بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای هادی رحمانی رشته ریاضی‌کاربردی به شماره دانشجویی ۸۵۵۶۶۱۰۲۷ تحت عنوان: «یک روش رونگه- کوتا مبتنی بر تقریبات چبیشف» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر محمدرضا اصلاحچی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مصطفی شمسی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی (کاربردی) است که در سال ۱۳۹۰ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر سعید محمدحسینی ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب هادی رجائی دانشجوی رشته ریاضی (کاربردی) مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: هادی رجائی

تاریخ و امضا:

۱۳۹۰/۶/۵

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب هادی رحمانی دانشجوی رشته ریاضی (کاربردی) ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۵ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۱۳۹۰/۶/۵

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

یک روش رونگه — کوتا مبتنی بر تقریبات چبیشف

توسط

هادی رحمانی

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

اردیبهشت ۱۳۹۰

قدردانی

سپاس بی کلام خدایی که به انسان عشق را عنایت فرمود...

با تشکر از اساتید محترم بخش ریاضی که در طول تحصیل از محضرشان بهرمند شدم، مراتب سپاس و عمیقترین قدردانی خویش را از سر صدق و اخلاص به محضر استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سید محمد حسینی، که در نهایت سعه‌ی صدر و خالصانه همواره با رهنمودهای ارزشمند و سازنده، اینجانب را در تدوین و نگارش پایان نامه مورد محبت خویش قرار داده‌اند، ابراز می‌دارم.

از پدر و مادر عزیزم به خاطر عشق و حمایت مداومشان تشکر می کنم.

از اساتید گرانقدر آقایان دکتر مصطفی شمسی و دکتر محمّد رضا اصلاحچی و خانم دکتر فرشته سعدی به خاطر خواندن پایان نامه و نیز به دلیل حضور در جمع داوران سپاسگذارم.

این پایان نامه، تحفه ای است به پیشگاه حضرت ولی عصر و تمامی شهدای جنگ تحمیلی باشد که مورد قبول واقع شود.

هادی رحمانی

اردیبهشت ۱۳۹۰

یک روش رونگه — کوتا مبتنی بر تقریبات چبیشف

چکیده

در این پایان نامه فرمول تفاضلی پسرو جدیدی مبتنی بر تقریبات با قطع سری چبیشف برای حل مسائل مقدار اولیه سخت بکار برده می شود. در این روش به جای اینکه تابع f در سمت راست معادله دیفرانسیل انتگرالگیری شود از قطع سری چبیشف (چند جمله‌ای درونیاب که از نقاط خاص که همان نقاط چبیشف هستند عبور می کند) استفاده می شود. در ابتدا به تعاریف و پیشنیازهایی از معادلات دیفرانسیل معمولی، تعریف مسئله سخت و نحوه‌ی بدست آوردن فرمول تفاضلی پسرو و روش رونگه — کوتا ارائه می شود. در ادامه به معرفی چند جمله‌ای های چبیشف و فرآیند بدست آوردن روش های مرتبه ۱ تا ۴ می پردازیم. همچنین خطای موضعی و پایداری روش های فوق بررسی می شود. این روش ها به ازای یک مقدار بزرگ α، $A(\alpha)$ پایدار می باشند. در پایان با استفاده از روش مرتبه ۴ الگوریتمی برای تغییر طول گام ارائه می شود که نیاز به محاسبه‌ی اضافی یکبار از تابع f دارد. این هزینه اضافی، اقتصادی است و اثر این محک در نتایج عددی برای حل مسائل مقدار اولیه سخت نشان داده شده است. برای روش با مراتب ۱، ۲ و ۳ با استفاده از الگوریتم فلبرگ، برآوردی برای خطای قطع موضعی بدست آورده و از آن برای طول گام متغیر استفاده می شود.

واژه‌های کلیدی : فرمول تفاضلی پسرو ، مسائل مقدار اولیه سخت، سری چبیشف، چند جمله‌ای درونیاب، رونگه — کوتا، خطای موضعی، پایداری، $A(\alpha)$ پایدار، الگوریتم فلبرگ .

فهرست مندرجات

٢ ساختار روش ٢٢

لیست اشکال

فصل ۱

تعاریف و پیشنیازها

در این فصل به معرفی انواع معادلات دیفرانسیل[1]، روش هایی برای حل عددی اینگونه معادلات، قضایای مربوط به یکتایی، همگرایی، پایداری و سازگاری ارائه می شود. در ادامه به بررسی دستگاه معادلات دیفرانسیل سخت[2]، فرمول های تفاضلی پسرو(BDF[3])، ساختار کلی روشهای رونگه — کوتا[4] پرداخته می شود.

[1] Differential
[2] Stiff
[3] Backward differentiation formula
[4] Runge - Kutta

۱.۱ انواع معادلات دیفرانسیل

یک معادله‌ی دیفرانسیل معادله‌ای است که شامل بعضی از مشتق های جواب می باشد. اگر معادله فقط شامل مشتق های معمولی باشد آن را معادله‌ی دیفرانسیل معمولی یا بطور اختصار (ODE)[5] نامند ولی اگر علاوه بر مشتق های معمولی، مشتق های جزیی نیز در معادله وجود داشته باشند آن را معادله‌ی دیفرنسیل با مشتق های جزیی یا بطور اختصار (PDE)[6] نامند.
در موارد کاربردی غالباً جواب خاص معادله‌ی دیفرانسیل مورد نظر است، در صورتی که تمام شرایط در یک نقطه داده شده باشند، آن را شرایط اولیه و معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه را (IVP) [7] نامند.

تعریف ۱.۱.۱ : IVP

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = \eta \qquad (۱.۱.۱)$$

خوشرفتار است اگر هر دو شرط زیر برقرار باشد:

آ) تابعی منحصر به فرد مشتق پذیر وجود داشته باشد که برای تمام $x \in [a,b]$ در رابطه‌ی (۱.۱.۱) صدق کند.

ب) تابع y بطور پیوسته به داده‌ی f و η وابسته باشد، یعنی تغییرات کوچک در داده های مسئله،

---

[5] Ordinary Differential Equation

[6] Partial Differential Equation

[7] Initial Value Problems

تغییراتی کوچک در جواب ایجاد کند.

قضیه‌ی زیر شرایطی را برای وجود[۸] و یکتایی [۹] جواب (۱.۱.۱) بیان می‌کند.

قضیه ۱.۱.۱ : فرض کنیم $f(x,y)$ در ناحیه‌ی

$$D = \{(x,y)|a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

که a و b متناهی‌اند، تعریف شده و پیوسته باشد، گیریم ثابتی چون L چنان موجود باشد که برای هر $(x,y),(x,y^*) \in D$ داشته باشیم

$$|f(x,y) - f(x,y^*)| \leq L|y - y^*| \qquad (۲.۱.۱)$$

آنگاه برای هر مقدار داده شده η، یک جواب منحصر بفرد $y(x)$ برای مسئله مقدار اولیه‌ی (۱.۱.۱) وجود دارد بطوریکه در D پیوسته و مشتق پذیر است.

۲.۱ روش های تک گامی

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (۳.۲.۱)$$

می توان از دو فرمول کلی زیر استفاده کرد.

فرمول اول برای روش های صریح می باشد که تمامی قضایای این بخش مربوط به این دسته

[۸] Existence

[۹] Unique

از فرمول هاست که فرم کلی آنها بصورت

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i) \qquad (۴.۲.۱)$$

فرمول دوم که یک فرمول ضمنی است و حالت کلی روش های تک گامی[۱۰] را نشان می دهد به فرم زیر است

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1})$$

ساده ترین روش تعیین تابع شیب ϕ قرار دادن $f(x,y)$ از معادله‌ی (۳.۲.۱) به جای آن است. این عمل منجر به روش اویلر[۱۱] می شود. روش هیون[۱۲] که یکی از روش های معروف رونگه — کوتاست (رونگه — کوتای مرتبه‌ی ۲) شیب تابع جواب را به صورت میانگین شیب در نقاط انتهایی بازه در نظر می گیرد. در روش هیون ابتدا از فرمول اویلر، به عنوان معادله پیشگو[۱۳]، مقدار y°_{i+1} را حساب کرده و سپس مقدار تقریبی شیب در نقطه x_{i+1} را به صورت $y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^{\circ}_{i+1})$ می یابد. میانگین شیبها به صورت زیر محاسبه می شود:

$$y' = \frac{1}{2}[y'_i + y'_{i+1}] = \frac{1}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{\circ}_{i+1})]$$

حال با استفاده از این شیب مقدار y_{i+1} به دست می آید

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{\circ}_{i+1})]$$

[۱۰] Single step
[۱۱] Euler method
[۱۲] Heun method
[۱۳] Predictor

که معادله تصحیح کننده[۱۴] نامیده می شود.

۱.۲.۱ سازگاری، پایداری و همگرایی روش های تک گامی

یک نقطه (s,v) متعلق به ناحیه‌ی $[a,b]\times R^m$ در نظر بگیرید. جواب IVP را با $w(t)$ نشان دهید.

$$w'(t)=f(t,w(t)),w(s)=v$$

یعنی جواب منحصر به فرد ODE از نقطه داده شده(s,v) می گذرد. خارج قسمتهای تفاضلی مربوط به $w(t)$ به این صورت است

$$\Delta_h(s,v)=\begin{cases}\frac{w(s+h)-w(s)}{h}=\frac{w(s+h)-v}{h} & h\neq \circ\\ f(s,v) \qquad , & h=\circ\end{cases}$$

تعریف ۱.۲.۱ : خطای برشی (یا خطای گسسته سازی موضعی) روش تک گامی صریح (۴.۲.۱) برابر است با

$$\tau_h(s,v)=\Delta_h(s,v)-\varphi_h(s,v) \qquad (۵.۲.۱)$$

که برای تمام نقاط $(s,v)\in[a,b]\times R^m$ تعریف شده است.

طرح (۴.۲.۱) سازگار[۱۵] است اگر f به قدر کافی هموار باشد،

$$\lim_{h\to\circ}\tau_h(s,v)=\circ$$

[۱۴] Corrector

[۱۵] Consistent

برای تمام نقاط $(s,v) \in [a,b] \times R^m$ برقرار باشد.

تعریف ۲.۲.۱ : طرح تک گامی (۴.۲.۱) برای IVP (۱.۱.۱) سازگار با مرتبه p است اگر $\tau_h(s,v) = O(h^p)$ وقتی $h \to ۰$، یعنی ثابتهای مثبت C و $\overline{h}$، مستقل از h وجود دارد به قسمی که $\|\tau_h(s,v)\| < Ch^p$ هرگاه $h < \overline{h}$ و $f \in C^{p+۱}([a,b] \times R^m)$.

تعریف ۳.۲.۱ : روش تک گامی (۴.۲.۱)، پایدار[۱۶] است هرگاه φ_h در شرط لیپ شیتز[۱۷] صدق کند.

تعریف ۴.۲.۱ : خطای جواب (یا خطای گسسته سازی سراسری[۱۸]) روش تک گامی (۴.۲.۱) با طول گام h برابر است با: $\varepsilon_h(x_n) = y(x_n) - y_n$.

تعریف ۵.۲.۱ : روش تک گامی صریح (۴.۲.۱) برای IVP (۱.۱.۱) همگراست اگر برای هر نقطه‌ی اولیه‌ی $(x_۰, \eta) \in [a,b] \times R^m$ و هر تابع f که در فرضیات قضیه‌ی (۱.۱.۱) صدق می کند

$$\lim_{h \to ۰} \varepsilon_h(x) = ۰$$

برای هر $x \in (a,b)$ برقرار باشد.

قضیه‌ی زیر ارتباط بین سازگاری و همگرایی[۱۹] را بیان می کند.

---

[۱۶] Stable

[۱۷] Lipschitz condition

[۱۸] Global discretization error

[۱۹] Convergence

تعریف ۶.۲.۱ : فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{\alpha_n\}$ دو دنباله‌ی مختلف باشند. گفته می شود

$$x_n = O(\alpha_n)$$

اگر اعداد ثابت C و n_0 وجود داشته باشند به قسمی که $|x_n| \leq C\,|\alpha_n|$ وقتی که $n \geq n_0$. در این صورت گوییم $\{x_n\}$ ((اُی بزرگ)) $\{\alpha_n\}$ است.

قضیه ۱.۲.۱ : طرح تک گامی (۴.۲.۱) را برای IVP (۱.۱.۱) در نظر بگیرید. فرض کنید یک طول گام $\overline{h} > 0$ وجود دارد به قسمی که وقتی $0 < h \leq \overline{h}$ باشد آنگاه شرایط زیر برقرار است

آ) یک γ مثبت وجود دارد به قسمی که φ_h روی ناحیه‌ی

$$R = \{(s, v) \in [a, b] \times R^m : \|v - y(s)\| < \gamma\}$$

ب) φ_h در شرط لیپ شیتز با ثابت لیپ شیتز L روی R صدق کند.

پ) روش تک گامی (۴.۲.۱) با مرتبه p سازگار است.

آنگاه روش تک گامی (۴.۲.۱) همگراست. بعلاوه $\varepsilon_h(x) = O(h^p)$ وقتی $h \to 0$

۳.۱ روش های چند گامی

در روشهای تک گامی برای محاسبه y_{i+1} فقط از اطلاعات موجود در ابتدای بازه انتگرالگیری، یعنی x_i استفاده می شود. اما با داشتن y_iهای جدید می توان از اطلاعات بیشتری استفاده و

y_{i+1} را حساب کرد.

تعریف **۱.۳.۱** : یک روش چند گامی برای (۳.۲.۱) طرحی است به صورت

$$y_{n+r} + a_{r-1}y_{n+r-1} + \cdots + a_0 y_n = h\varphi(x_n, y_{n+r}, y_{n+r-1}, \cdots, y_n) \qquad (۶.۳.۱)$$

در اینجا $h > 0$ طول گام است.

معادله‌ی (۶.۳.۱) را یک روش r گامی گوییم؛ زیرا مقادیر مجهول y_{n+r} را بر حسب r مقدار y_{n+r-1} و y_{n+r-2} و ... و y_n محاسبه شده‌ی قبلی تعیین می کند.

وقتی تابع φ به مجهول y_{n+r} بستگی ندارد آن طرح را صریح گوییم. در غیر اینصورت اساساً لازم می شود تا معادلات غیر خطی را برای تعیین y_{n+r} حل کنیم و این روش را ضمنی گوییم. یک حالت بسیار مهم و خاص معادله (۶.۳.۱) زمانی است که در آن φ یک ترکیب خطی از مقادیر تابع f باشد:

$$\varphi(x_n, y_{n+r}, y_{n+r-1}, \cdots, y_n) = b_r f(x_{n+r}, y_{n+r}) + \cdots + b_0 f(x_n, y_n)$$

در اینجا $b_0, b_1, \cdots, b_r$ اسکالر هستند. در این حالت روش چند گامی خطی است. با جایگذاری در (۶.۳.۱) می توان فرم کلی روش های چند گامی خطی را بصورت زیر نمایش داد

$$y_{n+r} + \sum_{j=0}^{r-1} a_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{r} b_j f_{n+j} \qquad (۷.۳.۱)$$

یک روش چند گامی خطی صریح است هرگاه $b_r = 0$ باشد و در غیر اینصورت ضمنی است.

از جمله روشهای چند گامی خطی صریح می توان به روش های صریح