وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

مسئله سوم هیلبرت و همنهشتی برشی در فضای اقلیدسی ۳-بعدی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

رقیه رهبرفام

استاد راهنما: **دکتر بهروز میرزایی**

خرداد ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

اسطوره صبر و صلابت پدرم،

اسوه مهربانی و امید مادرم.

تشکر و قدردانی

خداوند منان را شاکرم که شوق آموختن را در وجودم نهاد و در مسیر پرفراز و نشیب زندگی‌ام هیچگاه دلم را از امید به یاری و مساعدت خویش تهی نساخت. در نهایت فروتنی از استادان فرزانه‌ای که افتخار شاگردی آنها را داشته‌ام قدردانی می‌کنم. بی‌تردید گردآوری این مجموعه مرهون تلاش و زحمات استاد راهنمایم جناب دکتر میرزایی است که فراتر از یک استاد راهنما، با نهایت صبر و درایت، راهنما و مشوق اینجانب در انجام این پژوهش بوده است و من برخود لازم می‌دانم که قدردان ایشان باشم. اجر معنوی این اثر را به پدر و مادرم تقدیم می‌کنم که در اوج مهربانی چون کوهی استوار و با صلابت در تمام لحظات زندگی همواره مشوق و حامی بنده در راه کسب علم و دانش بوده‌اند. همچنین از همسر مهربانم که با عشق بینهایت خویش همواره نور امید را در دلم روشن نگاه داشت صمیمانه تشکر می‌کنم.

چکیده

بر اساس قضیه‌ای معروف در فضای اقلیدسی ۲-بعدی، هر دو چندضلعی با مساحت یکسان همنهشت برشی‌اند، به این معنا که می‌توان یکی را به قطعات متناهی چنان افراز کرد که همان قطعات چندضلعی دوم را نیز بپوشانند. مسئله سوم هیلبرت چنین مطرح می‌شود که آیا این حکم در فضای اقلیدسی ۳-بعدی نیز برقرار است؟ یا بطور معادل آیا هر دو چندوجهی با حجم یکسان در فضای اقلیدسی ۳-بعدی، همنهشت برشی‌اند؟ پاسخ این سوال منفی است و هدف این پایان‌نامه مطالعه شرایط لازم و کافی برای همنهشتی برشی دو چندوجهی با حجم یکسان می‌باشد. در این راستا با معرفی ناوردای دِن[۱]، اثبات می‌کنیم که هر دو چندوجهی با حجم یکسان همنهشت برشی‌اند اگر و فقط اگر ناوردای دِن آنها برابر باشند. این اثبات، بر اساس روش دوپون[۲] و با استفاده از روشهای جبر همولوژی و توپولوژی جبری است. برای این منظور ابتدا توصیفی همولوژیک از مسئله همنهشتی برشی داده و سپس با استفاده از مفاهیمی چون همولوژی گروهها، همولوژی فضاهای تیتس[۳] با سیستم ضرایب موضعی، دنباله‌های طیفی و غیره به مطالعه مسئله اصلی می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: *مسئله سوم هیلبرت*، *همنهشتی برشی*، *ناوردای دِن*، *همولوژی گروهها*، *دنباله‌های طیفی*، *فضاهای تیتس*

[۱] Dehn

[۲] Dupont

[۳] Tits

فهرست

پیش‌گفتار

مسئله همنهشتی برشی چندضلعی‌های هم مساحت همواره برای انسان شناخته شده بود. چنانچه چینیها و مصریهای باستان از آن استفاده می‌کرده‌اند. اما طرح و اثبات آن به شکل یک قضیه برای اولین بار توسط والیس[۱] انجام شد. او طی قضیه‌ای ثابت کرد که در صفحه اقلیدسی دو بعدی، هر چندضلعی با مستطیلی با یک ضلع از طول واحد همنهشت برشی است. نتیجه مستقیمی که از این قضیه حاصل شد این است که چندضلعی‌های با مساحت یکسان، همنهشت برشی‌اند. اما آیا چنین حکمی برای چندوجهی‌ها در فضای اقلیدسی $E^۳$ نیز برقرار است؟

در مطالعه این مسئله گاوس[۲] اثبات کرد که هر دو چندوجهی با حجم یکسان با نامتناهی بار تقسیم کردن، همنهشت برشی هستند. اما شکل اولیه مسئله همچنان بشکل یک سوال باقی ماند. هیلبرت [۳] معتقد بود جواب این سوال باید منفی باشد. از این رو در سال ۱۹۰۰ در سخنرانی خود در کنگره جهانی ریاضیات در پاریس این مسئله را به عنوان سومین مسئله از ۲۳ مسئله معروف خود چنین مطرح کرد: دو چندوجهی با حجم‌های یکسان را چنان بیابید که همنهشت برشی نباشند. در همان سال، دِن[۴] با ارائه یک مثال نقض نشان داد که مسئله همنهشتی برشی برای چند وجهی‌ها در $E^۳$ برقرار نیست. در واقع دِن اثبات کرد که چهاروجهی منتظم و مکعب منتظم با حجم‌های واحد، همنهشت برشی نیستند. دِن برای اثبات ادعای خود ناوردایی بنام ناوردای دِن را معرفی کرد [۱]. بعدها سیدلر[۵] [۷] نشان داد که شرط لازم و کافی برای همنهشتی برشی چندوجهی‌ها در فضای اقلیدسی $E^۳$، برابری حجم و

۱ Wallace

۲ Gauss

۳ Hilbert

۴ Dehn

۵ Sydler

ناوردای دِن آنهاست [۷]. ناوردای دِن در شکل مدرن خود بدین صورت تعریف می‌شود که برای یک چندوجهی P،

$$D(P) := \sum_{l \in A} \mathcal{L}(l) \otimes \frac{\theta(l)}{\pi} \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

بطوریکه A مجموعه تمام یالهای P، $\mathcal{L}(l)$ طول یال l و $\theta(l)$ زاویه بین دو وجهی از P است که در یال l مشترک‌اند. (توجه داشته باشید که در زمان دِن هنوز ضرب تانسوری معرفی نشده بود.)

در این پایان‌نامه گروه همنهشتی برشی $\mathcal{P}(E^۳)$ را معرفی خواهیم کرد و نشان خواهیم داد که ناوردای دِن، یک همریختی گروهی بصورت

$$D : \mathcal{P}(E^۳) \longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

القاء می‌کند. اگر $\mathcal{Z}(E^۳)$ زیر گروهی از $\mathcal{P}(E^۳)$ تولید شده توسط منشورها باشد، نشان خواهیم داد که $D(\mathcal{Z}(E^۳)) = ۰$. بنابراین یک همریختی بصورت زیر خواهیم داشت،

$$\bar{D} : \mathcal{P}(E^۳)/\mathcal{Z}(E^۳) \longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

در این پایان‌نامه نشان خواهیم داد که $\bar{D}$ یک‌به‌یک است و خواهیم دید که قضیه سیدلر بلافاصله از این واقعیت نتیجه می‌شود. هدف این پایان‌نامه اثبات قضیه سیدلر با استفاده از روشهای جبر همولوژی و توپولوژی جبری است.

در فصلهای اول و دوم خلاصه‌ای از مفاهیم اولیه مورد نیاز، مانند دنباله‌ها، همولوژی گروهها، فیلترسازی‌ها و دنباله‌های طیفی آورده شده است. در فصل سوم به مسئله همنهشتی برشی می‌پردازیم. ما ابتدا گروه همنهشتی برشی را معرفی و سپس توصیفی همولوژیک از این گروه ارائه خواهیم داد. در فصل چهار به مطالعه گروه همنهشتی برشی انتقالی خواهیم پرداخت. برای اینکار ما مجموعه‌های سادکی و همچنین همولوژی فضاهای تیتس[۱] با سیستم ضرایب موضعی را معرفی و مطالعه خواهیم کرد. در نهایت در فصل پنج، قضیه همنهشتی برشی (قضیه سیدلر) را بیان و اثبات خواهیم کرد.

[۱] Tits

فصل اول

همولوژی گروهها

۱.۱ دنباله‌ها

فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد. منظور از دنباله $C_\bullet$ از R-مدولها، یک خانواده بصورت $\{C_n, \partial_n^C\}_{n\in\mathbb{Z}}$ می‌باشد که در آن به ازای هر n، C_n یک R-مدول و $\partial_n^C : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ یک همریختی R-مدولی است بطوریکه $\partial_n^C \circ \partial_{n+1}^C = 0$. دنباله $C_\bullet$ را بصورت

$$C_\bullet : \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^C} C_n \xrightarrow{\partial_n^C} C_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

نمایش می‌دهیم. همریختی ∂_n^C را دیفرانسیل مرتبه n دنباله $C_\bullet$ می‌نامیم. به ازای هر n، فرض کنید $Z_n(C_\bullet) := \ker(\partial_n^C)$ و $B_n(C_\bullet) := im(\partial_{n+1}^C)$. از رابطه $\partial_n^C \circ \partial_{n+1}^C = 0$ به آسانی نتیجه می‌شود که $B_n(C_\bullet) \subseteq Z_n(C_\bullet)$. n-امین همولوژی دنباله $C_\bullet$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_n(C_\bullet) := \frac{Z_n(C_\bullet)}{B_n(C_\bullet)}.$$

دنباله $C_\bullet$ را در n-امین مکان دقیق می‌نامیم، هرگاه $H_n(C_\bullet) = 0$ و یا به عبارتی $B_n(C_\bullet) = Z_n(C_\bullet)$.
دنباله $C_\bullet$ را یک دنباله دقیق می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $H_n(C_\bullet) = 0$. فرض کنید $C_\bullet$ و $D_\bullet$

دو دنباله باشند. خانواده $f_\bullet := \{f_n : C_n \longrightarrow D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ از R-همریختی‌ها را یک ریخت از دنباله $C_\bullet$ به دنباله $D_\bullet$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $f_{n-1}\circ\partial_n^C = \partial_n^D \circ f_n$. در واقع این بدین معناست که نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n^C} & C_{n-1} \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ D_n & \xrightarrow{\partial_n^D} & D_{n-1} \end{array}$$

هر چنین ریختی، به ازای هر n، یک همریختی R-مدولی از همولوژی دنباله‌ها بصورت زیر القاء می‌کند

$$H_n(f_\bullet) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(D_\bullet),$$

که در آن به ازای هر $\overline{x} \in H_n(C_\bullet)$، $H_n(f_\bullet)(\overline{x}) = \overline{f(x)}$. توجه کنید که هرگاه $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ و $g_\bullet : D_\bullet \longrightarrow E_\bullet$ دو ریخت باشند، آنگاه ترکیب این دو ریخت بصورت زیر است.

$$g_\bullet \circ f_\bullet := \{g_n \circ f_n : C_n \longrightarrow E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

به آسانی می‌توان دید که مجموعه همه دنباله‌های R-مدولی به همراه ریخت میان آنها تشکیل یک رسته می‌دهد، که آنرا با $\mathcal{CH}$ نمایش می‌دهیم و به ازای هر n، $H_n : \mathcal{CH} \longrightarrow Mod_R$ با ضابطه $C_\bullet \longmapsto H_n(C_\bullet)$ تابعگونی از رسته دنباله‌ها به رسته R-مدولهاست.

دنباله‌های $C_\bullet$ و $D_\bullet$ را یکریخت می‌نامیم هرگاه ریخت‌های $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ و $g_\bullet : D_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ وجود داشته باشند بطوریکه $g_\bullet \circ f_\bullet = id_{C_\bullet}$ و $f_\bullet \circ g_\bullet = id_{D_\bullet}$. ریخت $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ را یک هموتوپی پوچ گوییم هرگاه به ازای هر n، همریختی $s_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ وجود داشته باشد بطوریکه $f_n = s_{n-1}\circ\partial_n^C + \partial_{n+1}^D \circ s_n$. دو ریخت $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ را هموتوپ گوییم هرگاه ریخت $f_\bullet - g_\bullet := \{f_n - g_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$، یک هموتوپی پوچ باشد. این هموتوپی را با نماد $f_\bullet \backsim g_\bullet$ نمایش می‌دهیم. بر همین اساس دو دنباله $C_\bullet$ و $D_\bullet$ را هم‌ارز هموتوپ می‌نامیم و می‌نویسیم $C_\bullet \sim D_\bullet$، هرگاه ریخت‌های $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ و $g_\bullet : D_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ وجود داشته باشند بطوریکه $g_\bullet \circ f_\bullet \backsim id_{C_\bullet}$ و $f_\bullet \circ g_\bullet \backsim id_{D_\bullet}$.

لم ۱.۱.۱. *الف) فرض کنید* $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ *یک هموتوپی پوچ باشد. آنگاه به ازای هر* $n \in \mathbb{Z}$*،* $H_n(f_\bullet) = 0$.

ب) اگر ریخت‌های $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ *هموتوپ باشند، آنگاه به ازای هر* $n \in \mathbb{Z}$*،*

$$H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet).$$

پ) اگر $D_\bullet \backsim C_\bullet$*، آنگاه* $H_n(C_\bullet) \simeq H_n(D_\bullet)$.

اثبات. الف) به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، نگاشت $H_n(f_\bullet) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(D_\bullet)$ هر عضو $\bar{c} \in H_n(C_\bullet)$ را به $\overline{f_n(c)} \in H_n(D_\bullet)$ می‌نگارد. از آنجا که $f_\bullet$ یک هموتوپی پوچ است، به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، نگاشت $s_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ چنان وجود دارد که $f_n(c) = s_{n-1} \circ \partial_n^C(c) + \partial_{n+1}^D \circ s_n(c)$. اما از آنجا که $\partial_n^C(c) = 0$. پس داریم $f_n(c) = \partial_{n+1}^D(s_n(c)) \in B_n(D_\bullet)$. در نتیجه $H_n(f_\bullet)(\bar{c}) = \overline{f_n(c)} = 0$.

ب) فرض کنید $f_\bullet \sim g_\bullet$. پس $f_\bullet - g_\bullet$ یک هموتوپی پوچ است. حال بنابر قسمت (الف)، به ازای هر n، $H_n(f_\bullet - g_\bullet) = 0$. در نتیجه $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$.

پ) چون $C_\bullet \sim D_\bullet$، پس ریخت‌های $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ و $g_\bullet : D_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ وجود دارند بطوریکه $f_\bullet \circ g_\bullet \sim id_{D_\bullet}$ و $g_\bullet \circ f_\bullet \sim id_{C_\bullet}$. حال بنابر قسمت (ب) و خاصیت تابعگون بودن H_n، داریم:

$$H_n(f_\bullet) \circ H_n(g_\bullet) = H_n(f_\bullet \circ g_\bullet) = H_n(id_{D_\bullet}) = id_{H_n(D_\bullet)},$$

$$H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_n(id_{C_\bullet}) = id_{H_n(C_\bullet)}.$$

لذا $H_n(C_\bullet) \simeq H_n(D_\bullet)$. □

نتیجه ۱.۲.۱. *الف) دنباله* $C_\bullet$ *دقیق است هرگاه* $C_\bullet \backsim 0$ *که در آن منظور از ۰، دنباله صفر است.*

ب) دنباله $C_\bullet$ *دقیق است اگر و فقط اگر ریخت* $id_{C_\bullet} : C_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ *یک هموتوپی پوچ باشد.*

اثبات. ادعاهای فوق بلافاصله از لم قبل ۱.۱.۱، بدست می‌آیند. □

تعریف ۱.۳.۱. دنباله $D_\bullet$ را زیردنباله $C_\bullet$ گوییم هرگاه به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$،

۱) D_n زیرمدولی از C_n باشد،

۲) $\partial_n^D = \partial_n^C|_{D_n}$.

هرگاه $D_\bullet$ زیردنباله‌ای از $C_\bullet$ باشد، منظور از دنباله خارج قسمتی $C_\bullet/D_\bullet$، دنباله

$$C_\bullet/D_\bullet: \quad \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}^{C/D}} C_{n+1}/D_{n+1} \xrightarrow{\partial_n^{C/D}} C_n/D_n \xrightarrow{\partial_{n-1}^{C/D}} C_{n-1}/D_{n-1}$$

است بطوریکه $\partial_n^{C/D}(\overline{x}) := \overline{\partial_n^C(x)}$.

فرض کنید $\{K_\bullet^\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ خانواده‌ای از دنباله‌ها باشد. جمع مستقیم این دنباله‌ها دنباله‌ای بصورت $\{\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} K_n^\alpha, \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} \partial_n^{K^\alpha}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ می‌باشد. به سهولت می‌توان دید که به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$،

$$H_n(\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} K_\bullet^\alpha) \simeq \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{A}} H_n(K_\bullet^\alpha).$$

مثال ۱.۴.۱. فرض کنید $C_\bullet$ یک دنباله و M یک R-مدول باشد. دنباله $C_\bullet \otimes_R M$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$C_n \otimes_R M := \{C_n \otimes_R M, \partial_n^C \otimes id_M\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

در این مثال با استفاده از ضرب تانسوری یک مدول در یک دنباله، دنباله جدیدی ساختیم. حال این مفهوم را به ضرب تانسوری دو دنباله گسترش می‌دهیم. فرض کنید $C_\bullet$ و $D_\bullet$ دو دنباله غیر منفی باشند، یعنی

$$C_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow C_۲ \longrightarrow C_۱ \longrightarrow C_۰ \longrightarrow ۰,$$
$$D_\bullet: \quad \cdots \longrightarrow D_۲ \longrightarrow D_۱ \longrightarrow D_۰ \longrightarrow ۰.$$

ضرب تانسوری این دو دنباله، دنباله‌ای بصورت $\{(C_\bullet \otimes D_\bullet)_n, \partial_n^\otimes\}_{n\in\mathbb{Z}}$ است که به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، $(C_\bullet \otimes D_\bullet)_n := \bigoplus_{r+s=n} C_r \otimes_R D_s$ و دیفرانسیل $\partial_n^\otimes : (C_\bullet \otimes D_\bullet)_n \longrightarrow (C_\bullet \otimes D_\bullet)_{n-1}$ با ضابطه $\partial_n^\otimes(c_r \otimes d_s) = \partial_r^C(c_r) \otimes d_s + (-1)^r c_r \otimes \partial_s^D(d_s)$ تعریف می‌شود. می‌توان به آسانی ثابت کرد که $C_\bullet \otimes D_\bullet$، یک دنباله از $\mathbb{Z}$-مدولهاست.

در اینجا به ذکر قضیه‌ای می‌پردازیم که در این پایان‌نامه در اثبات برخی قضایا، نقشی کلیدی دارد.

قضیه ۱.۵.۱. (*دنباله دقیق بلند*)

فرض کنید دنباله $0 \longrightarrow K_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} L_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} M_\bullet \longrightarrow 0$ *دقیق باشد. آنگاه به ازای هر* n، *یک همریختی* $\delta_n : H_n(M_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(K_\bullet)$ *وجود دارد بطوریکه دنباله زیر دقیق است.*

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(M_\bullet) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(K_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(L_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(M_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(K_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

اثبات. به قضیه ۱.۳.۱ از مرجع [۸] مراجعه کنید. $\square$

تعریف ۱.۶.۱. گوییم M یک گروه آبلی آزاد یا $\mathbb{Z}$-مدول آزاد تولید شده توسط مجموعه غیرتهی X است هرگاه هر عضو از M را بتوان بطور یکتا بصورت جمع $\sum n_x x$ نوشت که در آن $x \in X$، $n_x \in \mathbb{Z}$ که تنها تعدادی متناهی از n_x-ها غیر صفر می‌باشند. گروه آبلی آزاد M را معمولا با نماد $M = \mathbb{Z}X = \bigoplus\limits_{x \in X} \mathbb{Z}x$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که ما همواره می‌نویسیم: $0 =: 0x$ و $x =: 1x$. بنابراین M یک $\mathbb{Z}$-مدول آزاد با پایه X است.

مثال ۱.۷.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی دلخواه باشد. فرض کنید $C_n(X)$، $n \geq 0$، $\mathbb{Z}$-مدول آزاد تولید شده توسط مجموعه $X^{n+1} := \{(x_0, \ldots, x_n) | x_i \in X\}$ باشد. همریختی $\mathbb{Z}$-مدولی $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\partial_n(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$$

که در آن به ازای هر $0 \leq i \leq n$، منظور از $(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$ عضو $(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ از $C_{n-1}(X)$ می‌باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم خانواده $C_\bullet(X) = \{C_n(X), \partial_n\}_{n \geq 0}$ یک دنباله است. برای این امر باید ثابت کنیم که به ازای هر n، $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. توجه کنید که

$$\begin{aligned}
\partial_n \circ \partial_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1}) &= \partial_n\Big(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \Big[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (x_0, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})\Big] \\
&+ \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \Big[\sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{j-1} (x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n)\Big]
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}\left(x_0,\dots,\hat{x}_j,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{n+1}\right)$$
$$+\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=i+1}^{n+1}(-1)^{i+j-1}\left(x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{n+1}\right).$$

به آسانی دیده می‌شود که جملات فوق دو به دو حذف می‌شوند و در نتیجه $\partial_n\circ\partial_{n+1}=0$. حال ادعا می‌کنیم

$$H_n(C_\bullet(X))\simeq\begin{cases}\mathbb{Z} & n=0\\ 0 & n\neq 0.\end{cases}$$

فرض کنید $\bar{C}_\bullet(X)$ دنباله زیر باشد

$$\bar{C}_\bullet(X):\cdots\longrightarrow C_n(X)\longrightarrow C_{n-1}(X)\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_1(X)\xrightarrow{\partial_1}C_0(X)\xrightarrow{\partial_0=\varepsilon}\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

که $\partial_0=\varepsilon:C_0(X)\longrightarrow\mathbb{Z}=:C_{-1}(X)$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$\varepsilon\left(\sum n_i(x_{0i})\right)=\sum n_i.$$

به آسانی دیده می‌شود که $\partial_0\circ\partial_1=0$. پس $\bar{C}_\bullet(X)$ یک دنباله است. برای اثبات ادعای فوق کافی است نشان دهیم $\bar{C}_\bullet(X)$ دقیق است. از آنجا که $\bar{C}_\bullet(X)$ یک دنباله است، پس $im(\partial_{n+1})\subseteqq\ker(\partial_n)$.

حال فرض کنید $\beta=\sum m(x_0,\dots,x_n)\in\ker(\partial_n)$. پس

$$\partial_n(\beta)=\sum\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m(x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n)=0.$$

فرض کنید x عضوی دلخواه از X باشد. از رابطه فوق نتیجه می‌شود که

$$\sum\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m(x,x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n)=0. \qquad (1.1)$$

حال اگر

$$\alpha:=\sum m(x,x_0,\dots,x_n)\in C_{n+1}(X),$$

با استفاده از تعریف ∂_n و رابطه (1.1) داریم:

$$\partial_{n+1}(\alpha)=\beta+\sum\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}m(x,x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n)$$

$$= \beta - \sum \sum_{i=0}^{n} (-1)^i m(x, x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) = \beta.$$

در نتیجه $\beta \in im(\partial_{n+1})$ و بنابراین $\ker(\partial_n) = im(\partial_{n+1})$. از آنجایی که اثبات فوق به ازای هر $n \geq -1$ صادق است، لذا دنباله $\bar{C}_\bullet(X)$ دقیق است. دنباله $\bar{C}_\bullet(X)$ را دنباله افزوده X می‌نامیم.

تعریف ۱.۸.۱. یک تحلیل (چپ) از R–مدول M، یک دنباله دقیق بصورت زیر است:

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

چنین تحلیلی را با $M \longrightarrow P_\bullet$ نمایش می‌دهیم. هرگاه به ازای هر i، P_i–ها، R–مدول تصویری (آزاد) باشند، این تحلیل را یک تحلیل تصویری (آزاد) می‌نامیم.

مثال ۱.۹.۱. بنابر آنچه در مثال ۱.۷.۱ اثبات شد، دنباله $\bar{C}_\bullet(X)$، یک تحلیل آزاد $\mathbb{Z}$–مدولی از $\mathbb{Z}$ می‌باشد که بصورت $C_\bullet(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ نمایش داده می‌شود.

لم ۱.۱۰.۱. *به ازای هر R–مدول M، یک تحلیل آزاد و بنابراین تصویری از M وجود دارد.*

اثبات. به گزاره ۶.۲ از مرجع [۶] مراجعه کنید. □

تعریف ۱.۱۱.۱. فرض کنید M یک R–مدول راست و $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ یک تحلیل تصویری از M باشد. برای R–مدول چپ N، $Tor_n^R(M, N)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$Tor_n^R(M, N) := H_n(P_\bullet \otimes_R N),$$

که در آن $P_\bullet \otimes_R N$ دنباله زیر است:

$$P_\bullet \otimes_R N : \cdots \longrightarrow P_2 \otimes_R N \longrightarrow P_1 \otimes_R N \xrightarrow{\partial_1^P \otimes id_N} P_0 \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

مثال ۱.۱۲.۱. فرض کنید $n = 0$. در اینصورت

$$Tor_0^R(M, N) = H_0(P_\bullet \otimes_R N) = \frac{P_0 \otimes_R N}{im(\partial_1^P \otimes id_N)}.$$

از طرفی چون ضرب تانسوری تابعگون دقیق راست است، پس دنباله

$$P_1 \otimes_R N \xrightarrow{\partial_1^P \otimes id_N} P_0 \otimes_R N \xrightarrow{\varepsilon \otimes id_N} M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

دقیق است. در نتیجه

$$M \otimes_R N \simeq \frac{P_\circ \otimes_R N}{im(\partial_\1^P \otimes id_N)}$$

و بنابراین $Tor_\circ^R \simeq M \otimes_R N$. این امر نشان می‌دهد که $Tor_\circ^R(M,N)$ مستقل از انتخاب تحلیل تصویری $M \longrightarrow P_\bullet$ است. در واقع این امر به ازای هر n صادق است.

قضیه ۱.۱۳.۱. *فرض کنید M یک R-مدول باشد. آنگاه برای هر R-مدول N، $Tor_n^R(M,N)$ مستقل از انتخاب تحلیل تصویری $M \longrightarrow P_\bullet$ است.*

اثبات. به نتیجه ۶.۲۱ از مرجع [۶] مراجعه کنید. □

گزاره ۱.۱۴.۱. *فرض کنید A و B گروههای آبلی و A_{tor} و B_{tor} بترتیب زیرگروههای تابدارِ A و B با آنها باشند. آنگاه*

$$Tor_n^{\mathbb{Z}}(A,B) \simeq \begin{cases} A \otimes_{\mathbb{Z}} B & n = \circ \\ Tor_\1^{\mathbb{Z}}(A_{tor}, B_{tor}) & n = \1 \\ \circ & n \geq \2 \end{cases}$$

اثبات. به گزاره ۳.۱۲ از مرجع [۸] مراجعه کنید. □

۲.۱ همولوژی گروهها

فرض کنید $(G,.)$ یک گروه دلخواه باشد. فرض کنید $\mathbb{Z}G$، $\mathbb{Z}$-مدول آزاد تولید شده توسط عناصر G باشد. عمل گروهی G بطور یکتا بصورت زیر به یک ضرب روی $\mathbb{Z}G$ گسترش می‌یابد که $\mathbb{Z}G$ را به یک حلقه یکدار تبدیل می‌کند،

$$(\sum n_g g).(\sum n_{g'} g') := \sum \sum (n_g n_{g'})(g.g').$$

توجه کنید که هرگاه G یک گروه آبلی باشد، $\mathbb{Z}G$ حلقه‌ای جابجایی خواهد بود. در این پایان‌نامه همواره منظور از یک G-مدول، یک $\mathbb{Z}G$-مدول چپ می‌باشد. گروه آبلی M را یک G-مدول بدیهی می‌نامیم هرگاه G بطور بدیهی روی M عمل کند، یعنی به ازای هر $m \in M$ و هر $g \in G$، $g.m := m$ برای مثال در اکثر مواقع $\mathbb{Z}$ را یک G-مدول بدیهی در نظر می‌گیریم.

نکته ۲.۱.۱. فرض کنید $(M, +)$ یک گروه جمعی باشد. به آسانی دیده می‌شود که M یک G-مدول است اگر و فقط اگر G روی M عمل کند و این عمل نسبت به جمع پخشی باشد، یعنی به ازای هر $g \in G$ و $m_۱, m_۲ \in M$،

$$g.(m_۱ + m_۲) = g.m_۱ + g.m_۲.$$

بنابر نکته فوق برای ساختن یک G-مدول کافی است گروه جمعی M با یک عمل G روی آن را چنان بیابیم که این عمل روی جمع پخش شود.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید G زیرگروهی از $GL_n(\mathbb{R}^n)$ باشد که دترمینان اعضای آن ۱ یا -۱ می‌باشد. برای یک $\mathbb{Z}$-مدول دلخواه M، عمل G روی M را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g.m := det(g)m.$$

بنابر نکته ۲.۱.۱ به آسانی دیده می‌شود که با عمل فوق M یک G-مدول است. این G-مدول را با M^t نمایش می‌دهیم. می‌توان بررسی کرد که $M \simeq M^t \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^t$.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید M یک G-مدول باشد. گروه M_G را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_G := \frac{M}{\langle m - mg | m \in M, g \in G\rangle}.$$

توجه کنید که با عمل $g.\bar{m} := \overline{g.m} = \bar{m}$، M_G یک G-مدول بدیهی است.

اگر M یک G-مدول چپ باشد، آنگاه همواره با عمل $m.g := g^{-۱}.m$ می‌توان آن را به یک G-مدول راست تبدیل کرد. اگر M و N دو G-مدول دلخواه باشند، آنگاه منظور از $M \otimes_G N$ همان $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$ می‌باشد.

گزاره ۲.۴.۱. *فرض کنید M یک G-مدول باشد. آنگاه*

$$M \otimes_G \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \otimes_G M \simeq M_G$$

اثبات. تابع $\varphi : M_G \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_G M$ را بصورت $\varphi(\bar{m}) = 1 \otimes m$ تعریف می‌کنیم. خوشتعریفی φ بصورت زیر اثبات می‌شود:

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(\overline{m - gm}) = 1 \otimes (m - gm)$$

$$= 1 \otimes m - 1 \otimes gm = 1 \otimes m - 1.g \otimes m$$

$$= 1 \otimes m - 1 \otimes m = 0.$$

حال نگاشت $\psi : \mathbb{Z} \otimes_G M \longrightarrow M_G$ با ضابطه $\psi(r \otimes m) = \overline{rm}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $\varphi \circ \psi = id_{M_G}$ و $\psi \circ \varphi = id_{\mathbb{Z} \otimes_G M}$، بنابراین یکریختی مورد نظر حاصل می‌شود. یکریختی $M \otimes_G \mathbb{Z} \simeq M_G$ بطور مشابه اثبات می‌گردد. $\square$

مثال ۲.۵.۱. هرگاه در مثال ۱.۷.۱ به جای X گروه دلخواه G را قرار دهیم، آنگاه $C_\bullet(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ یک تحلیل آزاد از $\mathbb{Z}$-مدولها روی $\mathbb{Z}$ است. با عمل $g.(g_0, \dots, g_n) := (gg_0, \dots, gg_n)$، $C_n(G)$ یک G-مدول آزاد با پایه $\{(1, g_1, \dots, g_n) | g_i \in G\}$ می‌باشد. پس هرگاه $\mathbb{Z}$ را یک G-مدول بدیهی در نظر بگیریم، با تعریف فوق $C_\bullet(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ یک تحلیل آزاد از $\mathbb{Z}$ روی $\mathbb{Z}G$ است. این تحلیل را تحلیل استاندارد G می‌نامیم.

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنید M یک G-مدول باشد. همولوژی n-ام گروه G با ضرایب در M را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_n(G, M) := H_n(P_\bullet \otimes_G M) \simeq Tor_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$$

که $P_\bullet \longrightarrow \mathbb{Z}$ یک تحلیل تصویری دلخواه از $\mathbb{Z}$ بعنوان $\mathbb{Z}G$-مدول بدیهی است. بنابر قضیه ۱.۱۳.۱، تعریف $H_n(G, M)$ مستقل از انتخاب تحلیل تصویری $P_\bullet \longrightarrow \mathbb{Z}$ می‌باشد. با توجه به مثال ۲.۵.۱

داریم:

$$H_n(G,M) \simeq H_n(C_\bullet(G) \otimes_G M)$$

لم ۲.۷.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد. آنگاه*

$$H_1(G,\mathbb{Z}) \simeq \frac{G}{[G,G]}$$

که در آن $[G,G] := \langle gg'g^{-1}g'^{-1} | g,g' \in G\rangle$ زیرگروه جابجاگر G است.

اثبات. به گزاره ۶.۱.۱۱ از مرجع [۸] مراجعه کنید. □

گزاره ۲.۸.۱. *فرض کنید M یک G –مدول و N زیر مدول M باشد. آنگاه*

الف) $H_0(G,M) \simeq \mathbb{Z} \otimes_G M \simeq M_G$ ، بویژه اگر M یک G–مدول بدیهی باشد، آنگاه

$$H_0(G,M) \simeq M.$$

ب) $(M/N)_G \simeq M_G/im(N_G)$

اثبات. الف) بنابر تعریف ۲.۶.۱ و گزاره ۲.۴.۱ داریم:

$$H_0(G,M) \simeq Tor_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) \simeq \mathbb{Z} \otimes_G M \simeq M_G\,.$$

ب) دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{N} \longrightarrow 0$ را در نظر بگیرید. از آنجا که ضرب تانسوری تابعگون دقیق چپ است، دنباله $N\otimes_G\mathbb{Z} \longrightarrow M\otimes_G\mathbb{Z} \longrightarrow \frac{M}{N}\otimes_G\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ دقیق است. پس $\frac{M}{N}\otimes_G\mathbb{Z} \simeq \frac{M\otimes_G\mathbb{Z}}{im(N\otimes_G\mathbb{Z})}$ حال با استفاده از گزاره ۲.۴.۱ داریم: $(\frac{M}{N})_G \simeq \frac{M_G}{im(N_G)}$. □

گزاره ۲.۹.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی با $|G|$ عضو و M یک G–مدول باشد. آنگاه به ازای هر $p \geq 1$، $H_p(G,M)$ یک گروه آبلی متناهی از رتبه حداکثر $|G|$ است. بدین معنی که مرتبه هر عضو $H_p(G,M)$ حداکثر $|G|$ است.*

اثبات. نتیجه ۱۰.۲ از فصل ۳ از مرجع [۲] را ببینید. □