
بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالک یوم الدین ایاک نعبد و ایاک نستعین اهدنا الصراط المستقیم صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم و لا الضالین

دانشگاه مازندران
دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض
گرایش هندسه دیفرانسیل

موضوع:

گرافهای ژئودزی روی خمینه های ۷-بعدی ویژه $g.o$

استاد راهنما:
دکترابوالفضل اکرا طالشیان

استاد مشاور:
دکتر جعفرصادقی

اساتیدداور:
دکتر اصغر طالبی
دکتر محسن علیمحمدی

نام دانشجو:
یعقوب خانگلی زاده فیروزجایی

دی ۱۳۸۷

سپاسگزاری

قبل از هر چیز خدای متعال را شاکرم کـه مـرا یـاری نمـوده و همـواره یـار و یـاور بندگانش می‌باشد.

از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر ابوالفضل طالشیان تشکر و سپاسگزاری می نمایم که مرا در تدوین این پایان نامه یاری نمودند.

همچنین از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر جعفر صادقی که در تـدوین ایـن پایان نامه زحمت زیادی برای من متحمل شدند کمال سپاسگزاری را دارم.

همین طور از داوران محترم که قبول زحمـت نمـوده و داوری پایـان نامـه بنـده را پذیرفتند تشکر می کنم.

در ضمن از خانواده خود نیز متشکرم.

تقدیم به:

همسر و دو فرزندم فاطمه زهرا و امیررضا

چکیده

کوبایاشی($kobayashi.s$) در سال۱۹۶۹ روی فضاهای شبه ریمانی با گروه ایزوتروپی (هم خواصی) فشرده مطالعه کرد.

سپس دوسک ($Dusek.Z$) ،کوالسکی($Kowalski.O$)و نیکسویک ($Nikcevic.S$) در سال ۲۰۰٤ خانواده ۲-پارامتری از متری های ریمانی پایا روی خمینه های همگن $M=[SO(5)\times SO(2)]/U(2)$ و $M=[SO(4,1)\times SO(2)]/U(2)$ به دست آوردند.

در ادامه دوسک ($Dusek.Z$) و کوالسکی($Kowalski.O$) در سال ۲۰۰۷ ژئودزی های همگن روی خمینه های ریمانی همگن را مطالعه کردند.

آنها برای زیرمجموعه های چگال باز از این خانواده ثابت کردند که خمینه های ریمانی،خمینه های $g.o$ هستند که بطور طبیعی کاهنده نیستند.

ما در این پایان نامه به بررسی بقیه متری ها(در حالت فشرده) می پردازیم. و هم چنین یک گروه لی هفت بعدی که در عین حال یک فضای ریمانی $g.o$ است را مورد مطالعه قرار داده ،سپس آن را تغییر داده و فضای همگن شبه-ریمانی که به گروه لی غیر فشرده مربوط است به دست می آوریم.

واژه های کلیدی

خمینه ریمانی،فضای ریمانی همگن،گراف ژئودزی،فضای $g.o$ ،ژئودزی های همگن.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول مفاهیم مقدماتی.. ۱

۱-۱ فضای آفین و فضای اقلیدسی ۲
۱-۲ خمینه(منیفلد)... ۴
۱-۳ بردار های مماس و فضای مماسی... ۸
۱-۴ دیفرانسیل گیری و مشتق.. ۱۲
۱-۵ طول قوس... ۱۷
۱-۶ مشتق همورد.. ۲۲

فصل دوم کشان ها(تانسورها)... ۳۵

۲-۱ خمینه ها-میدان های تانسوری-مشتق هموورد.. ۳۶

۲-۱-۱ یادآوری... ۳۶

۲-۱-۲ ژاکوبین،ماتریس ژاکوبین ۳۷

۲-۱-۳ میدان تانسوری(کشانی)... ۳۹

۲-۱-٤ مشتق هموورد.. ٤٠

۲-۱-۵ خمیدگی میدان کشانی... ٤٤

فصل سوم فضاهای متقارن و جبرهای مورد نظر... ۵۳

۳-۱ جبرهای و فضاهای ریشه.. ۵٤

۳-۱-۱ گروه های لی و خمینه ها.. ۵٤

۳-۱-۲ فضای مماس.. ۵۵

۳-۱-۳ فضاهای همدسته... ۵۷

۳-۱-٤ جبر لی و نمایش الحاقی... ۵۸

۳-۱-۵ جبرهای نیمه ساده و فضاهای ریشه... ٦٠

۳-۲ فضاهای متقارن.. ٦۱

۳-۲-۱ معکوس خودسانی... ٦۱

۳-۲-۲ عمل گروه روی فضای متقارن.. ٦۳

۳-۲-۳ مختصات شعاعی..۶۵
۳-۲-۴ متری روی یک جبر لی...۶۶
۳-۲-۵ ساختار جبری روی فضاهای متقارن..۶۷
۳-۳ طبقه بندی فضاهای متقارن..۶۸
۳-۳-۱ کشان خمیدگی...۶۸
۳-۳-۲ فرم های حقیقی از فضاهای متقارن..۶۹
۳-۴ عملگرها روی فضاهای متقارن...۷۲
۳-۴-۱ عملگرهای کازیمیر...۷۲
۳-۴-۲ عملگرهای لاپلاس...۷۵
فصل چهارم گرافهای ژئودزی روی خمینه های ۷-بعدی ویژه $g.o$ ۷۶
۴-۱ فضا های$g.o$ و گراف های ژئودزی...۷۷
۴-۲ فضاهای $g.o$ در بعد ۷ ....۸۱
۴-۳ محاسبات جدید برای حالت فشرده...۸۶
واژه نامه...۱۰۱
منابع..۱۰۸

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

فصل اول مفاهیم مقدماتی

۱-۱ فضای آفین[1] و فضای اقلیدسی

۱-۱-۱ تعریف فضای آفـین: فرض کنیم A یک مجموعه، $A \neq \emptyset$ و V یک فضای برداری روی میدان F باشد. اگر برای تبدیل $\varphi: \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{V}$ به ازای نقاط p و q در A ، $\varphi(\mathrm{p},\mathrm{q}) = \overrightarrow{pq} \in \mathrm{V}$، روابط زیر برقرار باشد، A را یک فضای آفین نامند.

الف) برای هر p، q و r در A ، داشته باشیم: $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$

ب) برای هر نقطه‌ی انتخابی p در A و α در V ، یک نقطه یکتـای q در A وجـود داشـته باشد به قسمی که: $\overrightarrow{pq} = \alpha \in V$.

در اینجا p نقطه‌ی ابتدا و q نقطه‌ی انتها اسـت. بعـد A همیشـه بـا بعـد V برابـر اسـت. مجموعه‌ی A یک مجموعه از نقاط است. گاهی مجموعـه‌ی A را یـک مجموعـه نقطـه‌ای و فضای آفین A را یک فضای نقطه‌ای نامند.

---

[1] $Affine$

۱-۱-۲ مثال: روی میدان F اگر $V = F^{\mathrm{n}}$ یک فضای n بعدی باشد، برای تبدیل $\mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{V}$ به ازای هر $p = \alpha \in F^n$ و هر $q = \beta \in F^n$ ، $\overrightarrow{pq} = \beta - \alpha$ ، که در آن صورت $A = F^{\mathrm{n}}$ مجموعه‌ای از نقطه‌ها و $V = F^{\mathrm{n}}$ یک فضای برداری است که $A = F^{\mathrm{n}}$ یک فضای آفین n بعدی می‌باشد.

اگر $F = R$ ، فضای R^{n} را فضای حقیقی n بعدی آفین و اگر $F = \mathbb{C}$ ، فضای $\mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ را فضای مختلط n بعدی آفین گویند.

۱-۱-۳ تعریف: اگر در فضای برداری R^{n} ضرب داخلی تعریف کنیم، یعنی:

$$\langle,\rangle: R^{\mathrm{n}} \times R^{\mathrm{n}} \to R$$

$$(x,y) \to \langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

آن‌گاه $E^{\mathrm{n}} = (R,\langle,\rangle)$ را فضای اقلیدسی نامند. و با استفاده از:

$$d: E^{\mathrm{n}} \times E^{\mathrm{n}} \to R$$

$$(x,y) \to d(x,y) = \|x,y\| = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2$$

یک متر روی E^{n} تعریف می‌شود. پس E^{n} یک فضای متری است.

۱-۱-۴ تعریف: نقاط $(\mathrm{n} + 1)$ تائی $\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ را در E^{n} در نظر می‌گیریم. اگر مجموعه‌ی بردارهای $\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2},\cdots,\overrightarrow{P_0P_n}\}$ در R^{n} یک پایه‌ی متعامد فضای برداری R^{n} باشد. آن‌گاه نقاط $(n + 1)$ تائی، $\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ را میدان n وجهی متعامد اقلیدسی یا مجموعه متعامد مختصاتی گویند.

۱-۱-۵ تعریـــــف: نقـــــاط $(1،0،\cdots،0)$ $e_1 =$ و $(0،1،\cdots،0)$ $e_2 =$ و ... و $e_n =$ $(0،0،\cdots،1)$ را در E^{n} یک میدان n وجهی استانده متعامد یا پایه‌ی استانده نیز می‌گویند.

۱-۱-۶ تعریف: اگر x یک نقطه در E^{n} باشد آن‌گاه $\overrightarrow{e_0x}$ بر اساس میدان استانده n وجهی متعامد اقلیدسی عبارت از $\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{n} X_i\overrightarrow{e_0e_i}$ است و $x_i\colon \mathrm{E}^{\mathrm{n}} \to R$ را توابع مختصاتی اقلیدسی گویند و توابع با مقدار حقیقی n تائی $\{x_1،x_2،\cdots،x_n\}$ را مجموعه مختصات اقلیدسی گویند.

۱-۲ خمینه(منیفلد)[۲]

۱-۲-۱ تعریف: فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی و τ مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های بـاز X باشد، اگر:

الف) X و $\emptyset$ عضو τ باشند.

ب) برای هر $U \in \tau$ و $V \in \tau$ آنگاه $V \cap U \in \tau$.

ج) برای هر $i \in I$ اگر $U_i \in \tau$ باشد، آن‌گاه داشته باشیم $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$

دراین صورت τ را روی X یک توپولوژی و ساختمان $(X،\tau)$ را یک فضای توپولوژی گویند.

۱-۲-۲ تعریف همانسانی: فرض کنیم X و Y دو فضـای توپولـوژی باشـند. اگـر نگاشـت $f\colon X \to Y$ پیوسته و f^{-1} وجود داشته و پیوســته باشـد، آنگـاه f از X بـه Y یـک تـابع همانسانی است و وقتی f از X به Y یک تابع همانسانی باشد، X و Y همانسانند.

---

[۲] Manifold

۱-۲-۳ فضای هاسدورف: فضای توپولوژی (X,τ) را یک فضای هاسدورف گویند هرگاه برای هر دو نقطه متمایز x و y یک همسایگی x مانند V و یک همسایگی y مانند U وجود داشته باشد به‌قسمی که:

$V \cap U = \emptyset$

۱-۲-۴ مثال: فضای اقلیدسی $\mathrm{E^n}$، یک فضای هاسدورف است زیرا که اگر دو نقطه متمایز p و q در $\mathrm{E^n}$ اختیار کنیم، آن‌گاه برای p و q به ترتیب همسایگی‌های باز V_p و V_q وجود دارد به طوریکه:

$V_p \cap V_q = \emptyset$.

۱-۲-۵ تعریف: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی n بعدی باشد. اگر برای X ویژگی‌های زیر برقرار باشد، X را یک خمینه‌ی توپولوژی گویند.

الف) X **یک فضای هاسدورف باشد.**

ب) هر زیر مجموعه باز از X **با** $\mathrm{E^n}$ **یا با زیر مجموعه‌هایی از** $\mathrm{E^n}$ **همانریخت باشد.**

ج) X **به وسیله‌ی تعداد شمارش پذیری از مجموعه های باز پوشانیده شود.**

۱-۲-۶ تعریف: فرض کنیم U در $\mathrm{E^n}$ یک مجموعه‌ی باز باشد. اگر تابع $f: U \to R$ پیوسته و از هر مرتبه‌ای کلیه مشتق‌های جزیی‌اش وجود داشته باشند. تابع f را دیفرانسیل‌پذیر گویند، وقتی یک تابع از هر مرتبه‌ای دارای کلیه‌ی مشتق‌های جزئی باشد در آن صورت تابع از رده‌ی C^∞ است و می‌نویسیم $f \in \mathrm{C}^\infty(U,R)$.

توجه: برای دیفرانسیل‌پذیری از مرتبه‌ی k داریم: $f \in \mathrm{C^k}(U,R)$.

۱-۲-۷ تعریف: فرض کنیم U و V زیر مجموعه‌های باز فضای اقلیدسی E^{n} باشند. اگر برای تابع، $Q: \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ ویژگی‌های زیر صدق کند، تابع Q را وابرریختی نامند و U و V را وابرریخت گویند.

الف) $Q \in \mathrm{C}^{\infty}(U,\mathrm{V})$

ب) $Q^{-1}: \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ وجود داشته و $Q^{-1} \in \mathrm{C}^{\infty}(V,U)$

۱-۲-۸ تعریف: فرض کنیم M یک مجموعه و U یک زیرمجموعه باز از M باشد، اگر $x: \mathrm{U} \subset \mathrm{M} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ یک تابع یک‌به‌یک که بردش زیرمجموعه‌ی باز R^{n} باشد آن‌گاه $\{U,x\}$ را یک نقشه‌ی n بعدی گویند و با استفاده از توابع تصویری $P_i: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}$ یک چنین نقشه‌ای روی قلمروی U ، یک مجموعه از توابع مختصاتی $x_i = p_i o x$ تعریف می‌کند به طوریکه $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$، $x(m) = \left(x_1(m),x_2(m),\cdots,x_n(m)\right)$ یک مجموعه مختصاتی $m \in \mathrm{U}$ در نقشه x است.

۱-۲- ۹ تعریف: گردایه ای از نقشه ها که قلمروهایشان تمام مجموعه M را بپوشاند یک اطلس از M به R^{n} گفته می شود و با A نمایش می‌دهیم چنین اطلسی را C^{∞} گویند اگر برای هر دو نقشه‌ی x و y از اطلس A که اشتراک قلمروهایشان تهی نباشد $x\mathrm{oy}^{-1}: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ یک وابرریختی باشد.

۱-۲-۱۰ تعریف: یک اطلس C^∞ از یک مجموعه M را کامل گویند اگر مشمول در اطلس C^∞ دیگری نباشد. یک اطلس کامل C^∞ از مجموعه‌ی M به توی R^n یک ساختار C^∞،n بعدی روی M تعیین می‌نماید.

۱-۲-۱۱ تعریف: یک مجموعه‌ی M با ساختار C^∞ ارائه شده n بعدی، یک خمینه‌ی دیفرانسیل‌پذیر n بعدی نامیده می‌شود.

۱-۲-۱۲ تعریف: یک نقشه از یک اطلس کامل که یک ساختار C^∞ را تعیین می‌کند، یک نقشه از خمینه M نامیده می‌شود و قلمروش، قلمروی مختصاتی خمینه است.

با یک نقشه در نقطه $m \in M$ می‌فهمیم که یک نقشه از خمینه‌ی M با قلمروش U شامل m ، یک همسایگی مختصاتی m است.

۱-۲-۱۳ تعریف: فرض کنیم خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر M و M' به ترتیب از بعدهای n و n' باشد و $f: \mathrm{M} \to M'$ یک تابع باشد و فرضاً m نقطه‌ای از قلمروی تابع f بوده با انتخاب نقشه‌های x و x' به ترتیب در m و $f(m)$ تابع

$$F = x' o f o x^{-1}: R^{\mathrm{n}} \to R^{\mathrm{n}}$$

یک نمایشگر مختصاتی f نامیده می‌شود.

اگر F در xm از رده‌ی C^∞ باشد، آن‌گاه f را در m دیفرانسیل‌پذیر گویند.

تابع $f: \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ دیفرانسیل‌پذیر است اگر در هر نقطه از قلمرویش دیفرانسل‌پذیر باشد.

۱-۳ بردارهای مماس و فضای مماسی

۱-۳-۱ تعریف: دوتائی (P,v) در E^{n} را در نظر می‌گیریم، P نقطـه اثـر و v را یـک بـردار مماس در نقطه‌ی P از E^{n} نامند.

۱-۳-۲ تعریف: نقطه‌ی P در E^{n}را در نظر بگیرید، مجموعه‌ی بردارهای مماس در نقطه‌ی P از E^{n} را به صورت $\mathrm{T_P}(E^n)$ نشان می‌دهند و $\mathrm{T_P}(E^n)$ را فضای مماسی E^{n} در نقطه P نامند.

توجه: از این پس $(P,v) \in \mathrm{T_P}(E^n)$ را با v_{P} نمایش می‌دهیم، و $\mathrm{T_P}(E^n)$ با عمـل جمـع و ضرب عددی یک زیرفضای برداری است.

$$\oplus: \mathrm{T_P}(E^n) \times \mathrm{T_P}(E^n) \to \mathrm{T_P}(E^n)$$

$$(v_{\mathrm{P}},u_{\mathrm{P}}) \to v_{\mathrm{P}} \oplus u_{\mathrm{P}} = (P,v+u) = (v+u)|_P$$

$$\odot: R \times \mathrm{T_P}(E^n) \to \mathrm{T_P}(E^n)$$

$$(\lambda,v_{\mathrm{P}}) \to \lambda\odot(v_{\mathrm{P}}) = (P,\lambda v) = \lambda v_{\mathrm{P}}$$

که در این‌جا ساختمان $\{\mathrm{T_P}(E^n)\ ,\ \oplus\ ,R,\ +\ ,.\ ,\odot\}$ روی میدان حقیقـی R یـک فضـای برداری است بنابراین اگر V فضای برداری E^{n} باشد، فضای مماس را به‌طور خلاصه به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

$$\mathrm{T_P}(E^n) = \{(P,v): v \in V\ ,\ P \in E^n\}$$

۱-۳-۳ تعریف: اگر $U \subset E^n$ و U یک مجموعه‌ی باز باشد، تابع

$$X: U \to \bigcup_{P\in U} \mathrm{T_P}(U)$$

با ضابطه $X(P) = X_P$ تابعی است که نقاط P از U را به فضای برداری X_P از $\bigcup_{P\in U} \mathrm{T_P}(U)$ می‌نگارد و آن را میدان برداری روی U گویند.

حال تابع زیر را می‌توان تعریف کرد:

$$\pi: \bigcup_{P\in U} \mathrm{T_P}(U) \to U$$
$$X_P \to P$$

و آن را تصویر طبیعی نامند و خود $\pi o\mathrm{x} = \mathrm{I}: \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ یک تابع همانی است. اگر به جای فضای اقلیدسی E^n یک خمینه مانند M در نظر گرفته شود آن‌گاه تبدیل X به صورت زیر است:

$$X: M \to \bigcup_{P\in U} \mathrm{T_P}(U)$$
$$P \to X(P) = X_P \in \mathrm{T_P}(M)$$

به طوریکه اگر:

$$\pi: \bigcup_{P\in U} \mathrm{T_P}(U) \to U$$
$$X(P) \to P$$

تصویر طبیعی باشد و

$$\pi o\mathrm{x} = \mathrm{I}: \mathrm{U} \to \mathrm{U}$$
$$P \to P$$

آنگاه X روی خمینه‌ی M یک میدان برداری است.

۱-۳-۴ تعریف: مجموعه میدان‌های برداری روی M که با $\chi(\mathrm{M})$ نشان مـی‌دهنـد فضـای میدان برداری را تشکیل می‌دهد و نماد آن عبارت‌است از:

$$\chi(\mathrm{M}) = \left\{X | X: M \to \bigcup_{P\in U} \mathrm{T_P}(U)\right\}$$

با توجه به تعریف جمع:

$\oplus: \chi(\mathrm{M}) \times \chi(\mathrm{M}) \to \chi(\mathrm{M})$

$(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \to \mathrm{X} \oplus \mathrm{Y}$

برای هر P **در** M، $(X+Y)_{\mathrm{P}} = X_{\mathrm{P}} + Y_{\mathrm{P}}$ **و** $\left(\chi(\mathrm{M}), +\right)$ **یک گروه تعویض‌پذیر است.**

ضرب عددی با میدان‌های برداری (فضای برداری) عبارت است از:

$\odot: R \times \chi(\mathrm{M}) \to \chi(\mathrm{M})$

$(k,\mathrm{X}) \to k\mathrm{X}$

$\forall P \in M \Rightarrow (kX)_P = k\vec{X}_P$

پس ویژگی‌های فضای برداری در آن صدق می‌کند یعنی ساختمان

$\{\chi(\mathrm{M}), \oplus, R, +, ., \odot\}$ **یک فضای برداری است.این فضای برداری را روی خمینه‌ی** M **یا فضای اقلیدسی** $\mathrm{E^n}$، **یک فضای میدان برداری گویند که به صورت** $\chi(\mathrm{E^n})$ **هم ارائـه مـی شود.**

۱-۳-۵ مثال: $\mathrm{n}+1$ **وجهی** $(P_0,P_1,\cdots,P_n)$ **در** $\mathrm{E^n}$ **مفروض است. مختصات اقلیدسی کـه به وسیله‌ی مجموعه نقاط** $(P_0,P_1,\cdots,P_n)$ **معلوم می‌گـردد بـه صـورت** $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ **نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی برداری** $\left\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2},\cdots,\overrightarrow{P_0P_n}\right\}$ **در** $\mathrm{E^n}$ **درواقـع یـک پایـه‌ی فضای برداری** $\mathrm{E^n}$ **است.**

اکنون $v_i = \overrightarrow{P_0P_i}$ را درنظر می‌گیریم در آن‌صورت:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}: \mathrm{E^n} \to \cup_{P\in \mathrm{E^n}} \mathrm{T_P}(\mathrm{E^n})$$

$$P \to \frac{\partial}{\partial x_i}(P) = (P,v) = v_P$$

می‌توان گفت که $\frac{\partial}{\partial x_i}$ یک میدان برداری در $\mathrm{E^n}$ است. به طور مشابه برای هر i ، $1 \le i \le n$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}: \mathrm{E^n} \to \cup_{P\in \mathrm{E^n}} \mathrm{T_P}(\mathrm{E^n})$$

$$P \to \frac{\partial}{\partial x_i}(P) = (P,\overrightarrow{P_0P_i})$$

می‌توان ارائه کرد.

۱-۳-۶ تعریف: در هر نقطه P در $\mathrm{E^n}$، n تا بردار مماس به‌صورت

$$\frac{\partial}{\partial x_1}|_P = \frac{\partial}{\partial x_1}(P) = (1,0,\cdots,0)|_P$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}|_P = \frac{\partial}{\partial x_2}(P) = (0,1,\cdots,0)|_P$$

.

.

.

$$\frac{\partial}{\partial x_n}|_P = \frac{\partial}{\partial x_n}(P) = (0,0,\cdots,1)|_P$$

وجود دارد. بنابراین در $\mathrm{E^n}$، n تا بردار به دست می‌آید.

مجموعه میدان برداری $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ را پایه‌ی طبیعی در $\mathrm{E^n}$ و یا به طور خلاصه میدان برداری طبیعی نامند. در واقع مفهومش این است که برای هر $1 \le i \le n$ میدان برداری $\frac{\partial}{\partial x_i}$ مثبت بوده و در جهت محور x_i، میدان برداری یکه است. اگر $Y \in \chi(\mathrm{E^n})$ را در نظر بگیریم با توجه به تعریف، پایه $\{y_i\}_{i=1}^n$ به صورت

$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ارائه می‌شود. در این‌جا $1 \leq i \leq n$، $y_i: E^{\mathrm{n}} \to R$ توابع مختصاتی اقلیدسی میدان برداری است.

۱-۴ دیفرانسیل گیری نسبی و مشتق

به فرض که x یک نقشه با قلمروی U از یک خمینه ی دیفرانسیل‌پذیر M باشد. نسبت به این نقشه و نقشه همانی روی R ، یک تابع دیفرانسیل‌پذیر $f: \mathrm{M} \to \mathrm{R}$ با قلمروی V دارای نمایش مختصاتی F است بطوریکه روی $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ ، $\mathrm{f} = \mathrm{F}ox$ در این صورت $F: \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}$ یک تابع دیفرانسیل‌پذیر است، پس دارای مشتق نسبی $F_{,i}(i = 1,2, \cdots ,n)$ است.اکنون $\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_{,i}ox: \mathrm{M} \to R$ را تعریف کنیم. این ها تابع‌های دیفرانسیل‌پذیر با قلمرو $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ هستند.

وقتی $x: \mathrm{M} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ یک نقشه همانی باشد، چنین توابعی مشتق‌های نسبی هستند. بویژه نقشه همانی روی R که معمولاً با t نمایش می دهند. پس اگر $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ یک تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد، $\frac{\partial f}{\partial t}$ مشتق معمولی $\frac{df}{dt}$ است، بطور کلی توابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ درست شبیه مشتق‌های نسبی عمل می کنند.

۱-۴-۱ قضیه : اگر f و g دو تابع دیفرانسیل‌پذیر در M باشند، اگر $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ آنگاه:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f+\beta g)=\alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg)=\frac{\partial f}{\partial x_i}g+f\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

اثبات : اگر F وG بترتیب نمایشگرهایی ازf و g با استفاده از نقشه ارائـه شـده x ونقشـه همانی رویR باشند آنگاه $\alpha F+\beta G$ نمایشگر متناظر برای $\alpha f+\beta g$ است. نمایشگر فوق برای $\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f+\beta g)$ عبارت است از :

$$(\alpha F+\beta G)_{,i}$$

و این برابر است با: $\alpha F_{,i}+\beta G_{,i}$ **برای** $\alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha f+\beta g)=\alpha\frac{\partial f}{\partial x_i}+\beta\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

و برای دومی نیز با روش مشابه ثابت می شود.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg)=(FG)_{,i}=\left(F_{,i}G=FG_{,i}\right)ox$$

$$=\left(F_{,i}ox\right)G+F\left(foG_{,i}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_i}g+f\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

۱-۴-۲ تعریف مشتق جهتی (سـویی) : فرض کنیم $f:\mathrm{E^n}\to\mathrm{R}$ یک تابع دیفرانسیل‌پـذیر باشد و $v_{\mathrm{p}}\in T_p(\mathrm{E^n})$، $\overrightarrow{v_{\mathrm{p}}}=\overrightarrow{\mathrm{pq}}$ دراین صورت:

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{p}}}[f]=\frac{d}{dt}[f\left(p_1+t(q_1-p_1),p_2+t(q_2-p_2),p_n+t(q_n-p_n)\right)]|_{t=0}$$

را مشتق f در جهت(سوی) v_{p} نامند.