نقاط اکستریم محفوظ

توسط

اعظم قائمی‌مهر

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ
کارشناسی ارشد ،ریاضی محض

زیر نظر

دکتر داریوش بهمردی

شهریور ۹۲

دانشکدهٔ علوم پایه

دانشگاه الزهراء (س)

تهران

قدردانی

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه‌ی درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه‌ی آن‌ها شاخ و برگ گیرم و از سایه‌ی وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

به مصداق من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق، بسی شایسته است از استاد فرهیخته و بزرگوارم آقای دکتر داریوش بهمردی، که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند تقدیر و تشکر نمایم.

از آقای دکتر فرید بهروزی که زحمت مشاوره‌ی این پایان نامه را تقبل فرمودند کمال تشکر را دارم.

امید آن دارم که این پژوهش خدمتی هر چند کوچک به جامعه‌ی علمی کشور عزیزمان باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه مفهوم نقاط اکستریم محفوظ را بیان می‌کنیم هم چنین خاصیت رادون نیکودیم و کرین میلمن را بیان کرده و با معرفی نقاط نمایان ارتباط بین این خواص و نقاط نمایان و نقاط اکستریم را با بیان قضیه ها موشکافی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر فضای باناخی که خاصیت رادون نیکودیم دارد، خاصیت کرین میلمن نیز دارد و در نهایت به ارتباط بین نقاط اکستریم محفوظ و فضاهای باناخ انعکاسی، می‌پردازیم.

کلمات کلیدی . نقطه‌ی اکستریم، نقطه‌ی اکستریم محفوظ، نقطه‌ی نمایان، نقطه‌ی به طور قوی نمایان، نقطه‌ی به طور ضعیف نمایان، خاصیت رادون نیکودیم، خاصیت کرین میلمن، نرم موضعا مدور یکنواخت، نرم به طور ضعیف مدور یکنواخت، فضای انعکاسی.

فهرست مطالب

مقدمه

در آنالیز؛ مفاهیم نقطه‌ی اکستریم، خاصیت کرین میلمن و خاصیت رادون نیکودیم نقش مهمی را ایفا می‌کنند. مفاهیم دیفرانسیل‌پذیری، به خصوص دیفرانسیل‌پذیری فرشه و گاتو از مفاهیم مهم آنالیز غیرخطی است که در این پایان نامه این مفاهیم به صورت کامل مورد بررسی قرار گرفته‌اند و ارتباط متقابلی که بین این مفاهیم قابل بحث و بررسی هستند را با بیان قضایا و اثبات کامل، بیان کرده‌ایم.
در مجموعه‌ی حاضر در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه و پیش‌نیازها در فضای باناخ می‌پردازیم. در فصل دوم مفهوم دیفرانسیل‌پذیری فرشه و نیز دیفرانسیل‌پذیری گاتو، بیان می‌شود. در فصل سوم خاصیت رادون نیکودیم و خاصیت کرین میلمن را بیان می‌کنیم و نیز انواع نقاط که شامل نقاط اکستریم و نقاط نمایان است را معرفی می‌کنیم و در فصل چهارم مطالب سه فصل قبل را بر اساس مفاهیم مورد نیاز گردآوری کرده و به بیان ارتباط بین نقاط اکستریم و خاصیت کرین میلمن و رادون نیکودیم و نیز فضاهای انعکاسی، می‌پردازیم. قابل ذکر است که عمده‌ی مطالب گردآوری شده در این پایان نامه با استناد به منبع [۶]و [۹] و [۱۰] می‌باشند.

فصل ۱

مفاهیم اولیه و پیش نیازها

یادآوری ۱.۱. *فرض کنیم $X = (X, ||.||)$ یک فضای باناخ با میدان حقیقی باشد.*
$B_{||.||}(X) = \{x \in X; ||x|| \leq ۱\}$ را گوی واحد فضا و
$S_{||.||}(X) = \{x \in X; ||x|| = ۱\}$ را کره‌ی واحد فضا در نظر می‌گیریم.

ابتدا تعاریف زیر را بیان می‌کنیم که از مرجع [۱۷] آورده شده‌اند.

تعریف ۱.۱. *یک توپولوژی در مجموعه‌ی X، گردایه‌ای مانند τ از زیرمجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند.*
(۱) مجموعه‌های X و $\emptyset$ متعلق به τ هستند.
(۲) اجتماع اعضای هر زیرگردایه‌ی τ، متعلق به τ است.
(۳) مقطع (اشتراک) اعضای هر زیرگردایه‌ی متناهی τ، متعلق به τ است.
و مجموعه‌ی X را که برای آن توپولوژی‌ای مانند τ مشخص شده است، فضای توپولوژیکی می‌نامیم.
عناصر τ را مجموعه‌ی باز می‌نامیم و متمم هر مجموعه‌ی باز را مجموعه‌ای بسته می‌نامیم.

تعریف ۱.۲. *فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیکی باشد، β که زیرمجموعه‌ای از τ فرض شده است، یک پایه‌ی توپولوژیکی (مبنا) برای توپولوژی τ نامیده می‌شود*

هرگاه هر زیرمجموعه‌ی باز را بتوان به صورت اجتماعی از اعضای β نوشت.

تعریف ۱.۳. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی با توپولوژی τ باشد، اگر Y زیرمجموعه‌ای از X باشد، گردایه‌ی

$$\tau_Y = \{Y \cap U; U \in \tau\}$$

یک توپولوژی روی Y است و به توپولوژی زیرفضایی موسوم است. با این توپولوژی Y را یک زیرفضای X می‌خوانند. مجموعه‌های باز این توپولوژی عبارتند از همه‌ی مقاطع مجموعه‌های باز X با Y.

تعریف ۱.۴. [۹] دو نرم $|.|$ و $||.||$ روی فضای باناخ X را معادل گوییم اگر اعداد مثبت m و M وجود داشته باشند به طوری که برای هر $x \in X$، داشته باشیم

$$m||x|| \leq |x| \leq M||x||$$

یادآوری ۱.۲. مجموعه‌ی $C \subset X$ محدب است اگر برای هر $0 \leq t \leq 1$، $tC + (1 - tC) \subset C$. به عبارتی دیگر اگر $x \in C$ و $y \in C$ و $0 \leq t \leq 1$ باید C شامل $tx + (1 - t)y$ باشد.

تعریف ۱.۵. [۹] فرض کنیم C یک زیرمجموعه‌ی بسته، کران‌دار، محدب و متقارن از فضای باناخ X باشد و صفر نقطه‌ی درونی مجموعه‌ی C باشد، تابعک مینکوفسکی[1] $\mu_C(x)$ مجموعه‌ی C به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mu_C(x) = inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda C\}$$

بدیهی است اگر $x \in C$، آن‌گاه $\mu_C(x) \leq 1$.

[1] Minkowski

تعریف ۱.۶. C را یک مخروط می‌نامیم، در صورتی که به ازای هر $x \in C$ و هر $\lambda > 0$، $\lambda x \in C$.

تعاریف زیر از مرجع [۲۶] آورده شده‌اند.

تعریف ۱.۷. در فضاهای برداری توپولوژیکی، اصطلاح پایه‌ی موضعی همیشه به معنی یک پایه‌ی موضعی در صفر است. لذا یک پایه‌ی موضعی فضای برداری توپولوژیکی X گردایه‌ای مانند β از همسایگی‌های صفر است به طوری که هر همسایگی صفر شامل عضوی از β می‌باشد.

تعریف ۱.۸. اگر X و Y دو فضای برداری توپولوژیکی باشند، $B(X,Y)$ را گردایه‌ی تمام عملگرها از X به توی Y می‌گیریم. به خاطر سادگی، $B(X,X)$ را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم. وقتی Y را میدان اسکالر بگیریم، $B(X,Y)$ را فضای دوگان می‌نامیم و با x^* نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۹. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی با توپولوژی τ باشد که دوگانش X^*، جداکننده‌ی نقاط X است. X^* توپولوژی روی X را توپولوژی ضعیف X می‌نامیم و X توپولوژی روی X^* را ضعیف - ستاره توپولوژی X^* می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۰. می‌گوییم x_n به طور ضعیف به صفر همگرا است اگر هر همسایگی ضعیف صفر، شامل همه‌ی x_nها، با n به قدر کافی بزرگ باشد. در این حالت می‌نویسیم $x_n \xrightarrow{w} 0$. چون هر همسایگی ضعیف صفر، شامل یک همسایگی به شکل

$$V = \{x; |\Lambda_i x| < r_i \; ; \forall i, 1 \leq i \leq n\} \tag{1.1}$$

است که در آن $\Lambda_i \in X^*$ و $r_i > 0$، به آسانی معلوم می‌شود که $x_n \xrightarrow{w} 0$ اگر وتنها اگر، به ازای هر $\Lambda \in X^*$ داشته باشیم $\Lambda x_n \to 0$.

و می‌گوییم x_n همگرا به صفر است اگر هر همسایگی نرمی صفر، حاوی تمام x_n ها

با n به قدر کافی بزرگ باشد.

هر دنباله‌ی نرمی همگرا، به طور ضعیف همگرا است.

تعریف ۱.۱۱. مجموعه‌ی $E \subset X$ به طور ضعیف کران‌دار است، اگر و فقط اگر هر V به شکل (۱.۱) شامل tE به ازای $t = t(V) > 0$ باشد. این رخ می‌دهد اگر و فقط اگر نظیر هر $\Lambda \in X^*$ عددی مانند $\gamma(\Lambda) < \infty$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in E$، $|\Lambda x| \leq \gamma(\Lambda)$.

به عبارتی دیگر، مجموعه‌ی $E \subset X$، به طور ضعیف کران‌دار است اگر و فقط اگر هر $\Lambda \in X^*$، یک تابع کران‌دار بر E باشد.

تعریف ۱.۱۲. فضای X تفکیک‌پذیر[۲] است، هرگاه یک زیرمجموعه‌ی چگال شمارش‌پذیر در X وجود داشته باشد.

تعریف ۱.۱۳. فرض کنیم X و Y دو فضای متریک باشند و $f : X \longrightarrow Y$، در این صورت نمودار f برابر است با

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X, y \in Y, y = f(x)\} \subseteq X \times Y$$

و اگر $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته باشد، آن‌گاه نمودار f در $X \times Y$ بسته است.

قضیه ۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. به هر $T \in B(X, Y)$ یک عملگر الحاقی منحصر به فرد مانند $T^* \in B(Y^*, X^*)$ نظیر است که در رابطه‌ی

$$\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T^* y^* \rangle$$

به ازای هر $x \in X$ و هر $y^* \in Y^*$ صدق می‌کند. به علاوه، T^* در رابطه‌ی $||T^*|| = ||T||$ صدق می‌نماید.

---
[۲] Separable

تعریف ۱.۱۴. اگر X یک فضای برداری و $E \subset X$ باشد، غلاف محدب E که با $co(E)$ نموده می‌شود، اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب X است که شامل E می‌باشد. به بیان دیگر، $co(E)$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب متناهی از اعضای E می‌باشد و غلاف محدب بسته‌ی E که به صورت $\overline{co}(E)$ نوشته می‌شود عبارت است از بستار $co(E)$.

تعریف ۱.۱۵. فضای برداری توپولوژیکی X، فضای محدب موضعی است، اگر یک پایه‌ی موضعی مانند β که اعضایش محدب‌اند، داشته باشد.

قضیه ۱.۲. [۱۶] فرض کنیم A و B اعضایی از $B(X)$ باشند که X میدان برداری حقیقی است و $\alpha \in \mathbb{R}$ در این صورت گزاره‌های زیر را داریم.

(i) $(\alpha A + B)^* = \alpha A^* + B^*$

(ii) $A^{**} = (A^*)^* = A$

(iii) $(AB)^* = B^* A^*$

(iv) اگر A معکوس‌پذیر باشد، A^* معکوس‌پذیر است و $(A^*)^{-۱} = (A^{-۱})^*$

تعاریف زیر از مرجع [۹] آورده شده‌اند .

تعریف ۱.۱۶. فضای $\ell_p(\mathbb{N})$ برای $p \in [۱, \infty)$ برابر است با فضای باناخ تمام دنباله‌هایی به صورت $x = \{x_i\}_{i=۱}^{\infty}$ که $\sum_{i=۱}^{\infty} |x_i|^p <$ و

$$||x||_p = \Big(\sum_{i=۱}^{\infty} |x_i|^p\Big)^{\frac{۱}{p}}.$$

تعریف ۱.۱۷. $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ برابر است با فضای باناخ تمام دنباله های کران دار با نرم $||.||_\infty$.

به عبارت دیگر برای هر $x = \{x_i\}_{i=۱}^{\infty} \in \ell_\infty$ داریم،

$$||x||_\infty = sup\{|x_i|; i \in \mathbb{N}\}$$

تعریف ۱.۱۸. فضای $c_\circ = c_\circ(\mathbb{N})$ یک زیرفضای ℓ_∞ متشکل از تمام دنباله‌های $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ است که حد آن‌ها برابر صفر است.

تعریف ۱.۱۹. [۵] اگر $C \subset X$ یک زیرمجموعه از فضای محدب موضعی X باشد، $f \in X^*$ و $\alpha > \circ$ آن‌گاه مجموعه‌ی

$$S(f, C, \alpha) = \{x \in C; f(x) > supf(C) - \alpha\}$$

یک برش C نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲۰. [۵] نقطه‌ی $x \in C$، یک نقطه‌ی دندانه‌ای [۳] نامیده می‌شود اگر برش‌هایC که شامل نقطه‌ی x هستند، تشکیل یک مبنا برای توپولوژی نرمی C در نقطه‌ی x را بدهند.

تعریف ۱.۲۱. نیم فضا[۴]، یعنی تابعی مانند f وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و برای $x \in X$، داشته باشیم $f(X) > \alpha$.

تعریف ۱.۲۲. [۱۰] $span(M)$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات مستقل خطی عناصر M است و $\overline{span}(M)$ کوچکترین فضای بسته‌ی خطی X که حاوی M است.

حال مجموعه‌ی دندانه پذیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲۳. [۲۴] یک زیرمجموعه‌ی S از یک فضای باناخ X، دندانه پذیر[۵] نامیده می‌شود، اگر برای هر $\epsilon > \circ$، $x \in S$ وجود داشته باشد، به طوری که، $x \notin \overline{co}(S \backslash B(x, \epsilon))$.

دو لم زیر نیز برای دندانه پذیر بودن یک مجموعه به کار می روند.

لم ۱.۱. [۲۴] یک مجموعه‌ی B، دندانه پذیر است، اگر برای $\epsilon > \circ$ مفروضی، $x \in B$ وجود داشته باشد، به طوری که $x \notin \overline{co}\{y \in B; ||x - y|| > \epsilon\}$

[۳] denting
[۴] half-space
[۵] dentable

لم ۱.۲ . [۲۴] فرض کنیم C یک زیرمجموعه‌ی غیرخالی، بسته، کران‌دار و محدب از فضای باناخ X باشد، اگر برای $\epsilon > 0$ ، زیرمجموعه‌های محدب و بسته‌ی C_1, C_2 از C وجود داشته باشند به طوری که $C = \overline{co}(C_1 \cup C_2)$ و $C_1 \neq C_2$ و $diamC_2 \leq \epsilon$، آن‌گاه C دندانه پذیر است.

تعریف ۱.۲۴ . [۹] فضای باناخ X ، انعکاسی [۶] گفته می‌شود اگر نگاشت π که به صورت زیر تعریف می‌شود، نگاشتی پوشا از X به روی X^{**} باشد.

$$\pi : X \longrightarrow X^{**}$$

$$\pi(x) : f \longmapsto f(x)$$

فضای انعکاسی X ایزومتریک با X^{**} است.

گزاره‌های زیر مربوط به خاصیت انعکاس پذیری می‌باشند که از مرجع [۱۰] آورده شده‌اند.

قضیه ۱.۳ . فضای باناخ X انعکاسی است، اگر و فقط اگر B_X به طور ضعیف فشرده باشد.

گزاره ۱.۱ . فضای باناخ X انعکاسی است اگر و فقط اگر X^* انعکاسی باشد.

گزاره ۱.۲ . فضای باناخ X انعکاسی است اگر و فقط اگر توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف - ستاره‌ی X^* بر هم منطبق باشند.

قضیه ۱.۴ . (بی‌شاب - فلپس)[۷] فرض کنیم C یک زیرمجموعه‌ی غیر خالی، بسته، محدب و کران دار از فضای باناخ حقیقی X باشد، در این صورت مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی و پیوسته روی X که ماکزیمم‌شان را روی C اختیار می‌کنند، در X^* چگالند.

[۶] Reflexive
[۷] Bishop-phelps

به طور خاص مجموعه‌ی تمام تابعک‌های خطی و پیوسته روی X که نرمشان را اختیار می‌کنند، (ماکزیممشان را روی B_X اختیار می‌کنند) در X^* چگالند.

تعریف ۱.۲۵. [۶] اگر C یک زیرمجموعه‌ی کران دار از X^* باشد، $\epsilon > 0$ و $x \in X$، ضعیف-ستاره برش [۸] C به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S(x, C, \epsilon) = \{f \in C; f(x) > sup\{g(x), g \in C\} - \epsilon\}.$$

تعریف ۱.۲۶. [۹] می‌گوییم A، C- نرمینگ [۹] است، اگر به ازای هر $x \in X$

$$sup\{f(x); f \in A \cap B_{X^*}\} \geq \frac{1}{C}||x||$$

و می‌گوییم A، نرمینگ است اگر برای هر $C \geq 1$، C-نرمینگ باشد.
از اصطلاح نرمینگ فقط برای زیرفضاهای بسته‌ی X^*، استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۱.۳. [۹] هر زیر فضای نرمینگ X^*، یک مجموعه‌ی جداکننده‌ی نقاط X است.
اگر $F \in X^{**} \setminus X$، آن گاه $F^{-1}(0)$ زیرفضای نرمینگ X^* است.
اگر $x \in X \setminus \{0\} \subset X^{**}$، آن‌گاه $x^{-1}(0)$ نمی‌تواند نرمینگ باشد، زیرا به طور ضعیف-ستاره بسته است.

تعریف ۱.۲۷. ([۲۶]) فرض کنید X یک فضای باناخ و M زیرفضایی از X باشد. در این صورت

$$M^{\perp} = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = 0, \forall x \in M\}$$

لذا $M^{\perp}$ از تمام تابعک‌های خطی و کران دار بر X که روی M صفر می‌شوند، تشکیل شده است.

---
[۸] weak*-slice
[۹] C-norming

چون $M^\perp$ اشتراک فضاهای پوچ تابعک‌های ϕx است که در آن‌ها x روی M تغییر می‌کند و $\phi : X \to X^{**}$ یک یکریختی ایزومتر از X به روی یک زیرفضای بسته‌ی X^{**} می‌باشد، یعنی برای $x^* \in X^*$ داریم،

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, \phi x \rangle$$

و برای $x \in X$ داریم

$$||\phi x|| = ||x||$$

لذا $M^\perp$ یک زیرفضای ضعیف - ستاره بسته‌ی X^* می‌باشد.

قضیه ۱.۵. [۲۶] فرض کنیم X و Y دو فضای نرم دار باشند، به هر $\wedge \in B(X, Y)$ عدد

$$|| \wedge || = sup\{|| \wedge x||; x \in X; ||x|| \leq ۱\}$$

را مربوط می‌کنیم. این تعریف $|| \wedge ||$، فضای $B(X, Y)$ را به یک فضای نرم دار تبدیل می‌کند. اگر Y فضای باناخ باشد، $B(X, Y)$ نیز چنین است.

قضیه ۱.۶. [۲۶] هرگاه X و Y فضاهای نرم دار باشند و $\wedge \in B(X, Y)$، آن گاه،

$$|| \wedge || = sup\{|\langle \wedge x, y^* \rangle|; ||x|| \leq ۱; ||y^*|| \leq ۱\}$$

تعریف ۱.۲۸. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و Γ مجموعه‌ی دلخواه ناتهی باشد. در این صورت خانواده‌ی $\{(x_\gamma, x_\gamma^*);\ \gamma \in \Gamma\}$ عضو $X \times X^*$ یک سیستم دو متعامد نامیده می‌شود اگر $x_\beta^*(x_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$ ، که $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونکر است.

تعریف ۱.۲۹. [۹] فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد، یک سیستم دو متعامد [۱۰] $\{(x_\gamma, x_\gamma^*);\ \gamma \in \Gamma\}$ ، در X، یک پایه‌ی مارشوویچ [۱۱] از X نامیده می‌شود، اگر

---
[۱۰] biorthogonal
[۱۱] Markushevich

$X = \overline{span}\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ و $\{x^*_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ جداکننده‌ی نقاط X باشد.

قضیه ۱.۷. [۹] اگر X یک فضای باناخ تفکیک‌پذیر باشد، آن‌گاه X^* یک زیر فضای کامل با پایه‌ی مارشوویچ از X دارد.

حال مفاهیم مربوط به مبحث اندازه را بیان می‌کنیم که از مرجع [۱۳] آورده شده‌اند و در تعریف خاصیت رادون نیکودیم که در فصل ۳ بیان خواهیم کرد، مورد نیاز واقع خواهند شد.

تعریف ۱.۳۰. خانواده‌ی ناتهی S از زیرمجموعه‌های ناتهی X را یک جبر گوییم در صورتی که،

(۱) اگر A و B متعلق به S باشند، آن‌گاه $A\cup B$ نیز به S تعلق داشته باشد.

(۲) برای هر مجموعه‌ی A متعلق به S، مکمل آن نیز به S تعلق داشته باشد.

تعریف ۱.۳۱. جبر S از زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه‌ی X را یک σ-جبر گوییم اگر اجتماع شمارا از اعضای S نیز به S متعلق باشند.

تعریف ۱.۳۲. یک مجموعه را F_σ می نامیم، اگر بتوان آن را به صورت اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته نوشت و آن را G_δ می‌نامیم، اگر بتوان آن را به صورت اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز نوشت.

تعریف ۱.۳۳. تابع f در نقطه ی y از پایین نیم پیوسته است اگر $f(y)\neq -\infty$ و

$$f(y) \le \liminf_{x\to y} f(x) = \sup_{\delta>0}\inf_{0<|x-y|<\delta} f(x)$$

تعریف ۱.۳۴. فرض کنیم X مجموعه‌ی دلخواه باشد و M یک σ جبر از زیرمجموعه‌های X باشد، تابع $\mu : M\to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ را تابع اندازه گوییم اگر

(۱) برای هر $E\in M$ داشته باشیم $\mu(E)\ge 0$

(۲) $\mu(\emptyset)=0$

(۳) $\mu(\cup_{i=1}^{\infty}(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$

تعریف ۱.۳۵ . یک زیرمجموعه‌ی E از مجموعه‌ی ناتهی X را اندازه‌پذیر لبگ می‌نامیم اگر برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی A از X رابطه‌ی زیر برقرار باشد،

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c)$$

مثالی از یک فضای اندازه، فضای $(\mathbb{R}, M, m)$ است، که در آن $\mathbb{R}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی، M اندازه‌ی لبگ و m مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ از اعداد حقیقی می‌باشد.

تعریف ۱.۳۶ . اگر $\mu(X) < \infty$، اندازه‌ی μ را متناهی گوییم.
و نیز μ را یک اندازه‌ی σ ـ متناهی می‌نامیم هرگاه یک دنباله‌ی $\{E_j\}$ از عناصر M موجود باشد به طوری که $X = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ و $\mu(E_j) < \infty$.
و مجموعه‌ی $E \in M$ را σ ـ متناهی گوییم اگر دنباله‌ی $\{E_j\}$ از عناصر M موجود باشد به طوری که $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$ و به ازای هر j داشته باشیم $\mu(E_j) < \infty$.

تعریف ۱.۳۷ . تابع $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را ساده گوییم اگر
(۱) تابع φ اندازه پذیر باشد.
(۲) برد φ متناهی باشد.

تعریف ۱.۳۸ . اگر f یک تابع کران‌دار اندازه‌پذیر باشد که روی مجموعه‌ی اندازه‌پذیر E با اندازه‌ی متناهی mE، تعریف شده است، انتگرال لبگ f را روی E با برابری

$$\int_E f(x)dx = inf \int_E \psi(x)dx$$

تعریف می‌کنیم که در آن inf روی همه‌ی توابع ساده‌ی $f \leq \psi$ گرفته می‌شود.

حال فضای درختی جیمز(JT) [۱۲] را تعریف می‌کنیم.

[۱۲] James Tree space

تعریف ۱.۳۹. [۹] (i) مجموعه‌ی

$$T = \{(n,i); ۰ \leq i \leq ۲^n - ۱; n \in \mathbb{N} \setminus \{۰\}\}$$

با ترتیب جزئی $(<)$ که در زیر تعریف کرده‌ایم را در نظر می‌گیریم.

$$(n,i) < (n+۱, j) \Longleftrightarrow j \in \{۲i, ۲i+۱\}$$

در این صورت $(T,<)$ یک درخت دوتایی[۱۳] نامیده می‌شود.
(ii) *با استفاده از تعریف T، منظور از یک قطعه[۱۴]، زیرمجموعه‌ی*

$$S = \{t \in T; (n,i) \leq t \leq (m,j)\}$$

است که (n,i) و (m,j) عضو T هستند.
(iii) *یک زیرمجموعه‌ی ماکزیمال T با ترتیب خطی را یک شاخه[۱۵] گوییم.*
و در نهایت فضای درختی جیمز را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.
(iv) *فضای درختی جیمز، شامل تمام توابع حقیقی تعریف شده روی T است که با نرم زیر مجهز شده است.*

$$||x|| = sup\Big(\sum_{j=۱}^{k}\Big(\sum_{(n,i)\in S_j} x(n,i)\Big)^۲\Big)^{\frac{۱}{۲}}$$

که سوپریمم از تمام مجموعه‌های متناهی از قطعه‌های مجزای T گرفته شده است.

تعریف ۱.۴۰. [۹] *فرض کنیم X یک فضای برداری باشد و Y زیرفضایی از فضای برداری X باشد، نگاشت خطی $P: X \longrightarrow X$ یک تصویر بر روی زیرفضای Y از X*

---
[۱۳] binary tree
[۱۴] segment
[۱۵] branch

است اگر $P(X)=Y$ و $P(y)=y$ برای هر $y\in Y$.

تعریف ۱.۴۱. [۹] زیر فضای Y از فضای باناخ X تکمیل [۱۶] (کامل شده) در X است، اگر یک تصویر خطی و کران دار از X به روی Y وجود داشته باشد.
فرض کنیم Y_1 یک زیر فضای بسته‌ی X باشد، می‌گوییم Y_2 از Y_1 در X تکمیل است اگر $X=Y_1\oplus Y_2$ و Y_2 یک زیر فضای بسته‌ی X باشد.

توجه کنید اگر Y یک زیر فضای کامل شده از فضای باناخ X باشد، آن‌گاه Y بسته است، اما هر فضای بسته‌ی X کامل شده نیست.

قضیه ۱.۸. (سابزیکز)[۱۷] [۹] فرض کنیم Y یک زیر فضای بسته از فضای باناخ تفکیک‌پذیر X باشد، اگر Y ایزومورفیک با c_0 باشد، آن‌گاه Y در X تکمیل است.

لم ۱.۳. [۲۱] یک زیرفضای ضعیف - ستاره بسته و نامتناهی البعد M از ℓ_∞ وجود دارد به طوری که $M\cap c_0=\{0\}$

قضیه ۱.۹. (قضیه‌ی نگاشت باز) اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و اگر $A:X\to Y$ یک عملگر خطی، پیوسته و پوشا از X به Y باشد و $A(X)=Y$، آن‌گاه A یک نگاشت باز است.

[۱۶] complemented
[۱۷] Sobczyk's