دانشگاه محقق اردبیلی
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشتهٔ **ریاضی کاربردی**

عنوان:

روش‌های شکافت هرمیتی– هرمیتی‌کج اصلاح شده برای حل دستگاه معادلات خطی معین مثبت غیرهرمیتی

استاد راهنما:
دکتر داود خجسته سالکویه

نگارش:
شیوا بهنژاد

پاییز ۱۳۸۹

نام خانوادگی: بهنژاد **نام:** شیوا

عنوان پایان‌نامه: روش‌های شکافت هرمیتی– هرمیتی‌کج اصلاح شده برای حل دستگاه معادلات خطی معین مثبت غیرهرمیتی

استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی **گرایش:** کاربردی

دانشگاه: محقق اردبیلی

دانشکده: علوم **تاریخ فارغ‌التحصیلی:** ۱۳۸۹/۷/۲۰ **تعداد صفحه:** ۸۴

کلید واژه‌ها: دستگاه‌های معین مثبت، شکافت، هرمیتی–هرمیتی‌کج

چکیده: بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی منجر به حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ می‌شوند که در آن A یک ماتریس تُنُک معین مثبت غیرهرمیتی با ابعاد بزرگ است و $x, b \in \mathbb{C}^n$. همانطور که می‌دانیم روش تکراری شکافت هرمیتی – هرمیتی کج (HSS) و نسخه‌ی تقریبی آن (IHSS) برای حل این گونه دستگاه‌ها بسیار مناسب هستند. لی و همکارانش در سال ۲۰۰۷ روش‌های تکراری HSS یک طرفه (LHSS) و نسخه‌ی تقریبی آن یعنی ILHSS را ارائه نمودند. در این پایان نامه روش‌های LHSS و ILHSS را با جزئیات کامل، از جمله همگرایی روش‌ها و انتخاب پارامترهای مورد استفاده، بررسی کرده و به ترتیب با روش‌های HSS و IHSS مقایسه می‌کنیم. در پایان چندین مثال عددی برای بررسی همگرایی این روش‌ها و مقایسه با روش‌های HSS و IHSS ارائه می‌کنیم.

چکیده

بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی منجر به حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ می‌شوند که در آن A یک ماتریس تُنُک معین مثبت غیرهرمیتی با ابعاد بزرگ است و $x, b \in \mathbb{C}^n$. همانطور که می‌دانیم روش تکراری شکافت هرمیتی — هرمیتی کج (HSS) و نسخه‌ی تقریبی آن (IHSS) برای حل این گونه دستگاه‌ها بسیار مناسب هستند. لی و همکارانش در سال ۲۰۰۷ روش‌های تکراری HSS یک طرفه (LHSS) و نسخه‌ی تقریبی آن یعنی ILHSS را ارائه نمودند. در این پایان نامه روش‌های LHSS و ILHSS را با جزئیات کامل، از جمله همگرایی روش‌ها و انتخاب پارامترهای مورد استفاده، بررسی کرده و به ترتیب با روش‌های HSS و IHSS مقایسه می‌کنیم. در پایان چندین مثال عددی برای بررسی همگرایی این روش‌ها و مقایسه با روش‌های HSS و IHSS ارائه می‌کنیم.

واژه های کلیدی: معین مثبت غیرهرمیتی، شکافت، هرمیتی—هرمیتی کج، LHSS، ILHSS.

فهرست مندرجات

لیست جداول

لیست اشکال

پیش گفتار

دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \tag{۰.۰.۱}$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ یک ماتریس تُنُک با ابعاد بزرگ و معین مثبت غیر هرمیتی است و $x, b \in \mathbb{C}^n$. امروزه از روش‌های تکراری برای حل این گونه دستگاه‌ها استفاده می‌شود. روش‌های تکراری به دو دسته‌ی ایستا [۱] و غیر ایستا[۲] تقسیم می‌شوند. یک روش تکراری ایستا برای حل دستگاه (۰.۰.۱) به صورت

$$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f, \tag{۰.۰.۲}$$

نوشته می‌شود که در آن $x^{(0)}$ یک حدس اولیه برای جواب دستگاه است. همانطور که ملاحظه می‌شود ماتریس تکرار روش، یعنی G، همیشه ثابت است. کلی ترین روش ایستایی که تاکنون ارائه شده است روش AOR [۳] [۱۰] است که توسط حاجیدیموس[۴] ارائه شده است. این روش به دو پارامتر وابسته است به ازای مقادیر خاص از این پارامترها این روش، روش‌های شناخته شده‌ی ژاکوبی [۵]، گوس—سایدل [۶] و SOR[۷] را نتیجه می‌دهد [۹، ۱۳، ۱۲]. روش‌های غیر ایستا

[۱] stationary
[۲] nonstationary
[۳] Accelerated Overrelaxation
[۴] Hadjidimos
[۵] Jacobi
[۶] Gauss-Seidel
[۷] Successive Overrelation

روش‌هایی هستند که در آن ماتریس تکرار روش ثابت نیستند و در هر تکرار تغییر می‌کنند. از روش‌های غیرایستا می‌توان روش‌های گرادیان مزدوج (CG) [۸] و مانده مینیمال تعمیم یافته (GMRES) [۹] را نام برد [۱۲].

در [۲]، بای [۱۰] و همکارانش روش شکافت هرمیتی — هرمیتی کج [۱۱] (HSS) و نسخه‌ی تقریبی آن یعنی [۱۲] (IHSS) را ارائه کردند. روش HSS یک روش ایستا است، اما روش IHSS تلفیقی از یک روش ایستا و یک روش غیر ایستا است. در این روش‌ها ابتدا ماتریس ضرایب A به صورت

$$A = H + S,$$

تجزیه می‌شود که H بخش هرمیتی و S بخش هرمیتی‌کج آن می‌باشند، یعنی

$$H = \frac{۱}{۲}(A + A^H), \qquad S = \frac{۱}{۲}(A - A^H).$$

روش HSS، یک روند تکراری دو مرحله‌ای به صورت زیر است

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\alpha I + H)x^{(k+\frac{۱}{۲})} & = & (\alpha I - S)x^{(k)} + b, \\ (\alpha I + S)x^{(k+۱)} & = & (\alpha I - H)x^{(k+\frac{۱}{۲})} + b, \end{array} \right. \qquad k = ۰, ۱, ۲, \cdots \qquad (۰.۰.۳)$$

که در آن α یک پارامتر مثبت و $x^{(۰)}$ یک حدس اولیه برای جواب دستگاه است.

در [۲]، نشان داده شد که اگر ماتریس A معین مثبت غیرهرمیتی باشد، آنگاه روش HSS بدون هیچ شرایطی همگرا خواهد بود. توجه کنید که هر تکرار روش HSS شامل دو تکرار داخلی است که در هر کدام از آنها بایستی یک دستگاه معادلات خطی توسط روش‌های مستقیم مثل تجزیه‌ی LU حل شود. بنابراین استفاده از این روند تکراری بسیار پر هزینه است. برای رفع این مشکل می‌توان در حل دو دستگاه داخلی از روش‌های تکراری استفاده کرد که در این صورت الگوریتم IHSS ساخته می‌شود. در صورتی که ماتریس A معین مثبت باشد، خواهیم دید که روش تکراری IHSS تحت شرایط ضعیفی به جواب دستگاه همگرا خواهد شد. با توجه به این‌که

[۸] Conjugate Gradient
[۹] Generalized Minimal Residual
[۱۰] Bai
[۱۱] Hetmitian/skew-Hermitian Splitting
[۱۲] Inexact Hetmitian/skew-Hermitian Splitting

این روش برای دستگاه‌هایی که ماتریس ضرایب آنها معین مثبت است بسیار کارا است، توجه ریاضیدانان را به خود جلب کرده است.

بنزی [۱۳] در [۵] و بای و همکارانش در [۳] این روش را برای حل مسائل نقطه زینی به کار گرفتند که حوزه کاربرد روش HSS را به دستگاه‌های خطی نیمه معین گسترش می‌دهد.

هم چنین با بررسی بیشتر این روش، بای و همکارانش در [۱] روش NSS [۱۴] را ارائه دادند. در این روش ابتدا شکافت

$$A = N + S_0,$$

برای A نوشته می‌شود که در آن N یک ماتریس نرمال و S_0 یک ماتریس هرمیتی کج است. سپس روش تکراری دو گامی زیر ارائه می‌گردد:

$$\begin{cases} (\alpha I + N)x^{(k+\frac{1}{2})} &= (\alpha I - S_0)x^{(k)} + b, \\ (\alpha I + S_0)x^{(k+1)} &= (\alpha I - N)x^{(k+\frac{1}{2})} + b, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

همچنین بای در [۴] روشی مشابه روش فوق به نام PSS [۱۵] را ارائه داد که برمبنای یک شکافت هرمیتی کج و معین مثبت به صورت زیر است:

$$A = P + S,$$

که در آن P یک ماتریس معین مثبت و S یک ماتریس هرمیتی کج است.

در [۱۱]، لی [۱۶] و همکارانش روش HSS یک‌طرفه یعنی LHSS [۱۷] و نسخه‌ی تقریبی آن یعنی ILHSS را ارائه نمودند. روند تکراری LHSS به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} Hx^{(k+\frac{1}{2})} &= -Sx^{(k)} + b, \\ (\alpha I + S)x^{(k+1)} &= (\alpha I - H)x^{(k+\frac{1}{2})} + b. \end{cases} \qquad (0.0.4)$$

مشابه الگوریتم IHSS، الگوریتم‌های INSS، IPSS و ILHSS را نیز می‌توان تعریف کرد.

---

[۱۳] Benzi

[۱۴] Normal/skew-Hermitian Splitting

[۱۵] Positive-dfinite/skew-Hermitian Splitting

[۱۶] Li

[۱۷] Lopsided Hermitian/skew-Hermitioan Splitting

در این پایان‌نامه روش‌های LHSS و ILHSS را با جزئیات کامل مورد بررسی قرار می‌دهیم و از لحاظ تئوری و عددی به ترتیب با روش‌های HSS و IHSS مقایسه می‌کنیم.

این پایان‌نامه به صورت زیر جمع‌بندی می‌شود:

در فصل اول مفاهیم و مقدمات لازم جمع آوری شده است. در فصل دوم روش‌های تکراری مانده‌ی مینیمال تعمیم یافته (GMRES) و گرادیان مزدوج (CG) را به طور خلاصه بررسی می‌کنیم. در فصل سوم ابتدا روش تکراری HSS و نسخه تقریبی آن را مرور می‌کنیم و سپس روش LHSS و نسخه تقریبی آن را به تفصیل بررسی می‌کنیم و به بحث همگرایی این روش‌ها می‌پردازیم. در فصل چهارم نتایج عددی ارائه می‌گردد.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و قضایا

در این بخش برخی از تعاریف و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.

تعریف **۱.۱.۱** : فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. یک نرم روی V تابع‌ای است مثل $||.||$ از V به $\mathbb{R}$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $x \in V$، $||x|| \geq \circ$. بعلاوه $||x|| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$؛

(ب) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in V$، $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$؛

(ج) به ازای هر $x, y \in V$، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (نامساوی مثلث).

در صورتی که $V = \mathbb{C}^n$، نرم را نرم برداری و در صورتی $V = \mathbb{C}^{n\times n}$، نرم را نرم ماتریسی گوئیم.

مثال **۲.۱.۱** : فرض کنیم $V = \mathbb{C}^n$. دراین صورت می‌توان دید به ازای هر $p \geq ۱$، نرم$-p$ بردار$x = (x_۱, x_۲, \cdots x_n)^T \in V$ که به صورت

$$||x||_p = (\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^p)^{\frac{۱}{p}}$$

تعریف می شود، در شرایط تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند. به ازای $p = ۲$ نرم فوق را نرم اقلیدسی می‌نامند.

مثال **۳.۱.۱** : فرض کنید $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ (مجموعه‌ی همه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط). در این صورت برای هر $p \geq ۱$، نرم$-p$ ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||A|| = (\sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|^p)^{\frac{۱}{p}}.$$

به ازای $p=۲$ نرم فوق به نرم فروبنیوس [۱] معروف است.

مثال ۴.۱.۱ : اگر $||.||$ یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^n$ و $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد، آنگاه

$$||A|| = \max_{||x||=۱} ||Ax||$$

یک نرم ماتریسی را تعریف می‌کند. این نرم را نرم طبیعی متناظر به این نرم برداری گویند.

مثال ۵.۱.۱ : فرض کنید M یک ماتریس نامنفرد باشد. به سادگی می‌توان دید که $|||.|||_M$ که برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ به صورت $|||x|||_M = ||Mx||_۲$ تعریف می‌شود یک نرم برداری است و نرم ماتریسی زیر را نیز خواهیم داشت:

$$|||X|||_M = ||MXM^{-۱}||_۲, \qquad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

تعریف ۶.۱.۱ : یک ضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی (یا مختلط) V، تابع‌ای است که به هر زوج مرتب از بردارهای x و y در V، اسکالر حقیقی (یا مختلط) (x,y) نسبت داده می‌شود به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) (x,x) حقیقی باشد و $(x,x) \geq ۰$. بعلاوه $(x,x)=۰$ اگر وتنها اگر $x=۰$؛

(ب) برای هر اسکالر λ، $(x,\lambda y)=\lambda(x,y)$؛

(ج) برای هر $z \in V$، $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$؛

(د) $(x,y)=\overline{(y,x)}$.

هر فضای برداری مختلط یا حقیقی که یک ضرب داخلی در آن تعریف شده باشد یک فضای حاصلضرب داخلی نامیده می‌شود. همچنین به سادگی می‌توان دید که اگر V یک فضای

[۱] Frobenius

حاصلضرب داخلی با ضرب داخلی (x,y) باشد، آنگاه $\|.\| = \sqrt{(.,.)}$ یک نرم روی V تعریف می‌کند.

مثال **۷.۱.۱** : برای هر دو بردار x و y در $\mathbb{C}^n$، ضرب داخلی استاندارد آنها به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i.$$

تعریف **۸.۱.۱** : ماتریس

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

را یک ماتریس سه قطری نامیم و با $T = tridiag(c_i, a_i, b_i)$ نشان می‌دهیم.

تعریف **۹.۱.۱** : ضرب کرونکر: فرض کنید که $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ و $B \in \mathbb{R}^{r\times s}$ دو ماتریس دلخواه باشند. در این صورت، ماتریس $C \in \mathbb{R}^{pr\times qs}$، ضرب کرونکر[۲] ماتریس A در ماتریس B را با نماد $A \otimes B$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A \bigotimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1s} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \\ Ab_{r1} & & \cdots & Ab_{rs} \end{pmatrix}.$$

[۲] Kronecker product

تعریف ۱۰.۱.۱ : ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را بالاهسنبرگی [۳] گوییم هرگاه به ازای $i > j + 1$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$. ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ را پایین هسنبرگی [۴] گوییم هرگاه به ازای $j > i + 1$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

تعریف ۱۱.۱.۱ : اگر A یک ماتریس مربعی باشد، چندجمله‌ای مشخصه‌ی A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

قضیه ۱۲.۱.۱ : (قضیه‌ی کیلی- همیلتون [۵]) هر ماتریس مربعی A در چندجمله‌ای مشخصه‌ی خود صدق می‌کند. یعنی اگر $p(x)$ چندجمله‌ای مشخصه‌ی A باشد، آنگاه

$$p(A) = 0.$$

اثبات: به [۱۲] مراجعه شود. □

قضیه ۱۳.۱.۱ : اگر p و q دو چندجمله‌ای به ترتیب از درجات m و n و A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه

$$p(A)q(A) = q(A)p(A).$$

اثبات: اثبات این قضیه ساده است و از ارائه آن صرف‌نظر می‌شود. □

---

[۳] upper Hessenberg matrix
[۴] lower Hessenberg matrix
[۵] Cayley - Hamilton

تعریف ۱۴.۱.۱ : فرض کنید که $A = (a_{ij})$ ماتریسی با درایه‌های مختلط باشد. مزدوج ماتریس A به صورت $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ و ترانهاده مزدوج[۶] آن به صورت $A^H = \overline{A}^T$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱ : ماتریس A را هرمیتی[۷] گوییم هر گاه $A^H = A$ و آن را هرمیتی‌کج[۸] گوییم هرگاه $A^H = -A$.

تعریف ۱۶.۱.۱ : بردارهای x_1،x_2،...،x_n را در $\mathbb{R}^n$ دو به دو متعامد گویند هرگاه $x_i^T x_j = 0$، $i \neq j$. در این صورت اگر قرار دهیم $X = (x_1, \cdots, x_n)$ آنگاه خواهیم داشت

$$X^T X = D,$$

که در آن D یک ماتریس قطری $n \times n$ می‌باشد. بعلاوه اگر $D = I$ بردارها را متعامد یکه و ماتریس X را متعامد[۹] نامند.

تعریف ۱۷.۱.۱ : ماتریس مربعی مختلط Q را یکانی[۱۰] گوییم هرگاه $Q^H Q = I$ (به عبارت دیگر ستون‌های ماتریس Q در $\mathbb{C}^n$ بر هم متعامد یکه باشند). اگر Q یکانی باشد، آنگاه $||Q||_2 = 1$ و برای هر $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$، $||AQ||_2 = ||QA||_2 = ||A||_2$.

تعریف ۱۸.۱.۱ : ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ را معین مثبت گوییم هرگاه:

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \ , x \neq 0 \ : \ \ x^H A x > 0.$$

---

[۶] conjugate transpose
[۷] Hermitian
[۸] Skew-Hermition
[۹] Orthogonal
[۱۰] Unitary

اگر A هرمیتی و معین مثبت باشد ماتریس A را معین مثبت هرمیتی[۱۱] (HPD) گوییم. همچنین ماتریس A رانیمه معین مثبت هرمیتی گویند هرگاه A هرمیتی بوده و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$، $x^H Ax \geq 0$.

قضیه **۱۹.۱.۱** : اگر ماتریس مربعی A معین مثبت هرمیتی باشد، آنگاه خواهیم داشت:

(الف) A^{-1} موجود و معین مثبت هرمیتی است.

(ب) دترمینان ماتریس A مثبت است.

(ج) درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A مثبت هستند.

اثبات: به [۱۲] مراجعه شود. $\square$

تعریف **۲۰.۱.۱** : فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. گوییم $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه[۱۲] متناظر به بردار ویژه[۱۳] x برای ماتریس A است، هرگاه

$$Ax = \lambda x, \qquad x \neq 0,$$

در این صورت (λ, x) را یک زوج ویژه‌ی A گویند.

قضیه **۲۱.۱.۱** : اگر A یک ماتریس هرمیتی باشد، آنگاه مقادیر ویژه‌ی آن حقیقی هستند. بعلاوه A معین مثبت است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه‌ی آن مثبت باشند.

اثبات: به [۱۲] مراجعه شود. $\square$

[۱۱] Hermition Positive Definite
[۱۲] eigenvalue
[۱۳] eigenvector

تعریف ۲۲.۱.۱ : اگر ماتریس A معین مثبت هرمیتی و x برداری در $\mathbb{C}^n$ باشد، آنگاه A—نرم x به صورت زیر تعریف می‌شود

$$||x||_A = (Ax, x)^{1/2}.$$

تعریف ۲۳.۱.۱ : مجموعه‌ی تمام مقادیر ویژه ماتریس A را طیف[۱۴] A نامند و با $\sigma(A)$ نشان می‌دهند. بعلاوه بزرگترین مقدار ویژه A از حیث قدر مطلق را شعاع طیفی[۱۵] A گفته و با $\rho(A)$ نشان می‌دهیم، یعنی

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

قضیه ۲۴.۱.۱ : فرض کنیم λ یک مقدار ویژه $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد. دراین صورت برای هر نرم طبیعی $||.||$ داریم $|\lambda| \leq ||A||$.

اثبات: به [۱۲] مراجعه شود. $\square$

به عنوان یک نتیجه، برای هرماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و هر نرم طبیعی $||.||$ داریم $\rho(A) \leq ||A||$.

قضیه ۲۵.۱.۱ : برای هر دو ماتریس مربعی A و B داریم

$$\rho(AB) = \rho(BA).$$

اثبات: فرض می‌کنیم λ یک مقدار ویژه‌ی غیرصفر AB باشد و $x \neq 0$ بردار ویژه متناظر آن باشد، در این صورت داریم

$$ABx = \lambda x \Longrightarrow B(ABx) = B(\lambda x) = \lambda Bx$$

با فرض $Bx = y$ و با توجه به اینکه $y \neq 0$ می‌توانیم بنویسیم

$$BAy = \lambda y,$$

[۱۴] spectrum
[۱۵] spectral radius