بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار گرایش آمار ریاضی

مطالعه ای برخواص سیستم‌های منسجم بر مبنای توزیع‌های طول عمر باقیمانده

استاد راهنما:

دکتر مجید اسدی

پژوهشگر:

نفیسه بازاری

مهرماه ۱۳۸۹

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمار گرایش آمار ریاضی

خانم نفیسه بازاری

تحت عنوان

مطالعه ای بر خواص سیستم های منسجم بر مبنای توزیع های طول عمر باقیمانده

در تاریخ ۸۹/۷/۲۸ توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر مجید اسدی با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۲- استاد داور داخل گروه پایان‌نامه دکتر مهدی توانگر با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر مجید رضائی با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

امضای مدیر گروه

تقدیم به پدر و مادرم که شمع وجودشان در آتش عشق سوخت تا گام هایم در راه رسیدن به هدف هیچگاه لرزان نباشند.

از جناب آقای دکتر مجید اسدی که در تمام مراحل این تحقیق مشوق و راهنمای من بودند تقدیر و تشکر می‌نمایم.

چکیده

علامت سیستم یک ابزار مفید برای مطالعه و مقایسه سیستم‌های منسجم می‌باشد. علامت یک سیستم با طول عمر مؤلفه‌های مستقل و همتوزیع (iid) برداری است که i امین مؤلفه آن برابر با احتمال آن است که i امین شکست مؤلفه-ها باعث از کار افتادن سیستم شود. در این پایان نامه به مطالعه قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم و خواص طول عمر چنین سیستم‌هایی بر مبنای علامت سیستم می‌پردازیم. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن اجزای سیستم iid هستند، سپس نتایج را به حالتی که مؤلفه‌ها تبادل پذیرند تعمیم می‌دهیم. بویژه برای سیستمی دلخواه با اندازه‌ی m ($m < n$) با مؤلفه‌های با طول عمر تبادل پذیر نشان می‌دهیم که توزیع طول عمر m مؤلفه‌ای را می‌توان به صورت آمیخته‌ای از توزیع سیستم‌های k از n نوشت.

همچنین با استفاده از مفهوم علامت نمایش‌های آمیخته برای تابع قابلیت اعتماد باقیمانده عمر و زمان غیر فعال بودن یک سیستم منسجم، تحت شرایطی بر روی وضعیت مؤلفه‌ها یا سیستم، بر حسب توابع قابلیت اعتماد باقیمانده عمر یا زمان غیر فعال بودن سیستم‌های k از n به دست می‌آوریم.

سپس مفهوم علامت سیستم به نسخه‌های کاربردی این مفهوم در زمینه قابلیت اعتماد پویا بسط داده شده و کاربرد علامت پویا در عمل مهندسی burn-in مورد بررسی قرار گرفته است.

علاوه بر این مفهوم علامت توأم دو سیستم منسجم که مؤلفه‌های مشترک دارند ارائه شده و خواص قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجمی که مؤلفه مشترک دارند مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بویژه تحت فرض iid بودن طول عمر مؤلفه‌ها یک نمایش شبه آمیخته برای توزیع طول عمر توأم دو سیستم بر اساس علامت توأم مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژگان کلیدی: آماره‌های ترتیبی، ترتیب تصادفی، ترتیب تصادفی دو متغیره، ترتیب ماتریس، سیستم k از n، علامت، نرخ خطر، burn-in

فهرست مطالب

عنوان	صفحه

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فصل اول

تعاریف و مفاهیم پایه

۱-۱ مقدمه

با توجه به اینکه تعداد سیستم های منسجم[1] از مرتبه n با افزایش n به طور نمایی افزایش می یابد، استفاده از تابع ساختار در مطالعه سیستم ها جهت مقایسه و بویژه بهینه سازی آن‌ها محققان را دچار مشکل می‌کند. همچنین توابع ساختار عبارات جبری پیچیده ای دارند که نمایش های معادل متفاوت دارند. بنابراین به دنبال شاخص دیگری هستیم که نسبت به تابع ساختار کلیت کمتری داشته باشد. این شاخص که در بخش بعدی به طور کامل معرفی می‌شود علامت[2] سیستم نامیده می شود و برای اولین بار در سال ۱۹۸۵ توسط سامانیگو[3] ارائه شد.

سامانیگو (۱۹۸۵) نشان داد که توزیع طول عمر یک سیستم منسجم با n جزء با طول عمرهای مستقل و همتوزیع را می‌توان به صورت تابعی از بردار علامت آن سیستم نوشت.کچار[4] و همکاران (۱۹۹۹) بر اساس بردار علامت سیستم‌های منسجم را بر مبنای مفاهیم مختلف قابلیت اعتماد مورد مقایسه قرار دادند. ناوارو[5] و همکاران (۲۰۰۸a)

---

[1] Coherent system
[2] Signature
[3] Samaniego
[4] Kochar
[5] Navarro

راهکاری برای مقایسه سیستم‌ها با تعداد مؤلفه‌های متفاوت در حالت i.i.d ارائه دادند و همچنین نشان دادند تحت شرایطی نتایج مشابه در حالت " تبادل پذیری ضعیف " به دست می آید. ناوارو و همکاران (۲۰۰۸b) نشان

های ترتیبی نوشته می شود و سپس بر این اساس به مقایسه باقیمانده‌های عمر سیستم های مختلف پرداختند. سامانیگو و همکاران (۲۰۰۹) مفهوم علامت پویا را معرفی کرده و کاربرد آن در عمل burn-in را مورد بررسی قرار دادند. ناوارو و همکاران (۲۰۱۰) مفهوم علامت توأم را برای سیستم‌هایی که مؤلفه مشترک دارند، ارائه کرده و بر اساس آن نمایش شبه آمیخته‌ای برای توزیع توأم طول عمر دو سیستم منسجم به دست آوردند.

در فصل های بعد خواهیم دید که مقایسه بردار علامت سیستم ها معیاری برای انتخاب سیستم مطلوب می باشد. در این فصل مفاهیم مقدماتی را مورد مطالعه قرار می دهیم ابتدا مفهوم سیستم منسجم و علامت را تعریف کرده و سپس تعاریف و توابع اساسی نظریه قابلیت اعتماد ارائه می شوند. همچنین در انتهای این فصل ترتیب‌های تصادفی معرفی شده و قضایای مرتبط ارائه شده‌اند.

۱-۲ سیستم منسجم

امروزه در بخش صنعت و دیگر بخش ها با سیستم هایی سر و کار داریم که متشکل از تعدادی واحد است که برای انجام یک هدف به یکدیگر متصل شده اند. هر واحد به طور مستقل یا وابسته به اجزای دیگر وظیفه ای را انجام می دهد و بسته به نوع اتصال آنها در سیستم، سیستم وظیفه ای را انجام می دهد.

فرض می کنیم سیستم دارای n جزء است. همچنین فرض می کنیم اجزای سیستم دارای دو وضعیت هستند در حال کار کردن هستند (روشن) یا از کار افتاده اند (خاموش). برای توصیف این دو وضعیت یک متغیر دو مقداری X_i، $i=1,2,...,n$ به صورت زیر معرفی می کنیم.

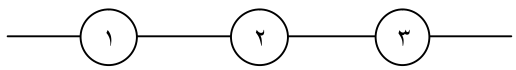
$$x_i=\begin{cases} 1 & \text{اگر جزء } i \text{ ام روشن باشد} \\ 0 & \text{اگر جزء } i \text{ ام خاموش باشد} \end{cases} \tag{۱-۱}$$

همچنین فرض می کنیم سیستم نیز در یکی از دو وضعیت روشن یا خاموش باشد. وابستگی سیستم به اجزای آن توسط تابع دو مقداری $\varphi(\underline{x})$ که به تابع ساختار معروف است مشخص می شود. که در آن $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$. لذا داریم:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{اگر سیستم روشن باشد} \\ 0 & \text{اگرسیستم خاموش باشد} \end{cases} \qquad (۲-۱)$$

مثال ۱-۱ (سیستم متوالی (سری)): سیستم متوالی (سری) سیستمی است که عملکرد آن مستلزم عملکرد تمام اجزای آن باشد. به عبارت دیگر سیستم روشن است اگر تمام اجزای آن روشن باشند. برای چنین سیستمی تابع ساختار عبارتست از:

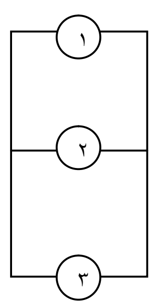
$$\varphi(\underline{x})=\prod_{i=1}^{n} x_i= \min_{1\le i\le n} x_i$$



شکل ۱-۱: سیستم سری با ۳ مؤلفه

مثال ۱-۲ (سیستم موازی): سیستم موازی سیستمی است که عملکرد آن مستلزم عملکرد حداقل یکی از اجزای آن باشد. به عبارت دیگر سیستم روشن است اگر و تنها اگر حداقل یکی از اجزای آن روشن باشد. تابع ساختار چنین سیستمی برابر است با :

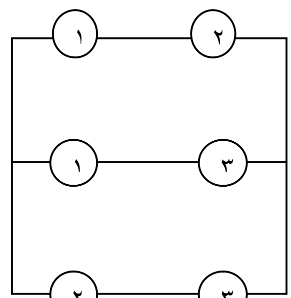
$$\varphi(\underline{x})=1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)= \max_{1\le i\le n} x_i$$



شکل ۱-۲: سیستم موازی با ۳ مؤلفه

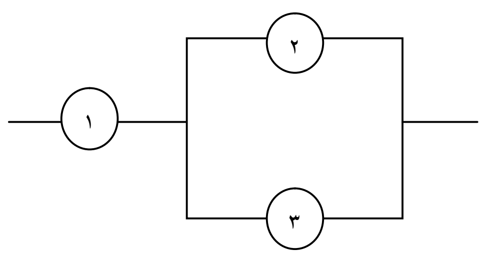
مثال ۱-۳ (سیستم k از n): سیستم k از n سیستمی است که عملکرد آن مستلزم عملکرد حداقل $(n-k+1)$ مؤلفه می باشد $(k\le n)$. به عبارت دیگر سیستم با از کار افتادن k مؤلفه از کار می افتد. برای یک سیستم k از n تابع ساختار به شکل زیر خواهد بود:

$$\varphi(\underline{x})=\begin{cases}1 & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \mathrm{n}-\mathrm{k}+1\\ 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i < n-\mathrm{k}+1\end{cases} \qquad (۱-۳)$$



شکل ۱-۳: **سیستم ۲ از ۳**

مثال ۱-۴ سیستم با ساختار زیر را در نظر بگیرید که اتصال سری مؤلفه اول با یک زیر سیستم است که متشکل از دو واحد است که به صورت موازی به هم وصل شده اند:



شکل ۱-۴ : سیستم سری- موازی

تابع ساختار این سیستم به صورت زیر است:

$$\varphi(\underline{x}) = x_1(1-(1-x_2)(1-x_3))=\min(x_1,\max(x_2,x_3)) \qquad (۱-۴)$$

تذکر ۱-۱ سیستم های سری و موازی حالت خاصی از سیستم های k از n می باشند. به عبارت دیگر یک سیستم سری، یک سیستم ۱ از n و یک سیستم موازی یک سیستم n از n است.

تعریف ۱-۱: تابعی با ساختار $\varphi(\underline{x})$ را یکنوا گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

1. $\varphi(1,\ldots,1) = 1\ ,\ \ \varphi(0,\ldots,0) = 0$
2. اگر $\underline{y} > \underline{x}$ آنگاه $\varphi(\underline{x}) \leq \varphi(\underline{y})$

$\underline{y} > \underline{x}$ بدین معنی است که برای $i=1,2,\ldots,n$، $x_i \leq y_i$ ، اما حداقل برای یک i، نامساوی $x_i < y_i$ اکید باشد.

علاوه بر دو شرط فوق اگر فرض کنیم سیستم شامل هیچ جزء نامرتبطی نباشد (جزئی که روشن یا خاموش بودن آن تأثیری در وضعیت سیستم نگذارد) سیستم را یک سیستم منسجم گوییم. نمونه ای از سیستم های منسجم، سیستم های k از n می باشند. در ادامه بردارهای قطع کننده و بردارهای مسیر را تعریف می کنیم.

تعریف ۱-۲ بردار وضعیت $\underline{x}$ را یک بردار مسیر گوئیم هرگاه $\varphi(\underline{x})=1$. مجموعه $P(\underline{x})=\{i\ ,\ x_i=1\}$ را یک مجموعه مسیر گوییم . علاوه بر این اگر برای هر $\underline{y} > \underline{x}$, $\varphi(\underline{y}) = 0$ آنگاه مجموعه مسیر متناظر را یک مجموعه مسیر مینیمال گوییم.

تعریف ۱-۳ بردار وضعیت $\underline{x}$ رایک بردار قطع کننده گوئیم هرگاه $\varphi(\underline{x}) = 0$. مجموعه $C(\underline{x})=\{i\ ,\ x_i=0\}$ را یک مجموعه قطع کننده گوییم. علاوه بر این اگر برای هر $\underline{y} < \underline{x}$, $\varphi(\underline{y}) =1$ آنگاه مجموعه قطع کننده متناظر را یک مجموعه قطع کننده مینیمال گوییم.

تعریف ۱-۴ قابلیت اعتماد جزء i ام، X_i، که با p_i نشان می دهیم عبارتست از احتمال اینکه X_i برابر ۱ با شد (یعنی احتمال اینکه جزء i ام کار کند). به عبارت دیگر:

$$p_i = P(X_i = 1) = E(X_i) \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{۱-۵}$$

به طور مشابه برای یک سیستم قابلیت اعتماد آن را که با h نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$h = P(\varphi(\underline{x}) = 1) = E(\varphi(\underline{x})) \tag{۱-۶}$$

۱-۳ علامت سیستم منسجم

تعریف ۱-۵ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ طول عمرهای iid از یک سیستم منسجم n مؤلفه ای با توزیع پیوسته مشترک $F(x)$ هستند. علامت سیستم یک بردار احتمال n بعدی $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ است که i امین مؤلفه آن، s_i،

برابر با احتمال از کار افتادن سیستم به محض i امین خرابی مؤلفه‌های سیستم می‌باشد. به عبارت دیگر $s_i = P(T = X_{i:n})$ که T طول عمر سیستم و $X_{i:n}$ ، i امین آماره ترتیبی متناظر با طول عمر مؤلفه‌ها می‌باشد.

مثال ۱-۵ سیستم شکل ۱-۴ را در نظر بگیرید. فرض کنید X_iها نشان دهنده طول عمر مؤلفه ها باشند، $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3))$. آماره های ترتیبی زمان خراب شدن مؤلفه‌ها، که باعث از کار افتادن سیستم می‌شود در جدول ۱-۱ نشان داده شده است. با استفاده از جدول می‌توان بردار علامت سیستم را تعیین کرد. داریم:

جدول ۱-۱: زمان های شکست مرتب شده مؤلفه‌هاکه منجر به از کار افتادن سیستم می شود.

آماره ترتیبی معادل با زمان شکست سیستم	زمان های شکست مرتب شده مؤلفه ها
$X_{1:3}$	$X_1 < X_2 < X_3$
$X_{1:3}$	$X_1 < X_3 < X_2$
$X_{2:3}$	$X_2 < X_1 < X_3$
$X_{2:3}$	$X_2 < X_3 < X_1$
$X_{2:3}$	$X_3 < X_1 < X_2$
$X_{2:3}$	$X_3 < X_2 < X_1$

$$s_i = \frac{\#\{T = X_{i:n}\}}{n!}$$

با توجه به جدول بالا نتیجه می گیریم:

$$s = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$$

همانگونه که در مثال مشاهده شد هنگامی که مؤلفه‌ها iid هستند، علامت سیستم تنها به ساختار سیستم بستگی دارد .

مثال ۱-۶ واضح است که طول عمر سیستم k از n برابر با $X_{k:n}$ می باشد بنابراین بردار علامت این سیستم به فرم زیر می باشد:

$$s_{k:n} = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{k-1\ \text{times}}, 1, \underbrace{0,0,\dots,0}_{n-k\ \text{times}}) \qquad (۷-۱)$$

۴-۱ مفاهیم اساسی نظریه قابلیت اعتماد

می توانیم به جای در نظر گرفتن دو وضعیت خاموش یا روشن، برای مؤلفه‌ها و به طبع برای سیستم طول عمر قائل شویم. بنابراین فرض می کنیم جزء i ام دارای طول عمر X_i $(X_i > 0)$ باشد که تابع توزیع آن $F_i(t) = P(X_i \le t)$ است. برای تعریف طول عمر سیستم فرض کنید متغیر های تصادفی دو مقداری $Y_i(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$Y_i(t) = \begin{cases} 1 & X_i > t \\ 0 & X_i \le t \end{cases} \qquad (۸-۱)$$

بردار وضعیت اجزای سیستم را با $\underline{Y}(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))$ نمایش می دهیم. طول عمر سیستم مقداری از t است که در آن سیستم برای اولین بار وارد وضعیت از کارافتادگی می شود یعنی $T = \inf\{t, \varphi(\underline{Y}(t)) = 0\}$ در این حالت قابلیت اعتماد سسیستم که با $\overline{F}(t)$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\overline{F}(t) = p(T > t) = 1 - F(t) \qquad (۹-۱)$$

به عنوان مثال طول عمر سیستم سری $\min_{1 \le i \le n} X_i$ و طول عمر سیستم موازی $\max_{1 \le i \le n} X_i$ و قابلیت اعتماد این دو سیستم به ترتیب $\prod_{i=1}^{n} \overline{F}_i(t)$ و $1 - \prod_{i=1}^{n} F_i(t)$ می باشند. قضایای زیر را بدون اثبات بیان می کنیم برای اثبات به بارلو و پروچان[1] (۱۹۸۱) مراجعه کنید.

قضیه ۱-۱ یک سیستم n مؤلفه ای با طول عمر های $X_1, X_2, \dots, X_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $P_1, P_2, \dots, P_r$ مجموعه مسیر های مینیمال سیستم باشند، آنگاه طول عمر سیستم T را می توان بر حسب مسیرهای مینیمال به صورت زیر نوشت:

$$T = \max_{j=1,2,\dots,r} \min_{i \in P_j} X_i \qquad (۱۰-۱)$$

---

[1] Barlow and Proschan

قضیه ۱-۲ یک سیستم n مؤلفه ای با طول عمر های $X_1,X_2,\dots,X_n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $C_1,C_2,\dots,C_k$ مجموعه قطع کننده های مینیمال سیستم باشند. آنگاه طول عمر سیستم T را می توان بر حسب قطع کننده های مینیمال به صورت زیر نوشت:

$$T=\min_{j=1,2,\dots,k}\max_{i\in C_j} X_i \tag{۱-۱۱}$$

یکی از مفاهیم مهم در قابلیت اعتماد مفهوم نرخ مخاطره است که نرخ از کار افتادگی سیستم در زمان t را نشان می دهد و به صورت زیر تعریف می شود:

تعریف ۱-۶ اگر X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع مطلقاً پیوسته F باشد آنگاه نرخ مخاطره X عبارتست از

$$r(t)=\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{P(t<X\le t+\Delta t \mid X>t)}{\Delta t}=\frac{f(t)}{\overline{F}(t)} \qquad t\in R \qquad \overline{F}(t)>0 \tag{۱-۱۲}$$

تعریف ۱-۷ فرض کنید F تابع توزیع متغیر طول عمر T باشد. F را متعلق به کلاس توزیع‌های با نرخ شکست صعودی (نزولی) گوییم هر گاه $r(t)$، تابع نرخ شکست T، تابعی صعودی (نزولی) از t باشد. معمولاً از علامت اختصاری IFR (DFR) برای نشان دادن آن که F دارای نرخ شکست صعودی (نزولی) است استفاده می کنیم.

تذکر ۱-۲ F، IFR(DFR) است اگر و تنها اگر $P(T-t>x\mid T>t)=\dfrac{\overline{F}(x+t)}{\overline{F}(t)}$ تابعی نزولی(صعودی) بر حسب t باشد.

تعریف ۱-۸ فرض کنید $X_1,X_2,\dots,X_n$ نشان دهنده طول عمر n مؤلفه iid از یک سیستم منسجم باشند. T را طول عمر سیستمی با تابع قابلیت $\overline{F}_T(t)$ و تابع چگالی $f_T(t)$ در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم طول عمر سیستم از t بیشتر باشد (یعنی T>t)، آنگاه باقیمانده عمر سیستم را با متغیر $(T-t|T>t)$ نمایش می‌دهیم. تابع قابلیت اعتماد، $\overline{G}$، و تابع چگالی این متغیر به صورت زیر است.

$$\overline{G}(x)=\frac{\overline{F}_T(t+x)}{\overline{F}_T(t)},\quad g(x)=\frac{f_T(t+x)}{\overline{F}_T(t)} \tag{۱-۱۳}$$

تعریف ۱-۹ میانگین باقیمانده عمر یکی از اندازه های مهم در مطالعات طول عمر است که آن را با m(t) نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود

$$m(t) = E(T - t \mid T > t) = \begin{cases} \dfrac{\int_t^{\infty} \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(t)} & \bar{F}(t) > 0 \\ 0 & \bar{F}(t) = 0 \end{cases} \qquad (۱۴-۱)$$

تعریف ۱-۱۰ یکی دیگر اندازه های مهم در قابلیت اعتماد تابع نرخ مخاطره معکوس می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{r}(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(t-\varepsilon < T < t \mid T \le t)}{\varepsilon} = \frac{f(t)}{F(t)} \qquad (۱۵-۱)$$

تعریف ۱-۱۱ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نشان دهنده طول عمر n مؤلفه iid از یک سیستم منسجم باشند. T را طول عمر سیستمی با تابع قابلیت $\bar{F}_T(t)$ و تابع چگالی $f_T(t)$ قرار دهید. فرض می‌کنیم سیستم در زمانی قبل از t از کار افتاده است. مدت زمان غیر فعال بودن سیستم را با متغیر $(t-T|T\le t)$ نمایش می‌دهیم. تابع قابلیت اعتماد، $\bar{H}$، و تابع چگالی این متغیر به ترتیب برابرند با:

$$\bar{H}(x) = \frac{F_T(t-x)}{F_T(t)}, \quad h(x) = \frac{f_T(t-x)}{F_T(t)} \qquad (۱۶-۱)$$

تعریف ۱-۱۲ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نشان دهنده طول عمر n مؤلفه iid از یک سیستم i از n باشد. فرض می‌کنیم تا زمان t، حداکثر $r-1$ مؤلفه از کار افتاده‌اند در حالی که سیستم هنوز به کار کردن خود ادامه می‌دهد. یک باقیمانده عمر برای سیستم، متغیر $(X_{i::n} - t|X_{r:n} > t)(r\le i\le n)$ می‌باشد، که با نماد $GRL_{r,i,n}(t)$ نشان داده می‌شود و به آن باقیمانده عمر تعمیم یافته می‌گوییم. تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی این متغیر را به ترتیب با $\bar{H}_{r,i,n,t}$ و $h_{r,i,n,t}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱۳ فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نشان دهنده طول عمر n مؤلفه iid از یک سیستم r از n و $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ آماره‌های ترتیبی متناظر باشند. فرض می‌کنیم تا زمان t، سیستم از کار افتاده‌است. مدت زمان غیر فعال بودن i امین آماره ترتیبی در چنین سیستمی، متغیر $(t - X_{i:n} \mid X_{r:n} \le t)$ می‌باشد، که با نماد

$GIL_{r,i,n}(t)$، ($i \leq r \leq n$)، نشان داده می‌شود. تابع قابلیت اعتماد و تابع چگالی این متغیر به ترتیب با $\overline{H}_{i,r,n,(t)}$ و $h_{i,r,n,(t)}$ نمایش داده می‌شوند

تعریف ۱-۱۴ تابع دو متغیره $f(x,y)$ مثبت کامل از مرتبه ۲، TP_2، نامیده می شود، اگر رابطه زیر به ازای هر $x \leq x', y \leq y'$ برقرار باشد.

$$f(x,y)f(x',y') \geq f(x',y)f(x,y') \qquad (۱-۱۷)$$

اگر نامساوی بالا عکس شود، $f(x,y)$ معکوس منظم از مرتبه ۲ نامیده می شود که با RR_2 نشان داده می شود.

برای جزئیات بیشتر در مورد TP_2 و RR_2 به کارلین[1] (۱۹۶۸) مراجعه شود.

اکنون لم زیر را در مورد $h_{r,i,n,t}$ و $h_{i,r,n,(t)}$ داریم. برای اثبات به هو و همکاران (۲۰۰۷) مراجعه شود.

لم ۱-۱

۱. برای $r \leq i \leq n$ ، تابع چگالی $h_{r,i,n,t}(x)$، در $(x,i)\in(0,\infty) \times \{r,\dots,n\}$، TP_2 است.
۲. برای $i \leq r \leq n$ ، تابع چگالی $h_{i,r,n,(t)}(x)$، در $(x,i)\in(0,\infty) \times \{1,\dots,r\}$، RR_2 است.

تعریف ۱-۱۵ گوییم متغیر تصادفی X (یا توزیع F) نو بهتر از کهنه است[2] (NBU)، اگر برای هر $s\geq 0$ و $t\geq 0$ داشته باشیم: $\overline{F}(s)\overline{F}(t) \geq \overline{F}(s+t)$.

تعریف ۱-۱۶ گوییم متغیر تصادفی X (یا توزیع F) نو بدتر از کهنه است[3] (NWU)، اگر برای هر $s\geq 0$ و $t\geq 0$ داشته باشیم: $\overline{F}(s)\overline{F}(t) \leq \overline{F}(s+t)$.

۱-۵ ترتیب‌های تصادفی

در این بخش ترتیب‌های تصادفی را مورد مطالعه قرار می دهیم. مهم ترین و رایج ترین ترتیب‌ها در متون آمار و احتمال که در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرند عبارتند از: ترتیب تصادفی معمولی $\leq_{st}$، ترتیب نرخ مخاطره $\leq_{hr}$ و ترتیب نسبت درستنمایی $\leq_{lr}$. ابتدا ترتیب های تصادفی در حالت پیوسته ارائه می شوند سپس حالت

---

[1] Karlin
[2] New Better than Used
[3] New Worse than Used