بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه کاشان

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض (گرایش جبر)

عنوان:

گراف مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه

استاد راهنما:

دکتر رضا جهانی‌نژاد

بوسیله:

فاطمه جوانمرد

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم:

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است. به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید. به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم.

تقدیر و تشکر

منت خدای را عز و جل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. ستایش از او که هستی بخش جهان است و خالق قلم. خدایی که توانایی اندیشیدن و موهبت آموختن در محضر فرهیختگان را به این بنده حقیر عطا فرمود. فراگیری علم نزد عالمانی که راهنمای من بوده و از بذل عنایت خویش نسبت به شاگردشان دریغ نورزیدند. برخود لازم می‌دانم از آنان که در این راه راهنمایی‌ام کردند سپاس‌گزاری کنم.

جناب آقای دکتر رضا جهانی‌نژاد استاد راهنمای گرامیم:

چگونه سپاس گویم مهربانی و لطف شما را که سرشار از عشق و یقین است. چگونه سپاس گویم تأثیر علم‌آموزی شما را که چراغ روشن هدایت را به کلبه‌ی محقر وجودم فروزان ساخته است. آری در مقابل این همه عظمت و شکوه شما را نه توان سپاس است و نه کلام وصف. از اساتید بزرگوار آقایان دکتر فرهاد رحمتی و دکتر بهنام بازیگران که به عنوان اساتید صاحب‌نظر و متخصص خارج و داخل از دانشگاه، زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه اینجانب را به عهده گرفته‌اند، قدردانی می‌کنم. همچنین از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر عبدالحمید بامنیری که در جلسه دفاع اینجانب شرکت نموده‌اند نیز صمیمانه سپاسگزارم. در پایان از زحمات بی‌دریغ و خالصانه‌ی خانواده‌ی عزیزم و از همه‌ی عزیزانی که در پیشرفت علمی‌ام سهیم بودند سپاسگزاری و برای آنان سلامتی و توفیقات روزافزون را از درگاه خداوند متعال مسئلت دارم.

فاطمه جوانمرد

زمستان ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی گراف مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه می‌پردازیم. فرض کنید R یک حلقه باشد. گراف مقسوم‌علیه صفر از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R را با $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم که هر مقسوم‌علیه غیرصفری از R یک رأس آن است و دو رأس متمایز x و y از $\Gamma(R)$ مجاورند اگر و تنها اگر $xy = 0$. همچنین برای هر ایدآل I از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R، $\Gamma_I(R)$، گرافی ساده با مجموع رئوس $\{x \in R \setminus I \mid xy \in I$ ، $y \in R \setminus I$ برای یک $\}$ است و دو رأس متمایز x و y از $\Gamma_I(R)$ مجاورند اگر و تنها اگر $xy \in I$. این نوع گراف، تعمیمی از گراف مقسوم‌علیه صفر R است. پس از بررسی خواص مقدماتی این نوع گراف‌ها، به بررسی خواص گراف‌های وابسته به مجموع مستقیمی از حلقه‌ها می‌پردازیم. همچنین گراف مقسوم‌علیه‌های صفر از حلقه‌های چندجمله‌ای و سری‌های توانی را نیز مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم و در خاتمه به بررسی گراف مقسوم‌علیه صفر از یک حلقه‌ی غیرتعویض‌پذیر می‌پردازیم.

کلمات کلیدی:

گراف و حلقه، گراف همبند و کامل، قطر، کمر، ایدآل پرایمال و ضعیفاً پرایمال.

فهرست مطالب

مقدمه

برای اوّلین بار رابطه‌ی بین یک گراف و مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر از یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر توسط بک در سال ۱۹۸۸ در مقاله‌ای تحت عنوان رنگ‌پذیری حلقه‌های تعویض‌پذیر در [۸] معرفی شد که هر مقسوم‌علیه صفر غیرصفری از R یک رأس گراف است و دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = 0$. گراف مقسوم‌علیه صفر R را با $\Gamma(R)$ نشان می‌دهیم. اندرسون و نیسر در سال ۱۹۹۳ کار را با تعریف بک ادامه دادند و مثال‌های متعددی از حدس بک را ثابت کردند. پس از آن سامعی، آذرپناه و دیگر دانشمندان بررسی روی این مبحث را ادامه دادند. در سال ۲۰۰۸ حمیدرضا میمنی، مریم سلیمی، آسیه ستاری و سیامک یاسمی به محاسبه قطر گراف‌های متباین و همچنین یکریختی آن‌ها پرداختند. در سال ۲۰۰۳ ردموند مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر را نسبت به یک ایدآل در [۲۱] ارائه داد. در ادامه در سال ۲۰۰۹ شهاب‌الدین ابراهیمی و احمد یوسفیان در [۱۲] گراف مقسوم‌علیه صفر را نسبت به یک ایدآل خاص مورد بررسی قرار دادند.

هدف ما این است که مفهوم گراف مقسوم‌علیه‌های صفر که توسط بک معرفی شده است را تعمیم بدهیم. در این صورت گراف مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه تعویض‌پذیر ، غیرتعویض‌پذیر و حلقه‌های چندجمله‌ای و سری‌های توانی و همچنین گراف مقسوم‌علیه صفر نسبت به یک ایدآل را بررسی می‌کنیم. اکثر مطالب این پایان‌نامه از مراجع [۱]، [۶]، [۷]، [۱۲] و [۲۳] است.

در سراسر متن فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد که لزوماً تعویض‌پذیر و یکدار نیست و هر جا حلقه تعویض‌پذیر و یکدار باشد را ذکر می‌کنیم. فرض می‌کنیم S یک زیرمجموعه از حلقه‌ی R باشد. در

این صورت $S^*(R) = S(R) \setminus \{0\}$. $U(R)$ مجموعه‌ی عناصر یکال R است و $Max(R)$ مجموعه ایدآل‌های ماکسیمال R است. مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر از حلقه‌ی R را با $Z(R)$ نشان می‌دهیم. $J(R)$ رادیکال جیکبسون حلقه‌ی R، یعنی اشتراک همه ایدآل‌های ماکسیمال R است. حلقه موضعی، حلقه‌ای است که تنها یک ایدآل ماکسیمال داشته باشد.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است. فصل اوّل شامل دو بخش است که در بخش اوّل به تعاریف و مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف می‌پردازیم و همچنین مفاهیم و مقدماتی را که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز می‌شود را به طور خلاصه بیان می‌کنیم. در بخش دوم مفهوم ایدآل پرایمال و ضعیفاً پرایمال را بیان کرده و ارتباط بین آن‌ها را در قضایا نشان می‌دهیم.

در فصل دوم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار و I ایدآلی از R است. در این فصل به بررسی خصوصیات گراف مقسوم‌علیه صفر R نسبت به یک ایدآل I می‌پردازیم که این نوع گراف را با $\Gamma_I(R)$ نشان می‌دهیم. با توجه به این که I چه نوع ایدآلی از R است این فصل را به سه بخش تقسم می‌کنیم. در بخش اوّل، قطر و کمر گراف $\Gamma_I(R)$ را در حالتی که I یک ایدآل پرایمال از R باشد را محاسبه می‌کنیم. در بخش دوم ویژگی‌های گراف $\Gamma_I(R)$ را در حالتی که I ایدآل پرایمالی از R نباشد را بررسی می‌کنیم. در بخش سوم، I را یک ایدآل ضعیفاً پرایمال در نظر می‌گیریم و در این صورت به مطالعه ویژگی‌های گراف $\Gamma_I(R)$ می‌پردازیم.

در فصل سوم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و نه لزوماً یکدار است و هرجا حلقه یکدار باشد ذکر می‌کنیم. این فصل شامل دو بخش است. در بخش اوّل قطر گراف مجموع مستقیمی از دو حلقه‌ی R_1 و R_2 را برحسب قطر گراف‌های $\Gamma(R_1)$ و $\Gamma(R_2)$ محاسبه می‌کنیم. در بخش دوم F_q یک میدان متناهی با q عنصر است. در این بخش ثابت می‌کنیم برای دو حلقه‌ی موضعی و متناهی

$$|Z^*(R_1 \times R_2)| = |R_1| \times |M_2| + |R_2| \times |M_1| - |M_1| \times |M_2| - 1$$

همچنین همه‌ی حلقه‌های R را بدست می‌آوریم که ۱۰ یا $|Z^*(R)| = 5, 6, 9$.

فصل چهارم نیز شامل دو بخش است که در بخش اوّل R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر است. در این بخش

گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های چندجمله‌ای و سری‌های توانی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین رابطه‌ی بین قطر و کمر گراف‌های $\Gamma(R)$، $\Gamma(R[x])$ و $\Gamma(R[[x]])$ را محاسبه می‌کنیم. در بخش دوم R یک حلقه‌ی غیرتعویض‌پذیر است. در این بخش به بررسی گراف $\Gamma(R)$ می‌پردازیم.

فصل ۱
مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف و مفاهیم مقدماتی را که در این پایان‌نامه به آن‌ها نیاز داریم در دو بخش جداگانه شرح می‌دهیم. در بخش اوّل تعاریف اوّلیه و مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف را بیان می‌کنیم و همچنین به مقدماتی از نظریه حلقه‌ها پرداخته که در کتب مختلف با آن‌ها آشنا شده‌ایم. در بخش دوم مفاهیمی از جمله ایدآل پرایمال و ضعیفاً پرایمال را معرفی می‌کنیم و ارتباط بین آن‌ها را در قضایا نشان می‌دهیم. مراجع اصلی این فصل [۴]، [۱۰]، [۱۳]، [۱۵]، [۱۶]، [۱۷] ، [۱۸]، [۲۲] و [۲۴] است.

۱.۱ مقدماتی از نظریه گراف و حلقه

در این بخش به مفاهیم و تعاریف اوّلیه از نظریه گراف می‌پردازیم و همچنین به بیان تعاریف و قضایایی از نظریه حلقه‌ها پرداخته که صرفاً جهت یادآوری برخی از نکات و تعاریف مهم است که در این پایان‌نامه احتیاج داریم. در این بخش همه‌ی حلقه‌ها را یکدار در نظر می‌گیریم. اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال

حلقه‌ی R را با $J(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین منظور از $Max(R)$ مجموعه ایدآل‌های ماکسیمال R و $Spec(R)$ مجموعه ایدآل‌های اوّل R است.

تعریف ۱.۱. یک گراف ساده Γ، عبارت است از زوج مرتب $(V(\Gamma), E(\Gamma))$ که در آن $V(\Gamma)$ مجموعه‌ای ناتهی به نام مجموعه‌ی رأس‌ها و $E(\Gamma)$ مجموعه‌ای از جفت‌های نامرتب عناصر مجزای $V(\Gamma)$، به نام مجموعه‌ی یال‌ها است که به ازای هر $x, y \in V(\Gamma)$، $(x, x) \notin E(\Gamma)$، $(x, y) = (y, x)$ و همچنین بین هر دو رأس آن حداکثر یک یال موجود می‌باشد. گاهی $V(\Gamma)$و $E(\Gamma)$ را به ترتیب با V و E نشان می‌دهیم. در سراسر این پایان‌نامه رئوس را با حروف کوچک $x, y, z \ldots$ و یال بین دو رأس x و y را با نماد $x - y$ نشان می‌دهیم.

هر گاه مجموعه رئوس گراف Γ متناهی باشد، گراف Γ را متناهی می‌نامیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید Γ یک گراف باشد. دو رأس x و y را مجاور می‌گوییم، هر گاه یالی بین رئوس x و y وجود داشته باشد.

تعریف ۳.۱. یک گشت در گراف Γ، دنباله‌ی ناتهی و متناهی از یال‌ها به صورت $x_۰ - x_۱ - \cdots - x_n$ است. گشتی که تمام یال‌های آن مجزا باشد را یک گذر می‌نامیم. اگر رئوس $x_۰, x_۱, \cdots, x_n$ مجزا باشند، گذر را یک مسیر می‌نامیم.

تعریف ۴.۱. یک دور به طول n در گراف Γ، دنباله‌ای از یال‌ها مانند $x_۱ - x_۲ - \cdots - x_n - x_۱$ است که در آن $x_۱ - x_۲ - \cdots - x_n$ یک مسیر بین $x_۱$ و x_n باشد.

تعریف ۵.۱. گراف Γ را همبند می‌نامیم، هر گاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. در غیر این صورت Γ را ناهمبند می‌نامیم. چنان‌چه گراف Γ فاقد یال باشد، Γ را گراف کلاً ناهمبند یا پوچ می‌نامیم.

تعریف ۶.۱. فرض کنید H و Γ دو گراف باشند. H را زیرگراف Γ می‌نامیم، هرگاه

$$E(H) \subseteq E(\Gamma) \quad \text{و} \quad V(H) \subseteq V(\Gamma)$$

اگر $E(H) \subset E(\Gamma)$، آن‌گاه H یک زیرگراف سره از Γ است. H را یک زیرگراف القایی Γ می‌نامیم، هرگاه برای هر دو رأس x و y از H، x و y در H مجاورند اگر و تنها اگر x و y در Γ مجاور باشند. در شکل زیر یک زیر گراف القایی از گراف Γ را نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۱. دو زیر گراف $H_1 = (V_1, E_1)$ و $H_2 = (V_2, E_2)$ از گراف ناهمبند $\Gamma = (V, E)$ را از هم‌مجزا می‌نامیم، هر گاه هیچ مسیری از یک رأس V_1 به رأسی از V_2 وجود نداشته باشد.

تعریف ۸.۱. در گراف $\Gamma = (V, E)$، برای هر جفت از رئوس $x, y \in V(\Gamma)$، اگر مسیری بین x و y وجود داشته باشد، آن‌گاه طول کوتاهترین مسیر بین x و y را فاصله x و y می‌نامیم و آن را با $d(x, y)$ نشان می‌دهیم. چنان‌چه مسیری بین دو رأس x و y در گراف Γ وجود نداشته باشد، در این صورت $d(x, y) = \infty$. به علاوه برای رئوس دلخواه $x, y, z \in V(\Gamma)$ داریم $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

تعریف ۹.۱. فرض کنید Γ یک گراف همبند باشد. در این صورت $max\{d(x, y) \mid x, y \in V(\Gamma)\}$ را قطر گراف Γ می‌نامیم و با نماد $diam(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف Γ ناهمبند باشد، آن‌گاه قطر آن را ∞ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید Γ یک گراف باشد. اگر Γ دارای حداقل یک دور باشد، آن گاه طول

کوتاهترین دور در گراف Γ را کمر گراف می‌نامیم و با $gr(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. هر گاه گراف Γ فاقد دور باشد، کمر گراف را ∞ تعریف می‌کنیم. به وضوح برای هر گراف Γ، $gr(\Gamma) \geqslant ۳$.

تعریف ۱.۱۱. گراف Γ را کامل می‌نامیم، هرگاه هر دو رأس آن مجاور باشند. گراف کامل با n رأس را با K_n نشان می‌دهیم.

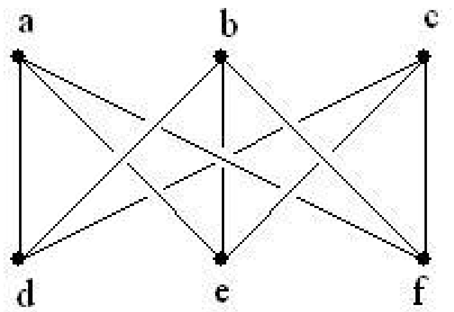
گزاره ۱.۱۲. فرض کنید Γ یک گراف کامل باشد. در این صورت هر زیرگراف القایی از Γ، گرافی کامل است.

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید Γ یک گراف باشد. گراف Γ را دوبخشی می‌نامیم، هر گاه مجموعه رئوس گراف را بتوان به دو مجموعه مجزای V_1 و V_2 افراز کرد به طوری که هر یال Γ، یک رأس از V_1 را به رأسی از V_2 وصل کند. زوج (V_1, V_2) یک دوبخشی‌سازی گراف نامیده می‌شود. بنابراین در گراف دوبخشی با مجموعه رئوس $V = (V_1, V_2)$، هیچ دو رأسی از V_1، همین طور هیچ دو رأسی از V_2 مجاور نیستند. علاوه بر این در گراف دوبخشی لزوماً هر رأس از V_1 به هر رأس از V_2 متصل نیست.

تعریف ۱.۱۴. فرض کنید Γ و H دو گراف و $\varphi : V(\Gamma) \to V(H)$ یک تابع باشد. در این صورت φ را یک هم‌ریختی می‌نامیم، هرگاه مجاورت دو رأس از دامنه، مجاورت تصاویر آن دو رأس را نتیجه دهد. به عبارت دیگر φ یک هم‌ریختی است، هرگاه برای هر دو رأس x و y از $V(\Gamma)$، اگر $x - y$ آن‌گاه $\varphi(x) - \varphi(y)$. حال اگر φ یک تابع دوسوئی و هم‌ریختی و φ^{-1} نیز هم‌ریختی باشند، آن‌گاه φ را یک‌ریختی می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۵. گراف دوبخشی Γ با مجموعه رئوس $V = (V_1, V_2)$ را یک گراف دوبخشی کامل می‌نامیم، هر گاه هر رأس V_1 با هر رأس از V_2 مجاور باشد. این گراف را با $K_{n,m}$ نمایش می‌دهیم، که در آن n تعداد اعضای مجموعه‌ی V_1 و m تعداد اعضای مجموعه V_2 است. گراف دوبخشی کامل $K_{1,n}$ را گراف ستاره و رأس $x \in V_1$ را مرکز گراف ستاره می‌نامیم. همچنین اگر مجموعه رئوس Γ را بتوان به زیرمجموعه‌های مجزای $V_1, \ldots, V_r$ افراز کرد، به طوری که برای هر $۱ \leqslant i, j \leqslant r$ که

$i \neq j$، همه رئوس V_i و V_j مجاور باشند و برای هر i، یالی بین رئوس V_i وجود نداشته باشد، آن‌گاه Γ را گراف کامل $r-$بخشی نامیده و با نماد $K_{n_1,\dots,n_r}$ نشان می‌دهیم که برای هر $1 \leq i \leq r$، n_i تعداد اعضای مجموعه‌ی V_i است. شکل ۱.۱ مثالی از یک گراف دوبخشی کامل با دوبخشی‌سازی $V = (V_1, V_2)$ است که $V_1 = \{d, e, f\}$ و $V_2 = \{a, b, c\}$.



شکل ۱.۱: گراف دوبخشی کامل

گزاره ۱.۱۶. احکام زیر برقرارند:

۱. $diam(K_1) = 0$ و برای هر عدد طبیعی $n > 1$، $diam(K_n) = 1$.

۲. برای هر عدد طبیعی n و m، $diam(K_{n,m}) = 1$ یا ۲.

اثبات. ۱. چون K_1 گرافی با یک رأس است، پس $diam(K_1) = 0$. فرض می‌کنیم $n > 1$، در این صورت بنابر تعریف گراف کامل، هر دو رأس مجاورند و در نتیجه $diam(K_n) = 1$.

۲. فرض می‌کنیم $n = m = 1$. در این صورت $K_{1,1} = K_2$ و لذا بنابر بند ۱، $diam(K_{1,1}) = 1$. در غیر این صورت برای هر دو رأس غیر مجاور x و y از $K_{n,m}$، بنابر تعریف ۱.۱۵، $d(x, y) = 2$. بنابراین $diam(K_{n,m}) = 2$. ■

در این قسمت به بیان تعاریف و قضایایی از نظریه حلقه‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱۷. فرض کنید I و J ایدآل‌هایی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشند. I و J را متباین می‌نامیم، هرگاه $I + J = R$.

با توجه به این تعریف، به‌سادگی نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

گزاره ۱.۱۸. فرض کنید ایدآل‌های I و J از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R متباین باشند. در این صورت

$$I \cap J = IJ$$

تعریف ۱.۱۹. فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و I ایدآلی از R باشد. در این صورت

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid r^n \in I \text{ عدد طبیعی } n \text{ وجود داشته باشد که } \}$$

ایدآلی از R است که I را شامل می‌شود و آن را رادیکال I می‌نامیم.

فرض کنید P یک ایدآل اوّل از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت برای هر عدد طبیعی n، واضح است که $\sqrt{P^n} = P$.

تعریف ۱.۲۰. فرض کنید I ایدآلی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. ایدآل I را رادیکالی می‌نامیم، هرگاه $\sqrt{I} = I$.

گزاره ۱.۲۱. فرض کنید I و J ایدآل‌هایی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشند. اگر $\sqrt{I}$ و $\sqrt{J}$ متباین باشند، آنگاه I و J نیز متباین هستند.

اثبات. به گزاره ۱.۱۶ از [۵] رجوع شود. ■

گزاره ۱.۲۲. فرض کنید I ایدآلی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت

$$\sqrt{I} = \cap\{P \in Spec(R) \mid I \subseteq P\}$$

اثبات. به صفحه‌ی ۶۰ از [۲۲] رجوع شود. ■

نتیجه ۱.۲۳. فرض کنید I یک ایدآل سره‌ی حلقه تعویض‌پذیر R و $Min(I)$ نشاندهنده‌ی مجموعه‌ی ایدآل‌های اوّل مینیمال I باشد. در این صورت $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in Min(I)} P$.

عنصر a از حلقه‌ی R را پوچ‌توان می‌نامیم، هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که $a^n = 0$. مجموعه عناصر پوچ‌توان حلقه تعویض‌پذیر R را رادیکال پوچ R می‌نامیم و با نماد $nil(R)$ نمایش می‌دهیم. حال از این که هر ایدآل اوّل شامل ایدآل صفر است می‌توان نتیجه گرفت که

$$nil(R) = \sqrt{0} = \bigcap_{P \in Spec(R)} P$$

حلقه R را تقلیل‌یافته می‌نامیم، هرگاه R شامل هیچ عنصر پوچ‌توان غیرصفر نباشد.

گزاره ۲۴.۱. فرض کنید I ایدآلی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت I یک ایدآل رادیکالی از R است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض می‌کنیم I یک ایدآل رادیکالی از R و $x + I \in \frac{R}{I}$ یک عنصر پوچ‌توان باشد. در این صورت عدد طبیعی n وجود دارد که $(x+I)^n = I$ و لذا $x^n + I = I$. پس $x^n \in I$ و در نتیجه $x \in \sqrt{I} = I$. بنابراین $x + I = I$ و لذا حلقه $\frac{R}{I}$ عنصر پوچ‌توان غیرصفر ندارد.

$\Rightarrow$) فرض می‌کنیم $\frac{R}{I}$ حلقه‌ی تفلیل‌یافته باشد. ثابت می‌کنیم $\sqrt{I} = I$. واضح است که $I \subseteq \sqrt{I}$. فرض می‌کنیم $a \in \sqrt{I}$. در این صورت عدد طبیعی n وجود دارد که $a^n \in I$. لذا $(a+I)^n = a^n + I = I$. بنابراین $a+I$ عنصر پوچ‌توان $\frac{R}{I}$ است. چون $\frac{R}{I}$ عنصر پوچ‌توان غیرصفر ندارد، پس $a \in I$ و در نتیجه $\sqrt{I} \subseteq I$. بنابراین I یک ایدآل رادیکالی از R است. ■

از گزاره قبل، نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۲۵.۱. فرض کنید P ایدآل اوّلی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت R حلقه‌ی تقلیل‌یافته است اگر و تنها اگر $\bigcap_{P \in Spec(R)} P = 0$.

قضیه ۲۶.۱. (قضیه باقمانده‌چینی) فرض کنید $I_1, \ldots, I_n$، که $n \geq 2$، ایدآل‌هایی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشند. در این صورت تابع $\varphi : R \longrightarrow \frac{R}{I_1} \times \ldots \times \frac{R}{I_n}$ با ضابطه $\varphi(r) = (r + I_1, r + I_2, \cdots, r + I_n)$ یک همریختی حلقه‌ای است. علاوه بر این

۱. φ یک به یک است اگر و تنها اگر $\bigcap_{i=1}^{n} I_i = 0$.

۲. φ پوشاست اگر و تنها اگر I_iها دو به دو متباین باشند.

اثبات. به گزاره‌ی ۱.۱۰ از [۵] رجوع شود. ■

زیرمجموعه S از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R را ضربی‌بسته می‌نامیم، هرگاه $1 \in S$ و برای هر a و b از S، $ab \in S$. فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و S یک زیرمجموعه ضربی‌بسته از R باشد. در این صورت حلقه کسرهای R نسبت به S را با $S^{-1}R$ نشان می‌دهیم و

$$S^{-1}R = \{\frac{a}{s} \mid \ a \in R \ , \ s \in S\}$$

فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و S مجموعه‌ی تمام عناصر منظّم R باشد. در این صورت $S^{-1}R$ را حلقه کلّی کسرهای R می‌نامیم.

قضیه ۲۷.۱. فرض کنید S یک زیرمجموعه ضربی‌بسته از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. در این صورت برای هر ایدآل I از R، $S^{-1}I = \{\frac{a}{s} \in S^{-1}R \ \mid \ s \in S$ و $a \in I$ برای یک عنصر$\}$ ایدآلی از $S^{-1}R$ است.

اثبات. به قضیه ۷.۴ از [۲۴] رجوع شود. ■

قضیه ۲۸.۱. فرض کنید S یک زیرمجموعه‌ی ضربی‌بسته از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R و I ایدآلی از R باشد. در این صورت $S^{-1}I = S^{-1}R$ اگر و تنها اگر $S \cap I \neq \emptyset$.

اثبات. به قضیه ۸.۴ از [۲۴] رجوع شود. ■

قضیه ۲۹.۱. فرض کنید S یک زیرمجموعه‌ی ضربی‌بسته از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R و P ایدآلی از R باشد. در این صورت

۱. اگر $P \in Spec(R)$ و $P \cap S = \emptyset$، آن‌گاه $S^{-1}P \in Spec(S^{-1}R)$.

۲. اگر $\mathcal{P} \in Spec(S^{-1}R)$، آن‌گاه یک ایدآل اوّل P از R وجود دارد که $P \cap S = \emptyset$ و $\mathcal{P} = S^{-1}P$.

اثبات. به قضیه ۳۲.۵ از [۲۲] رجوع شود. ■

قضیه ۳۰.۱. فرض کنید I ایدآلی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R و S یک زیرمجموعه ضربی‌بسته از R باشد که $I \cap S = \emptyset$. در این صورت مجموعه‌ی زیر از ایدآل‌های R

$$\Sigma = \{J \mid \ J \cap S = \emptyset \text{ و } I \subseteq J \text{ باشد که } R \text{ ایدآلی از } J\}$$

حداقل یک عضو ماکسیمال دارد و هر عضو ماکسیمال Σ یک ایدآل اوّل R است.

اثبات. به قضیه ۴۴.۳ از [۲۲] رجوع شود. ■

تعریف ۳۱.۱. فرض کنید I ایدآلی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. I را ایدآل ابتدایی R می‌نامیم، هرگاه

۱. $I \subset R$، یعنی I ایدآل سره‌ای از R باشد.

۲. برای هر $a, b \in R$ اگر $ab \in I$، آنگاه $a \in I$ یا عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که $b^n \in I$.

به سادگی دیده می‌شود که هر ایدآل اوّل از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R یک ایدآل ابتدایی است. به‌علاوه، برای هر ایدآل ابتدایی I از حلقه تعویض‌پذیر R، $\sqrt{I}$ ایدآل اوّلی از R است. لذا اگر $P = \sqrt{I}$، آنگاه می‌گوییم I یک ایدآل $P-$ابتدایی است.

قضیه ۳۲.۱. فرض کنید I ایدآلی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد به طوری که $M = \sqrt{I}$ ایدآل ماکسیمال R باشد. در این صورت I یک ایدآل $M-$ابتدایی از R است.

اثبات. به قضیه ۹.۴ از [۲۲] رجوع شود. ■

تعریف ۳۳.۱. فرض کنید I و J ایدآل‌هایی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشند. حاصل تقسیم یا خارج‌قسمت $(I : J)$ را به صورت $(I : J) = \{a \in R \mid \ aJ \subseteq I\}$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $(I : J)$ ایدآلی از R است. در حالت خاصی که $I = ۰$، ایدآل

$$(۰ : J) = \{a \in R \mid \ aJ = ۰\} = \{a \in R \mid \ ab = ۰ \ \ \text{ به ازای هر } b \in J\}$$

را پوچ‌ساز J می‌نامیم و آن را با $Ann(J)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۳۴.۱. فرض کنید I یک ایدآل $P-$ابتدایی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد و $a \in R$. در این صورت احکام زیر برقرارند:

۱. اگر $a \in I$ آن‌گاه $(I : a) = R$.

۲. اگر $a \notin I$ آن‌گاه $(I : a)$ یک ایدآل $P-$ابتدایی است و لذا $\sqrt{(I : a)} = P$.

۳. اگر $a \notin P$ آن‌گاه $(I : a) = I$.

اثبات. به لم ۱۴.۴ از [۲۲] رجوع شود. ■

عنصر غیرصفر a از حلقه‌ی R را مقسوم‌علیه راست (یا چپ) صفر R می‌نامیم، هرگاه عنصر غیرصفر b از R وجود داشته باشد که $ba = 0$ (یا $ab = 0$). اگر R فاقد مقسوم‌علیه راست و چپ صفر باشد، آن‌گاه R را دامنه می‌نامیم. یک دامنه R را دامنه‌ی صحیح می‌نامیم، هرگاه R تعویض‌پذیر باشد. مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی تعویض‌پذیر R را با $Z(R)$ نشان می‌دهیم. عنصر غیرصفر a از حلقه‌ی R را منظّم می‌نامیم، هرگاه a نه مقسوم‌علیه راست صفر و نه مقسوم‌علیه چپ صفر R باشد. مجموعه عناصر منظّم R را با $Reg(R)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۳۵.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی متناهی و تعویض‌پذیر باشد. در این صورت

۱. $U(R) = Reg(R)$، که $U(R)$ مجموعه عناصر یکال R است.

۲. اگر R حلقه‌ای موضعی با ایدآل ماکسیمال M باشد، آن‌گاه $Z(R) = M$.

اثبات. ۱. عنصر $x \in Reg(R)$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین $\{x, x^۲, \ldots\} \subseteq R$. از متناهی بودن R نتیجه می‌شود که اعداد طبیعی n و m وجود دارند به طوری که $x^n = x^m$. چون x منظّم است پس x^m نیز منظم است. اگر $n > m$ آن‌گاه $x^{n-m} = ۱$. بنابراین $xx^{n-m-۱} = ۱$ و در نتیجه $x \in U(R)$. پس $Reg(R) \subseteq U(R)$. از طرفی همواره $U(R) \subseteq Reg(R)$. بنابراین $Reg(R) = U(R)$.

۲. چون مجموعه عناصر غیریکال یک حلقه موضعی، با ایدآل ماکسیمال M برابر است، پس بنابر بند ۱، $Z(R) = R \setminus Reg(R) = R \setminus U(R) = M$. ■

گزاره ۳۶.۱. فرض کنید I و J ایدآل‌هایی از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشند به طوری که $I \subseteq J$. در این صورت ایدآل $\frac{J}{I}$ از $\frac{R}{I}$ اوّل است اگر و تنها اگر J ایدآل اوّل R باشد. به عبارت دیگر $\frac{J}{I} \in Spec(\frac{R}{I})$ اگر و تنها اگر $J \in Spec(R)$.

اثبات. به لم ۲۸.۳ از [۲۲] رجوع شود. ■

فرض کنید R یک حلقه تعویض‌پذیر باشد. در این صورت R را یک حلقه نوتری می‌نامیم، هرگاه R در شرط زنجیر صعودی از ایدآل‌ها صدق کند. یعنی برای هر زنجیر صعودی از ایدآل‌های R مانند $\ldots \subseteq I_{i+1} \subseteq I_i \ldots \subseteq I_2 \subseteq I_1$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k = I_{k+i}$. حلقه R را آرتینی می‌نامیم، هرگاه برای هر زنجیر نزولی از ایدآل‌های R مانند $\cdots \supset I_i \supset \cdots \supset I_1$، عدد طبیعی k وجود داشته باشد که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $I_k = I_{k+i}$. واضح است که هر میدان و هر حلقه متناهی هم نوتری و هم آرتینی هستند.

تعریف ۳۷.۱. فرض کنید M مدولی روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر و نوتری R باشد و $P \in Spec(R)$. در این صورت P را یک ایدآل اوّل وابسته به M می‌نامیم، هرگاه عنصر غیرصفر $m \in M$ وجود داشته باشد که

$$(0 : m) = P$$

مجموعه ایدآل‌های اوّل وابسته به M را با $Ass(M)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۳۸.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر و نوتری باشد. در این صورت

$$Z(R) = \bigcup_{P \in Ass(R)} P$$

اثبات. به نتیجه‌ی ۳۶.۹ از [۲۲] رجوع شود. ■