بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

## پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش بنیادی

# تصحیح کوانتومی مرتبه اول تابش لارمور در الکترودینامیک کوانتومی

استاد راهنما:

دکتر مجید عموشاهی

پژوهشگر:

نرگس بهمنی

آذرماه ۱۳۹۱

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

# پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش بنیادی

# خانم نرگس بهمنی تحت عنوان

# تصحیح کوانتومی مرتبه اول تابش لارمور در الکترودینامیک کوانتومی

در تاریخ ۱۳۹۱/۹/۲۹ توسط هیئت داوران زیر بررسی و با درجه ................... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر مجید عموشاهی با مرتبه ی استادیار امضا

۲- استاد داور داخل گروه دکترسیدجواد اخترشناس با مرتبه ی دانشیار امضا

۳- استاد داورخارج از گروه دکتر بهروز میرزا با مرتبه ی استاد امضا

**امضای مدیر گروه**

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به پدر و مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم

## چکیده

تابش لارمور یک پدیده ی شناخته شده در الکترودینامیک کلاسیک است که در طول فعالیت های انجام شده در اواخر قرن نوزدهم کشف شد. می‌توان گفت این تابش، یک تابش کلاسیکی است که در اثر شتابدارشدن ذره باردار به‌وجود می‌آید و فرمولی که مقدار انرژی حاصل از این تابش را اندازه گیری می‌کند به فرمول لارمور معروف است. در یک مجموعه از کارهای انجام شده در قبل می‌توان دید که تصحیح کوانتومی تابش لارمور بر مبنای الکترودینامیک کوانتومی اسکالر مورد بررسی قرار گرفته است. از طرفی این فرمول در QED برای ذره باردار اسکالری که در یک خط مستقیم حرکت می‌کند نیز قابل محاسبه است و می‌توان از این فرمول برای محاسبه تصحیح کوانتومی ناشی از یک بار شتابدار در یک حرکت نسبیتی استفاده کرد. توجه ما در قسمت اول محاسباتمان بیشتر بر روی تصحیح کوانتومی مرتبه اول در یک تقریب غیرنسبیتی است که با استفاده از یک تقریب نیمه کلاسیکی این تصحیح را برای دو حالت زیر محاسبه می‌کنیم:

۱) حالتی‌که در آن ذره باردار به‌وسیله یک پتانسیل وابسته به زمان شتابدار می‌شود
۲) حالتی‌که ذره باردار به‌وسیله یک پتانسیل وابسته به یکی از مختصات مکان شتابدار می‌شود

برای حالت اول تصحیحات انجام شده از نتایج کلاسیکی آن کوچکتر است مگر این‌که انرژی ساطع شده از فوتون قابل مقایسه با انرژی جرم سکون ذره باشد. در حالت دوم نیز اگر انرژی ساطع شده خیلی کوچکتر از انرژی جنبشی ذره در راستای آن مختصه مکانی باشد تصحیحات در مقایسه با نتیجه کلاسیکی آن کوچک است.

برای انجام بقیه محاسبات از تصحیح کوانتومی مرتبه اول تابش لارمور در حد نسبیتی استفاده کرده و با در نظر گرفتن فرایند خروج فوتون از یک ذره باردار فرمول مربوط به انرژی تابش را برای دو حالت نسبیتی و غیرنسبیتی محاسبه می‌کنیم. در نهایت قصد داریم تا تصحیح مرتبه اول فرمول لارمور را برای یک ذره باردار در حضور ماده مغناطو–دی الکتریک محاسبه کنیم. برای این کار با معرفی کردن یک لاگرانژی ابتدا معادلات حرکت پتانسیل های برداری و متغیرهای دینامیکی مربوط به ماده را به‌دست آورده و سپس با حل این معادلات تصحیح مرتبه اول تابش لارمور در حضور ماده مغناطو– دی الکتریک را محاسبه می‌کنیم.

**کلید واژه ها:** تابش لارمور، تصحیح کوانتومی، ماده مغناطو– دی الکتریک، تقریب غیر نسبیتی

## فهرست مطالب

**عنوان** **صفحه**

**عنوان** **صفحه**

## فهرست شکل ها

**عنوان** **صفحه**

# فصل اول

# تصحیح کوانتومی فرمول تابشی لارمور در الکترودینامیک نرده ای

## ۱- ۱ فرمول لارموردرالکترودینامیک

زمانی که یک ذره باردار در حضور پتانسیل شتابدار شود از خود فوتون تابش می‌کند. این تابش یک نتیجه شناخته شده در الکترودینامیک کلاسیک است که به تابش لارمور معروف می‌باشد و فرمولی که مقدار انرژی خارج شده در طی این فرایند را محاسبه می‌کند توسط لارمور به‌دست آمد.

از آنجایی که الکترودینامیک کلاسیک تقریبی از الکترودینامیک کوانتومی[۱] است می‌توان انتظار داشت که فرمول لارمور[۲] درتئوری های کوانتومی در حد $\hbar \rightarrow 0$ نیز ظاهر شود. همچنین می‌توان نشان داد که این فرمول در QED برای ذره باردار اسکالری که در یک خط مستقیم حرکت می‌کند در حد $\hbar \rightarrow 0$ نیز دوباره به‌دست می‌آید[۱].

[1] Quantum electrodynamics
[2] Larmor formula

اگرچه فرمول لارمور به طور صحیح مقدار انرژی خارج شده را به عنوان تابش در حد$\hbar \rightarrow 0$ به ما می‌دهد اما نمی‌توان گفت که این فرمول همیشه کاربرد دارد. برای مثال در مرجع [۲] مدلی با یک ذره باردار اسکالر که تا مرتبه $e^2$ قابل حل است درQED مطالعه و نشان داده شده که نتایج برای انرژی تابش شده متفاوت از فرمول لارمور است.

تعمیم[۳] نسبیتی فرمول لارمور را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E_{em}^{(0)} = -\frac{e^2}{6\pi c^3}\int dt \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} \qquad (۱-۱)$$

که در آن $e$ بار ذره و $c$ سرعت نور و$\tau$ زمان ویژه در راستای جهان خط مربوط به ذره است[۳]. تخمین زدن تصحیح تا مرتبه$\hbar$ فرمول لارمور برای حرکت کلی ذره باردار جالب خواهد بود. می‌توان این کار را برای یک مدل ساده استفاده شده در [۴، ۵] انجام دادکه در آن مدل، ذره اسکالر که حالت اولیه اش یک ویژه حالت تکانه است بوسیله یک پتانسیل برداری وابسته به یکی از مختصات فضازمانی شتابدار شده است. ما در این فصل تصحیح کوانتومی فرمول لارمور در حد $\hbar$ را برای دو حالت محاسبه می‌کنیم:

۱) حالتی که در آن ذره باردار توسط یک پتانسیل برداری وابسته به زمان شتابدار شده
۲) حالتی که در آن ذره باردار توسط یک پتانسیل برداری غیروابسته به زمان که تابعی از یکی از مختصات فضایی است شتابدار شده

علاوه برآن به دلیل پیچیده بودن محاسبات در حالت نسبیتی از یک تقریب غیرنسبیتی استفاده می‌کنیم.

در ابتدای فصل فرمول لارمور را ازالکترودینامیک کوانتومی برای یک ذره باردار اسکالری که فقط به وسیله ی یک پتانسیل برداری وابسته به زمان $V^\mu$ شتابدارشده به‌دست می‌آوریم [۱، ۴]. برای این منظور درابتدا فرض کرده که $V^\mu(t)$ فقط در بازه $[-T,T]$ به ازای $T > 0$ تغییر می‌کند سپس برای $t < -T$ ، $V^\mu(t)$ را مساوی صفر و برای $t > T$ آنرا یک مقدارثابت غیرصفردر نظر می‌گیریم. همچنین از یک تبدیل پیمانه ای[۴] برای تحمیل شرط $V_0(t) = 0$ به ازای تمام t ها استفاده می‌کنیم. چگالی لاگرانژی[۵] مدل ما به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\mathcal{L} = [(D_\mu + ieA_\mu)\phi]^\dagger[(D^\mu + ieA^\mu)\phi] - \frac{m^2}{\hbar^2}\phi^\dagger\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\upsilon}F^{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \qquad (۲-۱)$$

---

[3] Generalization
[4] Gauge transformation
[5] Lagrangian density

که در آن $D_\mu \equiv \partial_\mu + \frac{i}{\hbar}V_\mu$ و $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ نشان دهنده قدرت میدان است.با در نظرگرفتن پیمانه فاینمن[6] که در آن معادله میدان بدون برهمکنش، معادله میدانی با $e=0$ برای $A_\mu$ و به صورت $\partial_\upsilon \partial^\upsilon A^\mu = 0$ است می‌توانیم $A_\mu$ را به شکل مدهای اندازه حرکت به صورت زیر بسط دهیم

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2k(2\pi)^3}\left[a_\mu(\mathbf{k})e^{-ik.x} + a_\mu{}^\dagger(\mathbf{k})e^{ik.x}\right] \qquad (۱-۳)$$

در حالی که $k = |\vec{k}|$ ، $k.x = k\,t - \mathbf{k}.\mathbf{x}$ است وعملگرهای $a_\mu(\mathbf{k})$ و $a_\mu{}^\dagger(\mathbf{k})$ در رابطه ی جابه جایی زیر صدق می کنند

$$\left[a_\mu(\mathbf{k}), a_\upsilon{}^\dagger(\mathbf{k}')\right] = -2\hbar k(2\pi)^3 g_{\mu\upsilon}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \qquad (۱-۴)$$

ما می‌توانیم از بسط فوریه  برای میدان اسکالراستفاده کنیم، بنابراین می‌نویسیم:

$$\phi(x) = \hbar \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0(2\pi\hbar)^3}\left[A(\mathbf{p})\Phi_{\mathbf{p}}(x) + B^\dagger(\mathbf{p})\phi^*_{\mathbf{p}}(x)\right] \qquad (۱-۵)$$

تابع حالت $\Phi_{\mathbf{p}}(x)$ از تابع حالت آزاد استاندارد $e^{-ip.x/\hbar}$ متفاوت است زیرا معادله حرکت مربوط به میدان اسکالر با $e = 0$ معادله میدان آزاد نیست بلکه در معادله زیر صدق می کند(در اینجا نیازی نیست که حالت پاد ذره $\overline{\Phi}_{\mathbf{p}}(x)$ را در نظر بگیریم چون رابطه ی خیلی ساده ای با $\Phi_{\mathbf{p}}(x)$ دارد).

$$(\hbar^2 D_\mu D^\mu + m^2)\Phi_{\mathbf{p}}(x) = 0 \qquad (۱-۶)$$

می‌توان با استفاده از لاگرانژی (۱-۲) معادله حرکت $\phi$ در تصویر برهمکنش را به صورت $(\hbar^2 D_\mu D^\mu + m^2)\phi(x) = 0$ نوشت و چون پتانسیل $V_\mu$ فقط به زمان وابسته است می‌توان تابع حالت را با استفاده از این معادله با انجام مراحل زیر به‌دست آورد.

ابتدا معادله حرکت مربوطه را باز کرده

$$\hbar^2\left(\partial_\mu + \frac{i}{\hbar}V_\mu\right)\left(\partial^\mu\phi + \frac{i}{\hbar}V^\mu\phi\right) + m^2\phi = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \hbar^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \hbar^2\nabla^2\phi + i\hbar\big(-\mathbf{\nabla}.(\mathbf{V}\phi)\big) - i\hbar\mathbf{V}.(\mathbf{\nabla}\phi) + (\mathbf{V}.\mathbf{V})\,\phi + m^2\phi = 0 \qquad (۱-۷)$$

که بعد از مرتب سازی واستفاده از اینکه $\mathbf{\nabla}.(\mathbf{V}\phi) = \mathbf{V}.(\mathbf{\nabla}\phi) + (\mathbf{\nabla}.\mathbf{V})\phi = \mathbf{V}.(\mathbf{\nabla}\phi)$ است به شکل زیر در می‌آید

[6] Feynman gauge

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \hbar^2 \nabla^2 \phi - 2i\hbar \mathbf{V}.(\boldsymbol{\nabla}\phi) + (\mathbf{V}.\mathbf{V})\,\phi + m^2\phi = 0 \qquad (۱-۸)$$

سپس با قراردادن $\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p}\, \tilde{\phi}(\mathbf{p},t) e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}.\mathbf{r}}$ در(۱-۸) خواهیم داشت:

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial t^2} + [(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2 + m^2]\tilde{\phi} = 0 \qquad (۱-۹)$$

که این رابطه شبیه معادله شرودینگر است با جوابی به شکل $\tilde{\phi} = Aexp\left(\frac{i}{\hbar} f(t)\right)$. حال با قرار دادن این جواب در معادله (۱-۹) می‌توان نوشت:

$$-\dot{f}^2(t) + i\hbar \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + [(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2 + m^2] = 0 \qquad (۱-۱۰)$$

اگر با استفاده از تقریب WKB بتوان$f(t)$ را به صورت$\cdots + f_0(t) + \hbar f_1(t) + \hbar^2 f_2(t)$ نوشت آنگاه خواهیم داشت:

$$i\hbar\left(\ddot{f}_0 + \hbar\ddot{f}_1 + \cdots\right) - \left(\dot{f}_0 + \hbar\dot{f}_1 + \hbar^2\dot{f}_2 + \cdots\right)^2 + [(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2 + m^2] = 0 \qquad (۱-۱۱)$$

با مساوی صفر قرار دادن ضریب $\hbar^0$، داریم:

$$-\dot{f}_0^{\,2} + [(\mathbf{p} - \mathbf{V})^2 + m^2] = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_0 = \pm \int_0^t \sigma_{\mathbf{p}}(\zeta)\, d\zeta \qquad (۱-۱۲)$$

که در آن

$$\sigma_{\mathbf{p}}(\zeta) \equiv \sqrt{|\mathbf{p} - \mathbf{V}(\zeta)|^2 + \mathrm{m}^2} \qquad (۱-۱۳)$$

انرژی جنبشی ذره اسکالر با تکانه $\mathbf{p}$ است.

از مساوی صفر گذاشتن ضریب $\hbar^1$ داریم:

$$i\ddot{f}_0 - 2\dot{f}_0\dot{f}_1 = 0 \Longrightarrow \dot{f}_1 = \frac{i}{2}\frac{d}{dt} log \dot{f}_0 = \frac{i}{2}\frac{d}{dt} log\sigma_{\mathbf{p}}(\mathrm{t}) \Longrightarrow f_1 = \frac{i}{2} log\sigma_{\mathbf{p}}(\mathrm{t}) \qquad (۱-۱۴)$$

و به همین ترتیب اگر ادامه دهیم می‌توانیم بنویسیم:

$$\widetilde{\phi}(\mathbf{p},t) = \\ A^{'}(\mathbf{p})\frac{1}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{p}}(t)}}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \sigma_{\mathbf{p}}(\zeta)\,d\zeta\right)\left(1+i\hbar\, g_{\mathbf{p}}(t)+\cdots\right)+ \\ B^{'}(\mathbf{p})\frac{1}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{p}}(t)}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^t \sigma_{\mathbf{p}}(\zeta)\,d\zeta\right)\ \left(1+i\hbar g_{\mathbf{p}}^{'}(t)+\cdots\right) \tag{۱-۱۵}$$

می‌توان در رابطه بالا از تعریف زیر استفاده کرد

$$\phi_{\mathbf{p}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{p}}(t)}}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \sigma_{\mathbf{p}}(\zeta)\,d\zeta\right)\psi_{\mathbf{p}}(t) \tag{۱-۱۶}$$

که $\psi_{\mathbf{p}}(t) = 1 + i\hbar g_{\mathbf{p}}(t) + \cdots$ است. در نهایت با قرار دادن $A^{'}(\mathbf{p}) = \sqrt{p_0}A(\mathbf{p})$ و $B^{'}(\mathbf{p}) = \sqrt{p_0}B(\mathbf{p})$ در رابطه ی (۱-۱۵) و قراردادن (۱-۱۵) درتعریف مربوط به $\phi(\mathbf{r},t)$ و مقایسه آن با (۱-۵) به نتیجه زیر برای تابع حالت می‌رسیم

$$\Phi_{\mathbf{p}}(x) = \sqrt{p_0}\phi_{\mathbf{p}}(t)\exp(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}.\mathbf{x}) \tag{۱-۱۷}$$

که در این رابطه داریم $p_0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$.

روابط جابه جایی[۷] بین عملگرهای خلق[۸] و فنا[۹] موجود در (۱-۵) به شکل زیر نوشته می‌شوند[۷]

$$\left[A(\mathbf{p}), A^{\dagger}(\mathbf{p}')\right] = \left[B(\mathbf{p}), B^{\dagger}(\mathbf{p}')\right] = 2p_0(2\pi\hbar)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{۱-۱۸}$$

که عملگرهای $A^{\dagger}(\mathbf{p})$ و $B^{\dagger}(\mathbf{p})$ به ترتیب یک ذره و یک پادذره را خلق می کنند.

حالت اولیه که شامل یک ذره باردار و بدون فوتون است[۶] را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|i\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}(2\pi\hbar)^3} f(\mathbf{p})A^{\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle \tag{۱-۱۹}$$

این حالت بهنجار شده به یک است به طوری که $\langle i|i\rangle = 1$. با استفاده از این شرط به رابطه ی زیر می‌رسیم

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}|f(\mathbf{p})|^2 = 1 \tag{۱-۲۰}$$

---

[7] Commutation
[8] Creation
[9] Annihilation

از آنجایی که در نظرگرفتن این فرض که تابع $f(\mathbf{p})$ یک قله حول یک اندازه حرکت داده شده با پهنایی از مرتبه $\hbar$ است، در حالت محاسبه تصحیح کوانتومی فرضی ناقص است بنابراین ما $f(\mathbf{p})$ را قله تیزی با یک دقت دلخواه درنظرگرفته به طوری که $|f(\mathbf{p})|^2$ متناسب با یک تابع دلتا[10] باشد.

یک حالت اولیه با یک ذره باردار در حالت کلی (که تا مرتبه $e^2$ را شامل می‌شود) به یک حالت نهایی به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$A^{\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle \longrightarrow [1+ i\hbar^{-1}\mathcal{F}(\mathbf{p})]A^{\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle + \frac{i}{\hbar}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2k(2\pi)^3}\mathcal{A}^{\mu}(\mathbf{p},\mathbf{k})a_{\mu}{}^{\dagger}(\mathbf{k})A^{\dagger}(\mathbf{P})|0\rangle \tag{۲۱-۱}$$

که درآن $\mathbf{P}=\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}$، تکانه ذره اسکالر هنگام خارج شدن یک فوتون است، $\mathcal{A}^{\mu}(\mathbf{p},\mathbf{k})$ دامنه خروج یک فوتون و $\mathcal{F}(\mathbf{p})$ دامنه پراکندگی رو به جلو است. با استفاده از تبدیل بالاحالت اولیه ذره در حالت کلی به شکل زیر نوشته می‌شود

$$|f\rangle = |f_0\rangle + |f_1\rangle \tag{۲۲-۱}$$

به طوری که

$$|f_0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}(2\pi\hbar)^3}[1+\ i\hbar^{-1}\mathcal{F}(\mathbf{p})]f(\mathbf{p})A^{\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle \tag{۲۳-۱}$$

$$|f_1\rangle = \frac{i}{\hbar}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}(2\pi\hbar)^3}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2k(2\pi)^3} f(\mathbf{p})\mathcal{A}^{\mu}(\mathbf{p},\mathbf{k})\ a_{\mu}{}^{\dagger}(\mathbf{k})A^{\dagger}(\mathbf{P})|0\rangle \tag{۲۴-۱}$$

احتمال انتشار در حدی که $f(\mathbf{p})$ قله تیز دلخواهی است را می‌توان با استفاده از روابط جابه جایی (۱-۴) و (۱-۱۱) به شکل زیر به‌دست آورد

$$\Gamma = \langle f_1|f_1\rangle = \frac{1}{\hbar}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{2k(2\pi)^3}\frac{P_0}{p_0}\left|\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{p}}\right|^{-1}|\mathcal{A}(\mathbf{p},\mathbf{k})|^2 \tag{۲۵-۱}$$

که در آن $|\mathcal{A}(\mathbf{p},\mathbf{k})|^2 \equiv -\mathcal{A}^{*}_{\mu}(\mathbf{p},\mathbf{k})\mathcal{A}^{\mu}(\mathbf{p},\mathbf{k})$ و $\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\mathbf{p}} \equiv \det\left(\frac{\partial P^i}{\partial p^j}\right)$ دترمینال ژاکوبی[11] است. تکانه $\mathbf{p}$ مقدار قله توزیع اندازه حرکت حالت اولیه را نشان می‌دهد.

---

[10] Delta-functio

[11] Jacobian determinant

انرژی ساطع شده را می‌توان با ضرب کردن انتگرال رابطه ی (۱-۲۵) در انرژی فوتون که $\hbar\mathrm{k}$ است را به‌دست - آورد. چون $\mathbf{P} = \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}$ بنابراین $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}} = 1$ از این‌رو چار- تکانه تابش خارج شده برابر می‌شود با:

$$\mathcal{P}^{\mu} = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{16\pi^3}\frac{\mathrm{P}_0}{\mathrm{p}_0}\mathrm{n}^{\mu}|\mathcal{A}(\mathbf{p},\mathbf{k})|^2 \tag{۱-۲۶}$$

که در آن $\mathrm{n}^{\mu} \equiv \frac{\mathrm{k}^{\mu}}{\mathrm{k}}$. با توجه به رابطه ی (۱-۲۱)، $\mathrm{A}^{\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle$ به صورت زیر تغییر می کند

$$\mathrm{A}^{\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle \longrightarrow \quad \ldots + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{2\mathrm{k}(2\pi)^3}\mathrm{f}(\mathbf{p})\mathcal{A}^{\mu}(\mathbf{p},\mathbf{k})\, \mathrm{a}_{\mu}{}^{\dagger}(\mathbf{k})\mathrm{A}^{\dagger}(\mathbf{P})|0\rangle \tag{۱-۲۷}$$

از طرفی با استفاده از سری دایسون به این صورت نوشته می‌شود:

$$\mathrm{A}^{\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle \longrightarrow \quad \ldots + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int d^4x H_I(x)\, \mathrm{A}^{\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle \tag{۱-۲۸}$$

که با مساوی قرار دادن دو طرف رابطه ی (۱-۲۷) و(۱-۲۸) و سپس ضرب کردن آنها در $\langle 0|a_{\mu'}(\mathbf{k}')\mathrm{A}(\mathbf{P}')$ و استفاده از روابط جابه جایی (۱-۴) و (۱-۱۸) می‌توان نوشت

$$\mathcal{A}_{\mu}(\mathbf{p},\mathbf{k}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'}{2\hbar\mathrm{p}_0{}'(2\pi\hbar)^3}\int d^4x\, \langle 0|a_{\mu}(\mathbf{k})\mathrm{A}(\mathbf{P}')\mathcal{H}_I(x)\mathrm{A}^{\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle \tag{۱- ۲۹}$$

برای محاسبه رابطه‌ی بالا به هامیلتونی برهمکنش نیاز داریم که بانوشتن هامیلتونی کل به صورت $\mathcal{H}(x) = \Pi_{\phi}\dot{\phi} + \Pi_{\phi^{\dagger}}\dot{\phi}^{\dagger} - \mathcal{L}$ و استفاده از لاگرانژی داده شده در (۱-۲) می‌توان آنرا به صورت زیر داشت

$$\mathcal{H}_I(x) = \frac{ie}{\hbar}A^0\left(\Pi_{\phi}\phi - \Pi_{\phi^{\dagger}}\phi^{\dagger}\right) - \frac{ie}{\hbar}A_i\left(\phi^{\dagger}\overleftrightarrow{D}_i\phi\right) + \frac{e^2}{\hbar^2}A_iA_i\phi^{\dagger}\phi \tag{۱-۳۰}$$

و با توجه به اینکه $\dot{\phi} = \Pi_{\phi^{\dagger}} - \frac{i}{\hbar}V_0\phi$ و $\dot{\phi}^{\dagger} = \Pi_{\phi} + \frac{i}{\hbar}V_0\phi^{\dagger}$ و $V_0 = 0$ است می‌توان نوشت:

$$\mathcal{H}_I(x) = \frac{ie}{\hbar}A_{\mu}\!:\!\left[\phi^{\dagger}D^{\mu}\phi - (D^{\mu}\phi)^{\dagger}\phi\right]\!: + \frac{e^2}{\hbar^2}\sum_{i=1}^{3}A_iA_i\!:\!\phi^{\dagger}\phi\!: \tag{۱-۳۱}$$

که با قرار دادن آن در رابطه ی (۱-۲۹) داریم:

$$\mathcal{A}_{\mu}(\mathbf{p},\mathbf{k}) = \frac{ie}{\hbar^2}\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'}{2\mathrm{p}_0{}'(2\pi\hbar)^3}\int d^4x\, \langle 0|a_{\mu}(\mathbf{k})\mathrm{A}(\mathbf{P}')\left\{A_{\nu}\!:\!\left[\phi^{\dagger}D^{\nu}\phi - (D^{\nu}\phi)^{\dagger}\phi\right]\!:\right\}\mathrm{A}^{\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle \tag{۱- ۳۲}$$

و با استفاده از روابط مربوط به $\phi$ و $A_\mu$ در(۱-۳) و(۱-۵) می توان نشان داد که [۴] و [۵] :

$$\mathcal{A}_\mu(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -ie\hbar\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{2p_0'(2\pi\hbar)^3}\int d^4x\, e^{ik.x}\left[\Phi^*_{\mathbf{p}'}(x)D_\mu\Phi_{\mathbf{p}}(x) - (D_\mu\Phi_{\mathbf{p}'}(x))^*\Phi_{\mathbf{p}}(x)\right] \quad (۱-۳۳)$$

که مؤلفه های آن به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\mathcal{A}_i(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -ie\hbar\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{2p_0'(2\pi\hbar)^3}\int dt\, e^{ikt}\int d^3x\, e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}\left[\Phi^*_{\mathbf{p}'}(x)\,\partial_i\Phi_{\mathbf{p}}(x) - \partial_i\Phi^*_{\mathbf{p}'}(x)\Phi_{\mathbf{p}}(x) + 2\frac{i}{\hbar}V_i\Phi^*_{\mathbf{p}'}(x)\Phi_{\mathbf{p}}(x)\right] \quad (۱-۳۴)$$

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -ie\hbar\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{2p_0'(2\pi\hbar)^3}\int dt\, e^{ikt}\int d^3x\, e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}\left[\Phi^*_{\mathbf{p}'}(x)(\partial_0\Phi_{\mathbf{p}}(x)) - (\partial_0\Phi^*_{\mathbf{p}'}(x))\Phi_{\mathbf{p}}(x)\right] \quad (۱-۳۵)$$

با قرار دادن $\Phi_{\mathbf{p}}(x) = \sqrt{p_0}\phi_{\mathbf{p}}(t)e^{i\mathbf{p}.\mathbf{x}/\hbar}$ در رابطه بالا و انتگرال گیری از (۱-۳۴) و(۱-۳۵) نسبت به $\mathbf{x}$ به روابط زیر می‌رسیم:

$$\mathcal{A}_i(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -\frac{e}{2}\sqrt{\frac{p_0}{P_0}}\int dt\, e^{ikt}\phi^*_{\mathbf{P}}(t)\phi_{\mathbf{p}}(t)[p_i + P_i - 2V_i(t)] \quad (۱-۳۶)$$

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -\frac{ie\hbar}{2}\sqrt{\frac{p_0}{P_0}}\int dt\, e^{ikt}\left[\phi^*_{\mathbf{P}}(t)\frac{d\phi_{\mathbf{p}}(t)}{dt} - \frac{d\phi^*_{\mathbf{P}}(t)}{dt}\phi_{\mathbf{p}}(t)\right] \quad (۱-۳۷)$$

حال با استفاده از تقریب WKB معرفی شده در(۱-۱۶) می‌توان نوشت:

$$\phi^*_{\mathbf{P}}(t)\phi_{\mathbf{p}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{P}}(t)\sigma_{\mathbf{p}}(t)}}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t[\sigma_{\mathbf{p}}(\zeta) - \sigma_{\mathbf{P}}(\zeta)]\,d\zeta\right\}\psi^*_{\mathbf{P}}(t)\psi_{\mathbf{p}}(t) \quad (۱-۳۸)$$

با در نظر گرفتن کمترین مرتبه $\hbar$ و جایگزینی $\mathbf{P} = \mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}$ و $\sigma_{\mathbf{P}} = \sigma_{\mathbf{p}}\left(1 + \frac{\hbar^2k^2 - 2\hbar\mathbf{k}.(\mathbf{p}-\mathbf{V}(\zeta))}{2\sigma_{\mathbf{p}}^2}\right)$ در عبارت درون $\{\}$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$-\frac{i}{\hbar}\int_0^t\left[\sigma_{\mathbf{p}}(\zeta) - \sigma_{\mathbf{P}}(\zeta)\right]d\zeta \approx -i\mathbf{k}.\int_0^t\frac{\mathbf{p}-\mathbf{V}(\zeta)}{\sigma_{\mathbf{p}}(\zeta)}d\zeta \quad (۱-۳۹)$$

اگر $\mathbf{X}(t)$ موقعیت یک ذره کلاسیکی متناظر با حالت $A^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$ ، با اندازه حرکت $\mathbf{p}$ تحت تأثیر پتانسیل برداری $\mathbf{V}(t)$ باشد داریم:

$$m\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \mathbf{p} - \mathbf{V}(t) \qquad \text{و} \qquad m\frac{dt}{d\tau} = \sigma_{\mathbf{p}}(t) \quad (۱-۴۰)$$

رابطه بالا تا کمترین مرتبه $\hbar$ براینکه $\frac{\mathbf{p}-\mathbf{V}(t)}{\sigma_{\mathbf{p}}(t)}$ تقریباً مساوی $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$ است تأکید دارند.

با استفاده از این تقریب در رابطه ی (۱-۳۹) و جایگزینی نتیجه در رابطه ی (۱-۳۸) و استفاده از اینکه $\mathbf{X}(0) = 0$ به رابطه ی زیر تا کمترین مرتبه $\hbar$ می‌رسیم

$$\phi^*_{\mathbf{P}}(t)\phi_{\mathbf{p}}(t) \approx \frac{1}{\sigma_{\mathbf{p}}(t)} e^{-i\mathbf{K}.\mathbf{X}} \quad (۱-۴۱)$$

همچنین به آسانی می‌توان نشان داد که

$$i\hbar \frac{d\phi_{\mathbf{p}}(t)}{dt} \approx \sigma_{\mathbf{p}}(t)\phi_{\mathbf{p}}(t) \quad (۱-۴۲)$$

حال با جایگزین کردن روابط (۱-۴۱) و (۱-۴۲) در(۱-۳۶) و (۱-۳۷) و استفاده ازرابطه (۱-۴۰) خواهیم داشت:

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -e\int dt\, e^{ik.x} \quad (۱-۴۳)$$

$$\mathcal{A}^i(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -e\int dt \frac{dx^i}{dt} e^{ik.x} \quad (۱-۴۴)$$

که با ترکیب آنها به رابطه ی زیر می‌رسیم که در آن $\xi \equiv n.x$ است.

$$\mathcal{A}^\mu(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -e\int d\xi \frac{dx^\mu}{d\xi} e^{ik\xi} \quad (۱-۴۵)$$

به‌دلیل اینکه $\frac{dx^\mu}{d\xi}$ برای مقادیر به اندازه دلخواه بزرگتر از $|\xi|$ متناهی می‌باشد، رابطه ی (۱-۴۵) تعریف نشده است بنابراین یک فاکتور قطع $\chi$ معرفی کرده که در فاصله ای که در آن شتاب رخ می‌دهد برابر۱ است و به آرامی بین ۰ و ۱ تغییر می کند.

با معرفی این فاکتور دامنه خروج به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\mu(\mathbf{p},\mathbf{k}) &= -e\int d\xi \frac{dx^\mu}{d\xi}\chi(a\xi)e^{ik\xi} = -\frac{e}{ik}\int d\xi \frac{dx^\mu}{d\xi}\chi(a\xi)\frac{d}{d\xi}\left(e^{ik\xi}\right) \\ &= -\frac{e}{ik}\left\{\int \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dx^\mu}{d\xi}\chi(a\xi)e^{ik\xi}\right)d\xi - \int \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dx^\mu}{d\xi}\chi(a\xi)\right)e^{ik\xi}d\xi\right\} \\ &= \frac{e}{ik}\int \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dx^\mu}{d\xi}\chi(a\xi)\right)e^{ik\xi}d\xi \quad (۱-۴۶)\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\mathcal{A}^\mu(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -\frac{ie}{k}\int d\xi \left[\frac{d^2x^\mu}{d\xi^2}\chi(a\xi) + a\frac{dx^\mu}{d\xi}\chi'(a\xi)\right]e^{ik\xi} \quad (۱-۴۷)$$

با جایگزین کردن معادله بالا در (۱-۲۶) و در نظر گرفتن حد $a \to 0$ می‌توانیم چار- تکانه را از تابش خارج شده تا کمترین مرتبه $\hbar$ و $e$ به‌دست آوریم به طوری که

$$\mathcal{P}^{\mu} = -\frac{e^2}{16\pi^2}\int d\Omega \int d\xi\, n^{\mu} \frac{d^2x^{\nu}}{d\xi^2}\frac{d^2x_{\nu}}{d\xi^2} \tag{۴۸-۱}$$

و $d\Omega$ زاویه فضایی مربوط به بردار واحد $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ می‌باشد. با استفاده از اینکه $\frac{d\xi}{dt} = n_{\mu}\frac{dx^{\mu}}{dt}$ است در رابطه بالا می‌توان مشتق $\xi$ را به مشتق $t$ تبدیل کرد به این ترتیب که در ابتدا با استفاده از روابط زیر

$$\frac{dx^{\mu}}{d\xi} = \frac{dx^{\mu}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\xi} \longrightarrow \frac{d^2x^{\mu}}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dx^{\mu}}{dt}\cdot\frac{dt}{d\xi}\right) = \frac{d^2x^{\mu}}{dt^2}\cdot\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^2 + \frac{dx^{\mu}}{dt}\cdot\frac{d^2t}{d\xi^2} \tag{۴۹-۱}$$

$$\frac{dt}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt} = 1 \longrightarrow \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dt}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}\right) = 0 \longrightarrow \frac{d^2t}{d\xi^2} = -\left(\frac{dt}{d\xi}\right)^3\frac{d^2\xi}{dt^2} \tag{۵۰-۱}$$

می‌توان نوشت :

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\xi^2} = \left(\frac{dt}{d\xi}\right)^3\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d^2x^{\mu}}{dt^2} - \frac{d^2\xi}{dt^2}\frac{dx^{\mu}}{dt}\right) \tag{۵۱-۱}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathcal{P}^{\mu} = -\frac{e^2}{16\pi^2}\int dt \int d\Omega\dot{\xi}^{-5}n^{\mu}n_{\sigma}n_{\rho}\left[\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\rho}\ddot{x}^{\nu}\ddot{x}_{\nu} - 2\dot{x}^{\sigma}\ddot{x}^{\rho}\ddot{x}^{\nu}\dot{x}_{\nu} + \ddot{x}^{\sigma}\ddot{x}^{\rho}\dot{x}^{\nu}\dot{x}_{\nu}\right] \tag{۵۲-۱}$$

نقطه مشتق زمانی را نشان می‌دهد و انتگرال حول زاویه فضایی را می‌توان با استفاده از رابطه ی زیر محاسبه کرد[۴].

$$\int d\Omega\dot{\xi}^{-5}n^{\mu}n_{\sigma}n_{\rho} = \frac{4}{3}\pi\left[6\gamma^8\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\sigma}\dot{x}_{\rho} - \gamma^6(\delta^{\mu}_{\sigma}\dot{x}_{\rho} + \dot{x}^{\mu}g_{\sigma\rho} + \delta^{\mu}_{\rho}\dot{x}_{\sigma}\right] \tag{۵۳-۱}$$

که $\gamma \equiv \frac{dt}{d\tau} = (\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu})^{-1/2}$. بنابراین با جایگزینی(۱-۵۳) در(۱-۵۲) می توان نوشت

$$\mathcal{P}^{\mu} = -\frac{e^2}{6\pi}\int dt\dot{x}^{\mu}\left[\gamma^4\ddot{x}.\ddot{x} - \gamma^6(\dot{x}.\ddot{x})^2\right] \tag{۵۴-۱}$$

و در نهایت با تبدیل مشتق $t$ به مشتق $\tau$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{P}^{\mu} = -\frac{e^2}{6\pi c^4}\int d\tau\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{d^2x^{\nu}}{d\tau^2}\frac{d^2x_{\nu}}{d\tau^2} \tag{۵۵-۱}$$

که این رابطه نتیجه شناخته شده ای در الکترودینامیک کلاسیک است و مؤلفه $\mathcal{P}^0 c$ آن فرمول لارمور(۱-۱) را به ما می‌دهد.