دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز ریاضی

ارتباط بین پیوستگی و کران داری عملگرهای خطی در فضاهای نرم‌دار احتمالی

نگارش:
محمد باصری نژاد

اساتید راهنما:
دکتر محمود حاجی شعبانی
دکتر محمد جواد مهدی پور

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به پدر، مادر، خانواده

و به یاد خواهر عزیزم زینب باصری نژاد

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. اکنون با به پایان رسیدن این مقطع تحصیلی، بر خود لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در طول دوران تحصیل، به ویژه در مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه صنعتی شیراز، افتخار کسب معلومات را در محضرشان داشته‌ام، قدردانی نمایم. و وظیفه‌ی خود می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ اساتید گرامی و گرانقدر جناب آقای دکتر محمود حاجی شعبانی و جناب آقای دکتر محمد جواد مهدی‌پور که به عنوان اساتید راهنما حقیر را رهین منت خویش نمودند قدردانی کنم که جز در سایه‌ی تلاش و فعالیت مداوم آنها، انجام تحقیق حاضر میسّر نمی‌شد. سرانجام، از تک تک اعضای خانواده‌ام که با بردباری و شکیبایی، محیطی مناسب را در طول این دوران فراهم آورده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

ارتباط بین پیوستگی و کران داری عملگرهای خطی در فضاهای نرم‌دار احتمالی

نگارش:
محمد باصری نژاد

در این پایان‌نامه به بررسی مفهوم انواع کران‌داری عملگرهای خطی بین فضاهای نرم‌دار احتمالی، ارتباط بین آنها، به ویژه ارتباط آن‌ها با مفهوم پیوستگی می‌پردازیم. بعلاوه شرایطی را بدست می‌آوریم که تحت آن شرایط، عملگرهای خطی روی فضاهای نرم‌دار احتمالی متناهی‌البعد، پیوسته و کران‌دار باشند.

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

۱−۱ مقدمه

یکی از فضاهایی که در ریاضیات از اهمیت زیادی برخوردار است، فضاهای متریک آماری می‌باشد که در حال حاضر فضاهای متریک احتمالی نامیده می‌شود. فضاهای متریک احتمالی اولین بار توسط منگر [۱] در سال ۱۹۴۲ [۷] معرفی شد. ایده‌ی منگر، استفاده از توابع توزیع به جای اعداد حقیقی نا منفی، به عنوان مقدارهای متریک بود. در حقیقت وی در موقعیت‌هایی که دقیقاً فاصله‌ی بین دو نقطه مشخص نیست، احتمال مقادیر ممکن از این فاصله‌ها را به عنوان مقدار متریک معرفی کرد. تعریف منگر نقش زیادی در تفسیر و حل مسائل مکانیک کوانتوم و همچنین انتقال مفاهیم احتمالی کوانتومی از فیزیک به هندسه‌ی زیر بنایی داشت. دسته‌ی مهمی از فضاهای متریک احتمالی، فضاهای نرم‌دار احتمالی هستند که به طور خلاصه آن‌ها را با PNS نمایش می‌دهند. فضاهای نرمدار احتمالی برای اولین بار توسط سراستنف [۲] در سال ۱۹۶۳ [۸] معرفی شدند. تعاریف جدید در مورد این فضاها توسط آلسینا [۳]،شوایزر [۴] و اسکلار [۵] در سال ۱۹۹۳ [۱] ارائه شدند. شاید با قاطعیت بتوان گفت، صحبت در مورد فضاهای نرم‌دار احتمالی بدون اشاره به فضاهای متریک احتمالی غیر ممکن است. نظریه‌ی فضاهای نرم‌دار احتمالی به عنوان یک کلیت از نتایج قطعی فضاهای نرم‌دار خطی و همچنین در مطالعه‌ی معادلات عملگرهای

---

۱ Menger

۲ Šerstnev

۳ Alsina

۴ Schweizer

۵ Sklar

تصادفی از اهمیت فراوانی بر خوردار است. همچنین فضاهای نرم‌دار احتمالی ابزارهای مناسبی را به ما برای مطالعه‌ی هندسه‌ی فیزیک هسته‌ای ارائه می‌دهند و این فضاها در فیزیک کوانتوم ذرات به ویژه نظریه‌ی ریسمانی و نظریه‌ی ε^{∞} که توسط الناچی[۱] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، نقش اساسی دارند. در فضاهای نرم‌دار احتمالی مفهوم همگرایی نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد که در مکانیک کوانتومی و نظریه‌ی کلاسیک مفاهیمی مهم می‌باشند. در این فصل به بیان تعاریف، مفاهیم و قضایایی می‌پردازیم که در این پایان‌نامه به کررات از آن‌ها استفاده شده است. لازم به ذکر است که اکثر مطالب عنوان شده در این فصل از مرجع [۷] گرفته شده است.

۲−۱ توابع توزیع، tـنرم‌ها و توابع مثلث

در این بخش به بررسی توابع توزیع، tـنرم‌ها و توابع مثلث که نقشی اساسی در فضاهای نرم‌دار احتمالی و فضاهای متریک احتمالی دارند می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱: تابع $F : [-\infty, +\infty] \to [۰, ۱]$ را تابع توزیع فاصله نامند هر گاه پیوسته چپ، صعودی، $F(+\infty) = ۱$ و $F(-\infty) = ۰$ باشد. مجموعه‌ی تمام توابع به فرم فوق را فضای توابع توزیع فاصله نامیده و با نماد Δ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۱: مجموعه‌ی تمام توابع توزیع F متعلق به $\mathcal{D}$ بطوریکه که $F(۰) = ۰$ است یک زیر مجموعه‌ی محض Δ می‌باشد که آن‌را با نماد Δ^+ نمایش می‌دهند. به طور خلاصه:

$$\Delta^+ = \{F \in \Delta : F(۰) = ۰\}.$$

تعریف ۳.۱: مجموعه‌ی توابع توزیع F، متعلق به Δ بطوریکه دارای شرایط:

۱) $\lim_{t\to+\infty} F(t) = ۱$

۲) $\lim_{t\to-\infty} F(t) = ۰$

---

[۱] Elnaschie

باشند را با نماد $\mathcal{D}$ نمایش می‌دهیم. به طور خلاصه:

$$\mathcal{D}=\{F\in\Delta : \lim_{t\to+\infty} F(t)=1, \lim_{t\to-\infty} F(t)=0\}.$$

تعریف ۴.۱: مجموعه‌ی تمام توابع توزیع F متعلق به $\mathcal{D}$ که دارای خاصیت $F(0)=0$ است را با نماد $\mathcal{D}^+$ نمایش می‌دهند. بطور خلاصه:

$$\mathcal{D}^+=\{F\in\mathcal{D} : F(0)=0\}.$$

تعریف ۵.۱: فرض کنید $F,G\in\Delta$ باشند. گوییم $F\leq G$ است اگر و تنها اگر، به ازای هر $t\in[-\infty,+\infty]$، $F(t)\leq G(t)$ باشد. به وضوح این رابطه یک رابطه‌ی ترتیب روی Δ می‌باشد.

تعریف ۶.۱: به ازای هر $a\in\overline{\mathbb{R}}$ تابع ε_a را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\varepsilon_a(t)=\begin{cases} 0, & t\leq a، \\ 1, & t>a. \end{cases}$$

به وضوح به ازای هر $a\in\overline{\mathbb{R}}$، ε_a عضوی از Δ می‌باشد.

قضیه ۷.۱: ε_0 عضو ماکسیمال $(\Delta^+,\leq)$ است.

اثبات: فرض کنید F عضوی از Δ^+ باشد. در این صورت به ازای هر $t\in(0,\infty)$، $\varepsilon_0(t)=1$ و با توجه به تعریف Δ^+، همواره $F(t)\leq 1$ است. در نتیجه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. $\square$

قضیه ۸.۱: ε_∞ عضو مینیمال $(\Delta^+,\leq)$ است.

اثبات: فرض کنید F عضوی از Δ^+ باشد. در این صورت به ازای هر $t\in(0,\infty)$، $\varepsilon_\infty(t)=0$ و با توجه به نعریف Δ^+، همواره $F(t)\geq 0$ است. بنابراین چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. $\square$

تعریف ۹.۱: فرض کنید F و G دو تابع در Δ و $h\in(0,1]$ باشد. گوییم F و G دارای خاصیت

$(F,G;h)$ هستند هر گاه به ازای هر $x \in (-\frac{۱}{h}, \frac{۱}{h})$ داشته باشیم:

$$F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h)+h.$$

متر سیبلای یا متر لوی را با نماد d_S یا d_L نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_S(F,G) := \inf\{h \in (۰,۱] : (F,G;h), (G,F;h) \text{برقرار باشند}\}$$

قضیه ۱۰.۱: به ازای هر $F, G \in \Delta$ همواره $(G,F;۱)$ و $(F,G;۱)$ برقرار هستند و لذا $d_S(F,G) \leq ۱$ است.

اثبات: از آنجا که اثبات $(F,G;۱)$ و $(G,F;۱)$ مشابه می‌باشند، فقط نشان می‌دهیم که $(F,G;۱)$ همواره برقرار است. بدین منظور کافی است نشان دهیم به ازای هر $x \in (-۱,۱)$ رابطه‌ی زیر برقرار است

$$F(x-۱)-۱ \leq G(x) \leq F(x+۱)+۱.$$

با توجه به اینکه F و G صعودی، $۰ \leq F(x) \leq ۱$ و $۰ \leq G(x) \leq ۱$ می‌باشد داریم:

$$F(x-۱)-۱ \leq ۱-۱ = ۰ \leq G(x) \leq ۱ \leq F(x+۱)+۱$$

و لذا $d_S(F,G) \leq ۱$. □

قضیه ۱۱.۱: اگر رابطه‌ی $(F,G;h)$ برای $h > ۰$ برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $h_۱ > h$ نیز رابطه‌ی $(F,G;h_۱)$ برقرار است. بنابراین به وضوح اگر $d_S(F,G) = ۰$ باشد، آنگاه برای هر $h > ۰$ رابطه‌ی $(F,G;h)$ برقرار است.

اثبات: ابتدا قسمت اول قضیه را اثبات می‌کنیم. با توجه به اینکه $(F,G;h)$ برقرار است لذا به

ازای هر $x \in (-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$ داریم:

$$F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h.$$

اکنون فرض کنید $x \in (-\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_1})$ باشد. بنابراین $x \in (-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$ و در نتیجه با توجه به اینکه F تابعی صعودی است داریم:

$$F(x-h_1) - h_1 \leq F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h \leq F(x+h_1) + h_1$$

و در نتیجه اثبات قسمت اول پایان می‌پذیرد. اکنون به سراغ اثبات قسمت دوم قضیه می‌رویم. فرض کنید $d_S(F,G) = 0$ باشد. بنابراین با توجه به تعریف متر سیبلای، دنباله‌ی $\{h_n\} \subset (0,1]$ یافت می‌شود بطوریکه $h_n \to 0$ و همچنین به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $(F,G;h_n)$ و $(G,F;h_n)$ برقرار هستند. اکنون فرض کنید $h > 0$ باشد. از آنجایی که $h_n \to 0$، n_0 چنان یافت می‌شود بطوریکه $h_{n_0} < h$ است و رابطه‌ی $(F,G;h_{n_0})$ برقرار می‌باشد. بنابراین طبق قسمت اول قضیه چیزی برای اثبات باقی نخواهد ماند. □

قضیه ۱.۱۲: $d_S : \Delta \times \Delta \to [0,1]$ یک متر روی Δ است.

اثبات: برای اثبات متر بودن d_S روی Δ،به ازای هر F و G متعلق به Δ باید موارد زیر را اثبات کنیم.

۱) $d_S(F,F) = 0$.

۲) اگر $d_S(F,G) = 0$ آنگاه $F = G$ است.

۳) $d_S(F,G) = d_S(G,F)$.

۴)$_S(F,H) \leq d_S(F,G) + d_S(G,H)$.

۱: فرض کنید $h \in (0,1]$ باشد. از آنجاکه F صعودی است داریم:

$$F(x-h) - h \leq F(x) \leq F(x+h) + h$$

بنابراین

$$d_S = \inf\{h \in (۰,۱] : (F,F;h)\} = \inf(۰,۱] = ۰$$

در نتیجه $d_S(F,F) = ۰$ است.

۲: فرض کنید $d_S(F,G) = ۰$ باشد. در نتیجه با توجه به تعریف d_S داریم:

$$F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h$$

از آنجایی که F پیوسته چپ است با میل دادن h به سمت صفر نتیجه می‌شود که به ازای هر $x \in (-\infty, +\infty)$، $F(x) \leq G(x)$. با استدلال مشابه نتیجه می‌شود که $G(x) \leq F(x)$ است و لذا $F = G$ است.

۳: با توجه به تعریف d_S به وضوح برقرار است.

۴:برای دیدن اثبات به مرجع [۷]مراجعه کنید.

قضیه ۱.۱۳: فضای (Δ, d_S) فشرده است.

اثبات: برای دیدن اثبات به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۱.۱۴: عملگر دوتایی $T : [۰,۱] \times [۰,۱] \to [۰,۱]$ را یک tـنرم گویند هر گاه:

۱) T جابجایی باشد، بدین معنی که به ازای هر $x, y \in [۰,۱]$، $T(x,y) = T(y,x)$.

۲) T شرکت پذیر باشد، بدین معنی به ازای هر $x, y, z \in [۰ ۱]$، $T(x, T(y,z)) = T(T(x,y), z)$.

۳) T دارای عنصر همانی صفر است، بدین معنی که به ازای هر x متعلق به بازه‌ی $[۰,۱]$، $T(x,۰) = T(۰,x) = x$.

۴) T صعودی باشد. بدین معنی که اگر $x \leq x_۰$ و $y \leq y_۰$ آنگاه $T(x,y) \leq T(x_۰, y_۰)$.

قضیه ۱.۱۵: اگر T یک tـنرم مثلثی باشد، آنگاه صفر عنصر پوچ T است.

اثبات: نشان می‌دهیم که به ازای هر $x \in [۰,۱]$،$T(x,۰) = T(۰,x) = ۰$. فرض کنید $x \in [۰,۱]$، بنابراین $۰ \leq T(x,۰) \leq T(۱,۰) \leq ۰$ و در نتیجه $T(x,۰) = ۰$ خواهد بود. به طور مشابه می‌توان

ثابت کرد که $T(\circ, x) = \circ$ است. $\square$

مثال زیر دسته‌ی مهمی از tـنرم‌ها را مشخص می‌کند.

مثال ۱۶.۱: عملگرهای دو تایی Z, Π, W, M با ضابطه‌های زیر مثال‌هایی از tـنرم‌ها هستند

۱) $\Pi(x,y) := xy$.

۲) $M(x,y) := \min\{x,y\}$.

۳) $W(x,y) := \max\{x+y-۱, \circ\}$.

۴)

$$Z(x,y) := \begin{cases} \circ, & (x,y) \in [\circ, ۱] \times [\circ, ۱], \\ x, & x \in [\circ, ۱], y = ۱, \\ y. & x = ۱, y \in [\circ, ۱], \end{cases}$$

تعریف ۱۷.۱: عملگر دوتایی $T^* : [\circ, ۱] \times [\circ, ۱] \to [\circ, ۱]$ را یک tـهم نرم گویند هر گاه:

۱) T^* جابجایی باشد، بدین معنی که به ازای هر $x, y \in [\circ, ۱]$، $T^*(x,y) = T^*(y,x)$.

۲) T^* شرکت پذیر باشد. بدین معنی که به ازای هر x، y و z متعلق به بازه‌ی $[\circ, ۱]$، $T^*(x, T^*(y,z)) = T^*(T^*(x,y), z)$.

۳) T^* دارای عنصر همانی یک باشد، بدین معنی که به ازای هر x متعلق به بازه‌ی $[\circ, ۱]$، $T^*(x, ۱) = T^*(۱, x) = x$.

۴) T صعودی باشد. بدین معنی که اگر $x \leq x_\circ$ و $y \leq y_\circ$ آنگاه $T^*(x,y) \leq T^*(x_\circ, y_\circ)$.

قضیه ۱۸.۱: فرض کنید T یک tـنرم باشد. اگرتابع دوتایی T^* نظیر T را با ضابطه‌ی $T^*(x,y) = ۱ - T(۱-x, ۱-y)$ تعریف کنیم آنگاه T^* یک tـهم نرم خواهد بود.

اثبات: برای دیدن اثبات به مرجع [۷] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۱۹.۱: اگر T^*یک tـهم نرم دلخواه باشد، در این صورت یک، عنصر پوچ T^* خواهد بود.

اثبات: فرض کنید T^* یک tـهم نرم دلخواه باشد. نشان می‌دهیم که به ازای هر $x \in [\circ, ۱]$،

$T^*(x,1)=T^*(1,x)=1$ است. طبق قضیه‌ی قبل داریم:

$$\begin{aligned} T^*(x,1) &= 1-T(1-x,1-1) \\ &= 1-T(1-x,0)=1-0=1 \end{aligned}$$

در نتیجه $T^*(x,1)=1$ خواهد شد. از طرفی داریم:

$$\begin{aligned} T^*(1,x) &= 1-T(1-1,1-x) \\ &= 1-T(0,1-x)=1-0=1 \end{aligned}$$

در نتیجه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. $\square$

لم ۲۰.۱: فرض کنید T_1 و T_2 دو tـنرم دلخواه و T_1^* و T_2^* به ترتیب tـهم نرم‌های متناظر با آنها باشند. اگر $T_1 \geq T_2$ باشد، آنگاه $T_1^* \leq T_2^*$ خواهد بود.

اثبات: فرض کنید $T_1 \geq T_2$ باشد. با توجه به تعریف داریم:

$$T^*(x,y)=1-T(1-x,1-y)$$

در نتیجه:

$$T_1(1-x,1-y) \geq T_2(1-x,1-y)$$

با اضافه کردن یک واحد به طرفین داریم:

$$1-T_1(1-x,1-y) \leq 1-T_1(1-x,1-y)$$

در نتیجه:

$$T_2^* \geq T_1^*.$$

□

مثال ۲۱.۱: با توجه به قضیه‌ی ۱۸.۱، Π^*, Z^*, W^*, M^* به صورت زیر می‌باشند:

۱) $\Pi^*(x,y) := x + y - xy$.

۲) $M^*(x,y) := \max\{x,y\}$.

۳) $W^*(x,y) := \min\{x,y\}$.

۴)

$$Z^*(x,y) := \begin{cases} x, & x \in [0,1], y = 0, \\ y, & x = 0, y \in [0,1], \\ 1. & x \in (0,1], y \in (0,1], \end{cases}$$

قضیه ۲۲.۱: همواره روابط زیر برقرار هستند:

$$Z \leq T \leq M < M^* \leq T^* \leq Z^*$$

$$Z < W < \Pi < M < M^* < \Pi^* < W^* < Z^*$$

اثبات: برای دیدن اثبات به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۳.۱: عملگر دوتایی $\tau : \Delta^+ \times \Delta^+ \to \Delta^+$ را یک تابع مثلث گویند هر گاه τ

۱) جابجایی باشد، بدین معنی که به ازای هر $F, G \in \Delta^+$،

$$\tau(F,G) = \tau(G,F).$$

۲) شرکت پذیر باشد، بدین معنی که به ازای هر $F, G, H \in \Delta^+$،

$$\tau(F, \tau(G,H)) = \tau(\tau(F,G), H).$$

۳) صعودی باشد، بدین معنی که به به ازای هر $F,G,H,k \in \Delta^+$، اگر $F \leq G$ و $H \leq K$ باشد آنگاه $\tau(F,H) \leq \tau(G,K)$ باشد.

۴) دارای عنصر همانی $\varepsilon_\circ$ باشد، بدین معنی که به ازای هر $F \in \Delta^+$، $\tau(F,\varepsilon_\circ) = F$.

تعریف ۲۴.۱: فرض کنید T یک tـنرم دلخواه باشد. عملگر دوتایی τ_T، از $\Delta^+ \times \Delta^+$ به توی Δ^+ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tau_T(F,G) = \sup\{T(F(u),G(v)) : u+v = x\}.$$

قضیه ۲۵.۱: اگر T یک tـنرم پیوسته چپ باشد، آنگاه τ_T یک تابع مثلث خواهد بود.

اثبات: برای دیدن اثبات به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۶.۱: اگر T یک tـنرم پیوسته باشد، آنگاه τ_T روی (Δ^+, d_S) پیوسته یکنواخت خواهد بود.

اثبات: برای دیدن اثبات به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

تعریف ۲۷.۱: فرض کنید T^* یک tـهم نرم دلخواه باشد. عملگر دوتایی τ_{T^*} از $\Delta^+ \times \Delta^+$ به توی Δ^+ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_{T^*}(F,G) = \inf\{T^*(F(s),G(t)) : s+t = x\}.$$

قضیه ۲۸.۱: اگر T^* یک tـهم نرم پیوسته چپ باشد، آنگاه τ_{T^*} یک تابع مثلث خواهد بود.

اثبات: برای دیدن اثبات به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۲۹.۱: اگر T^* یک tـهم نرم پیوسته باشد، آنگاه τ_{T^*} روی (Δ^+, d_S) پیوسته یکنواخت است.

اثبات: برای دیدن اثبات به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۳۰.۱: اگر T_1 و T_2 دو tـنرم باشند بطوریکه $T_1 < T_2$ باشد آنگاه

الف) $\tau_{T_1} \leq \tau_{T_2}$.

ب) به ازای هر tـنرم دلخواه T، $\tau_T \leq \tau_{T^*}$.

اثبات: الف: با توجه به تعریف داریم:

$$\tau_{T_1}(F,G)(x) = \sup\{T_1(F(s),G(t)) : s+t=x\}$$

و

$$\tau_{T_2}(F,G)(x) = \inf\{T_2(F(s),G(t)) : s+t=x\}.$$

در نتیجه

$$\tau_{T_1} \leq \tau_{T_2}.$$

ب: همواره داریم $T \leq T^*$ بنابراین

$$\tau_{T_1}(F,G)(x) = \sup\{T_1(F(s),G(t)) : s+t=x\}$$

و

$$\tau_{T^*}(F,G)(x) = \inf\{T^*(F(s),G(t)) : s+t=x\}.$$

در نتیجه

$$\tau_T \leq \tau_{T^*}.$$

□

قضیه ۳۱.۱: فرض کنید T یک tـنرم پیوسته دلخواه باشد. در این صورت عملگر دوتایی Π_T روی Δ^+ با ضابطه‌ی $\Pi_T(F,G)(x) = T(F(x),G(x))$ یک تابع مثلث خواهد بود.

اثبات: الف: Π_T دارای خاصیت جابجایی است زیرا

$$\begin{aligned}\Pi_T(F,G)(x) &= T(F(x),G(x))\\ &= T(G(x),F(x))\\ &= \Pi_T(G,F).\end{aligned}$$

ب: ε_0 عنصر همانی است زیرا

$$\begin{aligned}\Pi_T(F,\varepsilon_0) &= T(F(x),\varepsilon_0(x))\\ &= T(F(x),1)\\ &= F(x)\end{aligned}$$

ج: Π_T صعودی است زیرا اگر $F_1 \leq F_2$ و آنگاه

$$\begin{aligned}\Pi_T(F_1,G)(x) &= T(F_1(x),G(x))\\ &\leq T(F_2(x),G(x))\\ &= \Pi_T(F_2,G).\end{aligned}$$

د: Π_T دارای خاصیت شرکت پذیری است زیرا:

$$\begin{aligned}\Pi_T(\Pi_T(F,G),H)(x) &= {}_T(T(F(x),G(x)),H)(x)\\ &= T(T(F(x),G(x)),H(x))\\ &= T(F(x),T(G(x),H(x)))\\ &= T(F(x),\Pi_T(G(x),H(x)))\\ &= \Pi_T(F,\Pi_T(G,H)).\end{aligned}$$

□

لم ۳۲.۱: الف) به ازای هر tـنرم T، $T \le M$.

ب) به ازای هر tـهم نرم T^*، $T^* \ge M$.

ج) برای هر tـنرم پیوسته T، $\Pi_T \ge \tau_T$.

د) برای هر تابع مثلث τ، $\Pi_M \ge \tau$.

اثبات: الف:

$$\begin{aligned} T(x,y) &\le T(x,۱) = x \\ T(x,y) &\le T(۱,y) = y. \end{aligned}$$

بنابراین

$$T(x,y) \le \min\{x,y\}.$$

ب: بدون کاسته شدن ازکلیت فرض کنید $x \le y$ باشد. در این صورت:

$$\begin{aligned} T^*(x,y) &= ۱ - T(۱-x, ۱-y) \\ &\ge ۱ - T(۱-x, ۱) \\ &= x = M(x,y). \end{aligned}$$

ج: با توجه به تعریف داریم:

$$\tau_T(F,G) = \sup\{T(F(s),G(t)) : s+t = x\}$$

و

$$\tau_T(F,G) = \sup\{T(F(s),G(t)) : s+t = x\}.$$

از طرفی چون $s+t=x$ بنابراین با توجه به صعودی بودن T داریم:

$$T(F(s),G(t)) \leq T(F(x),G(x)).$$

در نتیجه $\Pi_T \geq \tau_T$ خواهد بود.

د: با توجه به تعریف τ داریم:

$$\begin{aligned}
\tau(F,G) &\leq \tau(F,\varepsilon_\circ)=F,\\
\tau(F,G) &\leq \tau(\varepsilon_\circ,G)=G,
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\tau(F,G) \leq \min\{F,G\}=\Pi_M(F,G).$$

□

قضیه ۳۳.۱: فرض کنید $T_۱$ و $T_۲$ دو tـنرم دلخواه باشند. در این صورت روابط زیر معادلند.

۱) $T_۱ \geq T_۲$.

۲) $\Pi_{T_۱} \geq \Pi_{T_۲}$.

۳) $\tau_{T_۱} \geq \tau_{T_۲}$.

۴) $\Pi_{T_۱} \geq \tau_{T_۲}$.

۵) $\tau_{T_۲^*} \geq \tau_{T_۱^*}$.

اثبات: برای دیدن اثبات به مرجع [۷] مراجعه کنید. □

قضیه ۳۴.۱: فرض کنید $F \in \mathcal{D}^+$ باشد. دراین‌صورت به ازای هر $t>۰$، $d_S(F,\varepsilon_\circ)<t$ اگر و تنها اگر، $F(t)>۱-t$.

اثبات: برای دیدن اثبات به مرجع [۷] مراجعه کنید. □