^T \Delta y$ از معادله دوم (۵.۱) در معادله بالا حاصل می‌شود

$$AXS^{-1}A^T\Delta y = b - \mu A s^{-1}.$$

چون A از رتبه سطری کامل بوده پس $AXS^{-1}A^T$ معکوس‌پذیر است. بنابراین

$$\Delta y = \left(AXS^{-1}A^T\right)^{-1}\left(b - \mu AS^{-1}\right).$$

با جایگذاری Δy در $\Delta s = -A^T\Delta y$، Δs به‌دست می‌آید و نهایتاً Δx از (۶.۱) تعیین می‌گردد. □

۳.۱.۱ تابع هسته

به تابع یک متغیره $\psi(t) : (0, \infty) \to [0, \infty)$ تابع هسته می‌گوییم، هرگاه ψ دوبار مشتق‌پذیر بوده و در خاصیت‌های زیر صدق کند:

۱. $\psi'(1) = \psi(1) = 0$

۲. برای هر $t > 0$ $\psi''(t) > 0$

۳. $\lim_{t\to 0^+}\psi(t) = \lim_{t\to\infty}\psi(t) = +\infty$.

بنابراین تابع هسته $\psi(t)$، یک تابع نامنفی و اکیداً محدب می‌باشد که می‌تواند با استفاده از

$$\psi(t) = \int_1^t \int_1^\xi \psi''(\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi, \qquad (۷.۱)$$

مشخص گردد.

لم ۱.۳ [۸]: *عبارت‌های زیر معادل‌اند:*

۱. $\psi(\sqrt{t_1t_2}) \le \frac{1}{2}(\psi(t_1) + \psi(t_2))$

۲. *برای* $t > 0$، $\psi'(t) + t\psi''(t) \ge 0$

۳. $\psi(e^{\xi})$ *محدب است.*

خاصیت سوم تحدب نمایی یا e-محدب نامیده می‌شود.

لم ۱.۴ [۴]: *برای تابع مشتق‌پذیر مرتبه‌ی دوم $\psi(t)$، خاصیت‌های زیر معادل‌اند:*

۱. *به ازای هر* $t_1, t_2 > 0$، $\psi(\sqrt{\frac{t_1^2+t_2^2}{2}}) \leq \frac{1}{2}(\psi(t_1)+\psi(t_2))$

۲. *به ازای هر* $t > 0$، $t\psi''(t) - \psi'(t) \geq 0$

۳. $\psi(\sqrt{\xi})$ *محدب است.*

برهان: ۱ $\Leftrightarrow$ ۳: می‌دانیم $\psi(\sqrt{\xi})$ محدب است اگر و تنها اگر $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}_+$ باشند به‌طوری‌که

$$\psi\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\xi_1+\xi_2)}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\psi(\sqrt{\xi_1})+\psi(\sqrt{\xi_2})\right).$$

حال با قرار دادن $t_1 := \sqrt{\xi_1}$ و $t_2 := \sqrt{\xi_2}$ خواهیم داشت

$$\psi\left(\sqrt{\frac{t_1^2+t_2^2}{2}}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\psi(t_1)+\psi(t_2)\right).$$

۲ $\Leftrightarrow$ ۳: مشتق مرتبه‌ی دوم $\psi(\sqrt{\xi})$ نامنفی است اگر و تنها اگر

$$\frac{1}{4\xi^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{\xi}\psi''(\sqrt{\xi}) - \psi'(\sqrt{\xi})\right) \geq 0,$$

با جایگذاری $t := \sqrt{\xi}$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{4t^3}\left(t\psi''(t) - \psi'(t)\right) \geq 0,$$

این ایجاب می‌کند که

$$t\psi''(t) - \psi'(t) \geq 0, \qquad \forall t > 0,$$

و اثبات تمام است. $\square$

لم ۱.۵ [۴]: *به ازای هر* $t \geq 1$،

$$t\psi'(t) \geq \psi(t).$$

برهان : تعریف کنید

$$g(t) := t\psi'(t) - \psi(t).$$

واضح است که $g(1) = 0$. به‌علاوه داریم

$$g'(t) = t\psi''(t) \geq 0.$$

این معنی می‌دهد که $g(t)$ برای $t \geq 1$ صعودی است پس

$$g(t) \geq g(1) = 0.$$

□

۴.۱.۱ تابع خود-منظم

در این قسمت برخی تعریف‌ها و ویژگی‌های پایه‌ای از توابع هسته خود-منظم را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ [۹]: *تابع* $\psi(t) \in C^2$ که $\psi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *خود-منظم است اگر و تنها اگر در ویژگی‌های زیر صدق کند:*

۱. $\psi(t)$ *با* $t > 0$*، اکیداً محدب بوده و* $\psi(1) = \psi'(1) = 0$. *به‌علاوه ثابت‌های مثبت مانند* ν_1 *و* ν_2 *و پارامترهای* p *و* q *با* $\nu_2 \geq \nu_1 > 0$ *و* $p \geq 1$ *و* $q \geq 1$ *باشند به‌طوری‌که*

$$\nu_1 \left(t^{p-1} + t^{-1-q}\right) \leq \psi''(t) \leq \nu_2 \left(t^{p-1} + t^{-1-q}\right), \qquad (۸.۱)$$

که پارامتر q *را درجه‌ی مانع و* p *را درجه‌ی رشد می‌نامند.*

۲. *برای هر* $t_1, t_2 > 0$ *و* $r \in [0, 1]$ *داشته باشیم*

$$\psi(t_1^r t_2^{1-r}) \le r\psi(t_1) + (1-r)\psi(t_2). \tag{9.1}$$

تعریف ۱.۲ [۹]: *تابع* $\Psi(x) : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_+$ *که به‌صورت*

$$\Psi(x) = (\psi(x_1), \psi(x_2), \ldots, \psi(x_n)),$$

است، خود-منظم نامیده می‌شود اگر تابع هسته‌اش، یعنی $\psi(t) : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_+$ *خود-منظم باشد. تابع نزدیکی خود-منظم براساس تابع هسته‌ای مشخص می‌شود که دارای خاصیت خود-منظم است.*

لم زیر یک شرط معادل برای خاصیت دوم تابع خود-منظم بیان می‌کند.

لم ۱.۶ [۸]: *فرض کنید* $\psi(t) : (0, \infty) \to [0, \infty)$ *تابع مشتق‌پذیر مرتبه دوم باشد، در این‌صورت* $\psi(t)$ *در خاصیت (۹.۱) خود-منظمی صدق می‌کند اگر و تنها اگر تابع* $\psi(\exp(\zeta))$ *در* ζ *محدب باشد، یا به‌طور معادل* $\psi'(t) + t\psi''(t) \ge 0$.

برهان: با استفاده از تعریف تحدبی، $\psi(\exp(\zeta))$ محدب است اگر و تنها اگر به ازای هر $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$ و $r \in [0, 1]$،

$$\psi\left(\exp(r\zeta_1 + (1-r)\zeta_2)\right) \le r\psi(\exp(\zeta_1)) + (1-r)\psi(\exp(\zeta_2)),$$

قرار می‌دهیم $t_1 := \exp(\zeta_1)$ و $t_2 := \exp(\zeta_2)$، پس داریم

$$\psi(t_1^r t_2^{1-r}) \le r\psi(t_1) + (1-r)\psi(t_2), \quad \forall r \in [0, 1], \quad \forall t_1, t_2 \in (0, +\infty),$$

که همان رابطه‌ی (۹.۱) است. بنابراین تابع ψ در خاصیت (۹.۱) صدق می‌کند اگر و تنها اگر $\psi(\exp(\zeta))$ محدب باشد، به‌عبارت دیگر اگر و تنها اگر $\psi''(\exp(\zeta))$ نامنفی باشد یعنی

$$\exp(2\zeta)\psi''(\exp(\zeta)) + \exp(\zeta)\psi'(\exp(\zeta)) \ge 0.$$