چکیده

در این رساله به حل عددی معادله انتگرال – دیفرانسیل ولترای سهموی با دامنه‌ی بی‌نهایت می‌پردازیم. بدین منظوربا توجه به دو شرط فرضی زیر

$$\Gamma_0 = \{(0,t) : 0 \leq t \leq T\}\ ,\ \ \Gamma_1 = \{(d,t) : 0 \leq t \leq T\}$$

دامنه‌ی فاصله‌ای بی‌نهایت را به سه زیر دامنه‌ی زیر تقسیم‌می کنیم:

$$\begin{aligned} Q_d &= \{(x,t) : d < x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}, \\ Q_0 &= \{(x,t) : -\infty < x < 0, 0 \leq t \leq T\}, \\ Q &= \{(x,t) : 0 \leq x \leq d, 0 \leq t \leq T\}, \end{aligned}$$

سپس با محدود کردن مسأله بر روی دو زیر دامنه‌ی Q_d و Q_0 و استفاده از تبدیلات لاپلاس ، دو شرط مرزی بدست می آوریم و در انتها با محدود کردن مسأله اصلی بر روی دامنه‌ی Q و با در نظر گرفتن دو شرط مرزی ، با استفاده از روش تفاضلات مرکزی به حل مسأله می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: معادله انتگرال – دیفرانسیل ولترای سهموی ،دامنه‌ی فاصله‌ای بی نهایت ، شرایط مرزی فرضی.

فهرست مندرجات

مقدمه

معادلات انتگرال — دیفرانسیل ابتدا در اوایل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا[1] معرفی شد [۱]. ولترا در حال بررسی پدیده‌ی رشد و تأثیر وراثت بود که با این معادلات مواجه شد و نام مذکور را برای آنها انتخاب کرد. این معادلات در بسیاری از علوم مانند انتقال گرما و پدیده‌ی انتشار و پخش نوترون و نظایر آن ظاهر می‌شوند. تعدادی از پدیده‌ها در فیزیک (مسأله‌ی انفجار، انتقال گرما، کریستالها، سیالات) و در بیولوژی (رقابت بین گونه‌ها) ، در هوافضا(فضای ماورا) ، سیستمهای دینامیکی و در شاخه‌های مهندسی در قالب این نوع معادلات انتگرال — دیفرانسیل ظاهر می‌شوند.

سالهای اخیر برای حل معادلات انتگرال — دیفرانسیل از طرف محققین تلاشهایی صورت گرفته است . آنچنان که یانیک [2] و فیروزر [3]با استفاده از روش تفاضلات متناهی [۲] و چن [4] و شیه [5] با روش تفاضلات متناهی [۳] و نظایر آن به حل اینگونه معادلات پرداختند.

می‌توان گفت به‌دست آوردن جواب های دقیقتر برای این معادلات در حالتها و شرایط متفاوت با توجه به کاربردی بودن آن ضروری بنظر می رسد.

معادلات انتگرال — دیفرانسیل دارای حالت های متفاوتی است . از جمله معادله انتگرال — دیفرانسیل جزئی به فرمت زیر که دارای کاربردهای بسیاری است [۴]:

---

[1] $Volterra$
[2] $Yanik$
[3] $Fairweather$
[4] $Chen$
[5] $Shih$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\int_{\circ}^{t}k(x,t-s)u(x,s)ds=\Delta u+f(x,t)\ ;\ x\in A\ ,t\in[\circ,T].$$

برای حل این گونه از مسائل می‌توان از روش مرزهای ساختگی یا فرضی استفاده کنیم . این روش برای حل عددی معادله دیفرانسیل جزئی سهموی روی دامنه‌ی فاصله‌ای بی‌نهایت نیز به کار می رود [۷—۵].

محور کار در این رساله حل عددی یک معادله انتگرال — دیفرانسیل ولترای سهموی با دامنه‌ی فاصله‌ای بی‌نهایت می‌باشد.

در فصل اول این رساله به صورت کاملاً مختصر به بیان تعاریف و قضایایی از آنالیز حقیقی که در فصلهای آینده لازم می باشد می‌پردازیم . در فصل دوم معادلات انتگرال را معرفی می کنیم و به معرفی انواع هسته‌ی معادلات انتگرال می پردازیم . در ادامه‌ی فصل قضایایی از وجود جواب برای این دسته از معادلات را بیان می کنیم . در فصل سوم مفاهیمی از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را بیان کرده و به ذکر انواع معادلات با مشقات جزئی می‌پردازیم. در ادامه‌ی بحث به بررسی استاندارد کردن یک معادله‌ی سهموی روی می آوریم. سپس نحوه‌ی بدست آوردن شرایط مرزی برای یک معادله دیفرانسیل سهموی با دامنه‌ی بی‌نهایت را بیان کرده و وجود جواب یکتا برای مسأله را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در فصل چهارم شرایط مرزی برای یک معادله انتگرال — دیفرانسیل ولترای سهموی با دامنه‌ی بی‌نهایت را بدست می آوریم . در همان فصل ارتباط یک معادله انتگرال — دیفرانسیل ولترای سهموی را با یک معادله دیفرانسیل جزئی سهموی مورد بررسی قرار می‌دهیم . در انتهای همان فصل چند مثال عددی را مطرح کرده و روش توصیف شده را مورد ارزیابی قرار می دهیم .

فصل ۱

پیش نیازها

دراین فصل به تعاریف و قضایایی از آنالیز حقیقی که در فصول بعد مورد نیاز می‌باشد، می‌پردازیم[۸].

تعریف ۱.۰.۱ مجموعه X از عنصرها روی مجموعه اعداد حقیقی یک فضای برداری (فضای خطی حقیقی یا فضای برداری خطی) روی $\mathbb{R}$ گویند هرگاه تابع $(+) : X \times X \to X$ و تابع $(\times) : \mathbb{R} \times X \to X$ وجود داشته باشند که در شروط زیر صدق کنند:

الف) به ازای هر $x, y \in X$ داریم: $x + y = y + x$.

ب) به ازای هر $x, y, z \in X$ داریم: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

ج) به ازای هر $x \in X$، $0 \in X$ وجود دارد بطوریکه: $x + 0 = 0 + x = x$.

د) به ازای هر $x \in X$، $u \in X$ وجود دارد بطوریکه: $x + u = u + x = 0$.

ه) به ازای هر $x, y \in X$ و به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

و) به ازای هر $x \in X$ و به ازای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ داریم: $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

خ) به ازای هر $x \in X$ و به ازای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ داریم: $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

ح) به ازای هر $x \in X$ داریم: $0x = 0, \quad 1x = x1 = x$.

عنصر ۰ معرفی شده در بند سوم منحصر به فرد بوده و صفر می‌نامیم. عنصر u را قرینه x گوئیم وبا $-x$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۰.۱ فضای متریک (ρ, X) عبارت است از یک مجموعه ناتهی X از عنصرها و یک تابع حقیقی ρ که روی $X \times X$ تعریف شده ، به گونه‌ای که برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

الف) $\rho(x, y) \geq 0$.

ب) $x = y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$.

ج) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

د) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

تابع ρ را متریک گوییم.

یک مثال بدیهی از فضاهای متریک مجموعه $\mathbb{R}$ با $\rho(x, y) = |x - y|$ است.
مثال دیگر فضاهای اقلیدسی n بعدی $\mathbb{R}^n$ است که نقطه‌های آن n ـگانه‌های $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ از عددهای حقیقی هستند به قسمی که داریم:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... (x_n - y_n)^2}.$$

تعریف ۳.۰.۱ یک تابع حقیقی نامنفی $||.||$ که روی فضای برداری X تعریف گردد ، نرم نامیده می‌شود هرگاه :

الف) به ازای هر $x \in X$ داریم: $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ب) به ازای هر $x, y \in X$ داریم: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

ج) به ازای هر $x \in X$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ داریم: $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$.

از مثالهای دیگر فضاهای متریک ، فضای خطی نرمدار با متریک $\rho(x,y) = ||x-y||$ می‌باشد که به ρ متر تولید شده توسط نرم گوییم.

تعریف ۴.۰.۱ فضای خطی (مختلط)X را یک فضای ضرب داخلی گوییم هرگاه یک تابع مختلط (حقیقی) روی $X \times X$ وجود داشته باشد به‌طوریکه برای هر$\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

الف) $< x+y, z >=< x, z > + < y, z >$.

ب) $< x, y >= \overline{< y, x >}$.

ب) $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$.

ج) $< x, x > \geq \circ$.

د) $< x, x >= \circ \Leftrightarrow x = \circ$.

$< x, y >$ ضرب داخلی x, y نامیده می‌شود. با این تعریف می‌یابیم $||x|| = \sqrt{< x, x >}$.

تعریف ۵.۰.۱ فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی و $x, y \in X$ دو عضو متمایز باشند، x را برy عمود گوییم هرگاه:

$$< x, y >= \circ,$$

و آن را با نماد $x \perp y$ نمایش می‌دهیم.
اگر به‌ازای هر $x, y \in A$ داشته باشیم:

$$< x, y >= \begin{cases} \circ \quad ; & x \neq y, \\ \alpha > \circ; & x = y. \end{cases}$$

آنگاه $A \subseteq X$ را متعامد گوییم.
اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $||x|| = ۱$ ، مجموعه A را متعامد یکه گویند.

قضیه ۱.۰.۱ فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد آنگاه به‌ازای هر $x,y \in X$ داریم:

الف) (نامساوی کوشی-شوارتز)[1] $| < x,y > | \leq ||x|| ||y||$

ب) (نامساوی مثلث) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

ج) (تساوی متساوی الاضلاع) $||x+y||^{2} + ||x-y||^{2} = 2\,||x||^{2} + 2\,||y||^{2}$

تعریف ٦.۰.۱ دنباله $\{u_n\}$ را در فضای خطی نرمدار به عنصر u از این فضا همگرا گوییم هرگاه:

$$\forall \varepsilon > 0 \;, \exists \; n_{0} \in \mathbb{N}, \; \forall n > n_{0} \; ; \;\; ||\, u_n - u|| < \varepsilon.$$

در صورت همگرایی u_n به u می‌نویسیم :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = u.$$

تعریف ۷.۰.۱ فضای نرمدار X را یک فضای باناخ [2] گوییم هرگاه نسبت به متریک تولید شده به وسیله نرم فضایی کامل باشد.

تعریف ۸.۰.۱ فضای متشکل از توابع اندازه پذیر f تعریف شده روی بازه‌ی $[a,b]$ بقسمی که

$$\int_a^b |f(t)| dt < +\infty,$$

---

[1] $kushi - showartz$

[2] $Banach$

برای $1 \leq P < \infty$ را با نماد $L^P([a,b])$ یا L^P نشان می دهیم و برای هر $f \in L^P([a,b])$ قرار می دهیم:

$$||f||_P = (\int_a^b |f(t)|^P \, dt)^{\frac{1}{P}} .$$

نگاشت فوق یک نرم روی L^P است و L^P یک فضای باناخ است. (ریتز– فیشر) [3]

تعریف ۹.۰.۱ اگر $k(x,y)$ تابعی در $L^2(a,b) \times (a,b)$ باشد آنگاه تابع

$$\|k\|_2 = (\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dxdy)^{\frac{1}{2}},$$

یک نرم است.

تعریف ۱۰.۰.۱ فرض کنیم A یک مجموعه و $f : A \to \mathbb{R}$ تعریف شده باشد آنگاه f دارای محمل فشرده است هرگاه:

$$B = supp\{f(x)\} = \overline{\{x : f(x) \neq 0, x \in A\}},$$

که در آن مجموعه‌ی B یک مجموعه‌ی فشرده است.

تعریف ۱۱.۰.۱ سری $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$ در یک فضای خطی نرمدار دارای مجموع s گفته می‌شود هرگاه s متعلق به این فضا بوده و دنباله‌ی مجموعهای جزیی آن نیز به s همگرا باشد در این صورت می‌نویسیم:

$$s = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i .$$

سری $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} u_i$ را همگرای مطلق گوییم هرگاه: $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \|u_i\| < \infty$.

[3] $Ritz - Fisher$

لم ۱.۰.۱ اگر $\lambda_n \to \lambda$ و $u_n \to u$ آنگاه $\lambda_n u_n \to \lambda u$.

لم ۲.۰.۱ اگر $\lambda_n \to \lambda$ و $u_n \to u$ آنگاه $\lambda_n + u_n \to \lambda + u$.

لم ۳.۰.۱ اگر $\lambda_n \to \lambda$ و $u_n \to u$ آنگاه $(u_n, \lambda_n) \to (u, \lambda)$.

لم ۴.۰.۱ اگر $u_n \to u$ آنگاه $\|u_n\| \to \|u\|$.

تعریف ۱۲.۰.۱ دنباله توابع $\{u_n\}$ در L^2 را همگرای یکنواخت نسبی به تابع u گوییم ومی‌نویسیم $u_n \to u$ هرگاه تابع نامنفی $p(x) \in L^2$ موجود باشد به طوریکه:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, x (n \geqslant n_0) \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon p(x).$$

اگردوطرف نامساوی فوق را به توان رسانده، انتگرال بگیریم داریم:

$$\int_a^b |u_n(x) - u(x)|^2 dx \leqslant \varepsilon^2 \int_a^b |p(x)|^2 \, dx,$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\|u_n(x) - u(x)\| \leqslant \varepsilon \, \|p\| \, .$$

نتیجه ۱.۱ همگرایی یکنواخت، همگرایی یکنواخت نسبی را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن مصداق ندارد.

نتیجه ۲.۱ اگر دنباله‌ای ، همگرایی یکنواخت نسبی داشته باشد آنگاه نقطه به نقطه همگراست.

تعریف ۱۳.۰.۱ دنباله‌ی توابع $\{u_n\}$ در L^2 را یک دنباله‌ی کوشی گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{n,m\to+\infty}\|u_n(x)-u_m(x)\|=0$$

قضیه ۲.۰.۱ فضای نرمدار خطی X کامل است اگروتنها اگر هر سری همگرای مطلق در آن همگرا باشد.

تعریف ۱۴.۰.۱ فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت[4] گوییم هرگاه H نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی یک فضای باناخ باشد.

مثال ۱.۱ فضای L^2 با ضرب داخلی $<u,v>=\int_a^b \overline{v(t)}u(t)dt$ یک فضای هیلبرت است.

---

[4] $Hilbert$

قضیه ۳.۰.۱ اگر A یک زیر مجموعه متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد آنگاه سری فوریه‌ی[۵] $\sum_{x\in A} <y,x> x$ مستقل از ترتیب جملات همگراست.

تعریف ۱۵.۰.۱ اگر X فضای ضرب داخلی و A زیر مجموعه‌ای از X باشد آنگاه A را کامل گوییم هرگاه:

$$A^{\perp} = \{y \in X| <x,y>= 0, \forall x \in A\} = \{0\}$$

تعریف ۱۶.۰.۱ اگر X یک فضای ضرب داخلی و A یک زیر مجموعه متعامد یکه از X باشد آنگاه A را یک پایه‌ی متعامد یکه برای X گوییم هرگاه به‌ازای هر $y \in X$ داشته باشیم:

$$y \doteq \sum_{x\in A} <y,x> x$$

که در آن $\doteq$ به مفهوم تقریبا همه جا می‌باشد.

قضیه ۴.۰.۱ اگر A یک زیر مجموعه‌ی متعامد یکه از فضای هیلبرت H باشد آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

۱) (اتحاد پارسوال)[۶] برای هر $y \in H$، $\|y\|^2 = \sum_{x\in A} \|<y,x>\|^2$.

۲) A کامل است.

۳) A یک پایه‌ی متعامد یکه است.

---

[۵] $Fourier$

[۶] $Parseval$

با توجه به این قضیه اگر A یک زیر مجموعه متعامد یکه‌ی کامل از فضای هیلبرت H باشد آنگاه هر عنصر $y \in H$ را می توان به صورت سری فوریه‌ی $\sum\limits_{x\in A} < y, x > x$ بسط داد که سری فوریه‌ی مذکور به y همگراست.

تعریف ۱.۰.۱۷ یک دنباله توابع $\{u_n\}$ در $L^۲$ متعامداند هرگاه:

$$< u_i, u_j >= \begin{cases} ۰ \quad ; & i \neq j, \\ \alpha_j > ۰ \ ; & i = j. \end{cases}$$

بعلاوه اگر برای هر i ، $\|u_i\| = ۱$ آنگاه دنباله$\{u_n\}$ را متعامد نرمال گوییم.

قبلاً در فضای $L^۲$ ضرب داخلی را تعریف کردیم . حال ضرب داخلی وزندار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$< u_۱, u_۲ >= \int_a^b w u_۱ \overline{u_۲},$$

که‌در آن w تابع وزن نام دارد.

لم ۱.۰.۵ اگر$\{u_n\}$ یک سیستم متعامد نرمال از توابع $L^۲$ باشند آنگاه این سیستم متعامد مستقل خطی است.

قضیه ۱.۰.۵ اگر$\{|u_i|\}_{i=۱}^n$ یک دنباله متعامد در $L^۲$ باشد آنگاه:

$$\forall u \in L^۲, \sum_{i=۱}^n |< u, u_i >|^۲ \leqslant \|u\|^۲ .$$

نامساوی فوق نامساوی بسل[۷] نام دارد.

---

[۷] $Bessel$

قضیه ۶.۰.۱ اگر $\{u_i\}$ یک دنباله متعامد (متناهی یا نامتناهی) در L^2 باشد و $u \in L^2$ آنگاه:

۱) $\{u_i | <u, u_i> \neq 0\}$ شمارش پذیر است.

۲) $\sum\limits_i |<u, u_i>|^2 \leqslant \|u\|^2$ (نامساوی بسل)

مجموع سمت چپ در قسمت دوم قضیه بالا یک مجموع شمارش پذیر است.

تعریف ۱۸.۰.۱ هرگاه $\{u_n\}$ یک سیستم متعامد نرمال از توابع در L^2 باشد و $u \in L^2$ باشد آنگاه به سری $\sum\limits_{i=1}^{\infty} <u, u_i> u$ سری فوریه‌ی u گوئیم.

تعریف ۱۹.۰.۱ دستگاه متعامد نرمال $\{u_i\}$ را یک دستگاه متعامد نرمال کامل گوییم هرگاه هیچ دستگاه متعامد نرمال وسیعتر از آن وجود نداشته باشد یعنی:

$$\exists u : \forall i \ :<u, u_i>= 0 \Rightarrow u = 0.$$

فصل ۲

معادلات انتگرال

در این فصل به معرفی معادلات انتگرال می‌پردازیم . سپس آنها را دسته‌بندی کرده و در آخر به معرفی انواع هسته می‌پردازیم [۱۰—۹].

تعریف ۲.۰.۰۲ معادله‌ای که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال است را معادله انتگرال می‌نامیم که به شکل زیر می‌باشد:

$$f(x) = \lambda \int_D k(x, y, f(y))dy + g(x).$$

در این معادله λ یک پارامتر مخالف صفر است. در حالت کلی $\lambda \in \mathbb{C}$ و $k(x,y)$ را هسته معادله انتگرال و $g(x)$ را تابع سمت راست گویند. تابع f نیز مجهول است.

۱.۲ دسته بندی معادلات انتگرال

با توجه به گستردگی معادلات انتگرال و کاربردهای وسیع آن تقسیم‌بندی این معادلات ضرورت پیدا می‌کند.
دسته بندی این معادلات بر حسب منفرد بودن یا نبودن هسته و تابع مجهول زیر علامت انتگرال و حد متغیر مورد نظر در انتگرال‌گیری و وجود یا عدم وجود تابع مجهول خارج علامت انتگرال‌گیری انجام می‌گیرد.

معادلات را به دو نوع عمده تقسیم می‌کنیم:
نوع اول: معادلات انتگرال‌ای هستند که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال‌گیری به صورت خطی ظاهر می‌شود، که به آنها معادلات انتگرال خطی می‌گویند. شکل کلی آنها به صورت زیر است:

$$h(x)f(x) = g(x) + \lambda \int_D k(x,y)f(y)dy, \qquad (۱)$$

نوع دوم : معادلات انتگرال‌ای هستند که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال‌گیری به صورت غیرخطی ظاهر می‌شود، که به آنها معادلات انتگرال غیرخطی می‌گویند. شکل کلی آنها به صورت زیر است:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_D F(x,y,f(y))dy, \qquad (۲)$$

که در آن $F(x,y,f(y))$ نسبت به $f(y)$ تابعی غیرخطی است. به عنوان مثال معادله $\int_0^1 \sqrt{x}\, f^3(y)dy = f(x)$ غیرخطی است.
معادله (۱) دارای حالات زیر می‌باشد:

۱) معادلات انتگرال‌ای که در آنها دامنه انتگرال‌گیری ثابت است. این معادلات به معادلات انتگرال فردهلم مشهوراند و به دو نوع زیر تقسیم می‌شوند:

الف) معادله انتگرال فردهلم نوع اول:
اگر در معادله (۱)، $h(x) \equiv 0$ آنگاه معادله انتگرال فردهلم حاصل را نوع اول می‌نامند. پس داریم:

$$g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)f(y)dy = 0.$$

ب) معادله انتگرال فردهلم نوع دوم:
اگر در معادله (۱)، $h(x) \equiv 1$ آنگاه معادله انتگرال فردهلم حاصل را نوع دوم می

نامند. پس داریم:

$$g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)f(y)dy = f(x).$$

۲) معادلات انتگرال‌ای که در آنها دامنه انتگرال‌گیری متغیراست به معادلات انتگرال ولترا مشهوراند. معادلات انتگرال ولترای نوع اول و دوم مانند فردهلم تعریف می‌شود . با این تفاوت که به جای b ازمتغیر x استفاده می‌شود.

۳) اگر درمعادله فوق $g(x) \equiv ۰$ معادله انتگرال را همگن (متجانس) می نامند.

۴) معادلات انتگرال منفرد: منفرد بودن معادلات انتگرال فردهلم و ولترا دارای چند حالت استاندارد است.

الف) هرگاه بازه‌ی انتگرال‌گیری نامتناهی یا نیمه‌متناهی باشد:

$$u(x) = ۲x + ٦ \int_۰^\infty sin(x-t)u(t)dt.$$

ب) مشتق هسته ناپیوسته باشد. تابع هسته گرین[1] جزء این دسته می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k(x,y) = \begin{cases} y\frac{d-x}{d}; & ۰ \le y \le x \le d, \\ x\frac{d-y}{d}; & ۰ \le x \le y \le d. \end{cases}$$

ج) اگر هسته در یک نقطه یا در نقاط بیشتری از دامنه انتگرال‌گیری نامتناهی باشد. مانند:

$$x^۲ = \int_۰^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}}dt.$$

---

[1] $Green's$