بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

دانشکده علوم

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

خاصیت $P(k,n)$ برای جبر توابع پیوسته حقیقی

استاد راهنما:

دکتر فریبا ارشاد

استاد مشاور:

دکتر بهمن یوسفی

نگارش:

مهدی عباسی

شهریور ۱۳۸۹

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه /رساله

پایان نامه تحت عنوان : خاصیت$P(k,n)$ برای جبرتوابع پیوسته حقیقی

که توسط مهدی عباسی در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد.

تاریخ دفاع: ۸۹/۶/۲۹ نمره: ۱۸/۵ درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران:	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکترفریبا ارشاد	استادیار	ارشاد
۲- استاد مشاور	دکتربهمن یوسفی	استاد	
۳- استاد داور	دکتراحمدخاکساری	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکترمحبوبه حسین یزدی	استادیار	

تقدیم به:

استاد بزرگوارم خانم دکترارشاد که تعهدومسئولیت پذیری را از ایشان آموختم.

و

پدر و مادر عزیزم که قامتشان خمیده شد. تا استوار بمانم.

سپاسگزاری

خدای متعال راشاکرم که توفیق اتمام مرحله ای دیگر از دوران تحصیل به من عطا فرمود.دراین جا بر خود واجب می دانم که از استاد گرامی سرکارخانم دکتر فریباارشاد که با پیشنهادو راهنمایی هایشان این راه را بر من آسان نمودند صمیمانه تقدیروتشکرنمایم برای ایشان وخانواده محترمشان آرزوی سلامتی و کامیابی داشته باشم. لازم می دانم از استاد ارجمند جناب آقای دکتر بهمن یوسفی که استادومشاور در این پایان نامه بودند، نهایت تقدیروتشکربه عمل آورم.

چکیده

خاصیت$P(k,n)$برای جبرتوابع پیوسته حقیقی

مهدی عباسی

قضیه گلیسون-کاهانه-زلازکو(G-K-Z)وتعمیم های آن درسالهای اخیر،موردبحث ریاضیدانان بسیاری بوده است.دراین پایان نامه،تعمیمی ازاین قضیه بر$ReC(X)$،وقتیXیک فضای هاسدورف فشرده است،بیان می شود.درفصل اول این پایان نامه،مطالب مقدماتی وقضایای موردنیازراآورده ایم.دربخش اول ازفصل دوم، بعدازمعرفی قضیه(G-K-Z)،به بیان واثبات قضایایی معادل باآن پرداخته ایم.دربخش دوم این فصل نیز ابتدا خاصیت$P(k,n)$رامعرفی کرده ایم وسپس ارتباط قضیهG-K-Zرابااین خاصیت بیان کرده ایم.درفصل سوم که درسه بخش تنظیم شده به بررسی خاصیت$P(k,n)$روی$R(X)$،$C(X)$و$ReC(X)$پرداخته ایم .

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول

مقدمات و قضایای مورد نیاز

۱-۱ جبرباناخ

۱-۱-۱تعریف: یک جبر مختلط A، یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است با یک ضرب که دارای ویژگیهای زیر باشد :

برای هر $x,y,z \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$

$$x(yz) = (xy)z$$

$$(x+y)z = xz + yz$$

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

علاوه بر این اگر A یک فضای باناخ با نرم $\|.\|$ و صادق در

$$\|xy\| \leq \|x\|.\|y\| \ ; x,y \in A$$

باشد، گوییم A یک جبر باناخ مختلط است .

هرگاه در جبر مختلط A ، برای هر $x,y \in A$ داشته باشیم $xy= yx$، آنگاه A را جابجایی گوییم .

۱-۱-۲ چند مثال از جبر باناخ:

الف) $C(X)$ که در آن X یک فضای هاسدورف فشرده است . این فضا با نرم سوپریمم و ضرب نقطه به نقطه توابع ،

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

یک جبرباناخ جابجایی یکدار(تابع ثابت ۱) می باشد . [۱۵،فصل۹]

ب) اگر K یک فضای موضعاً فشرده باشد آنگاه $C_0(K)$، فضای همه توابع پیوسته مختلط روی K که در بینهایت صفر می شوند، (فضای تمام توابع پیوسته f بطوریکه برای هر $\varepsilon > 0$ ، مجموعه؛

$$\{x: x\in K, |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

فشرده است)با نرم سوپریمم، یک جبر باناخ غیر یکدار است مگر اینکه K فشرده باشد . [۱،فصل۳]

پ) فرض کنیدکهX یک فضای باناخ باشد،آنگاه$L(X)$ ،جبر همه عملگرهای خطی کراندار رویX بانرم معمول عملگرها، یک جبر باناخ یکدار است .

ت) اگرX یک فضای متناهی البعد با $\dim X = n$ باشدآنگاه $L(X)$ می تواند با $M_n(\mathbb{C})$ یکی شود . اگر $\dim X > 1$ آنگاه $L(X)$ جابجایی نیست .

ث) ساده ترین جبر باناخ ناجابجایی$L(H)$ است کهH یک فضای هیلبرت با بعد نامتناهی است .

ج)$\mathbb{C}$ ساده ترین جبر باناخ جابجایی است .

۱-۱-۳ تعریف: گوییم زیرمجموعهI ازجبرمختلط جابجایی A یک ایده آل است اگر در شرایط زیر صدق کند :

۱- I زیر فضایA(به مفهوم فضای برداری) باشد .

۲- هرگاه$x \in A$, $y \in I$ آنگاه $xy \in I$.

اگر$I \neq A$ آنگاهI را یک ایده آل حقیقی می نامیم .

ایده آلهای ماکسیمال،ایده آلهایی حقیقی اند که در هیچ ایده آل حقیقی بزرگتر قرار ندارند .

۱-۱-۴ توجه: هیچ ایده آل حقیقی شامل یک عنصر وارون پذیر نیست .

شایان ذکراست که ازیک جبرباناخ می توان یک جبر باناخ دیگرساخت . درمثال۱-۱-۵ مثالی دراین خصوص آورده شده است .

۱-۱-۵ مثال: فرض کنید I یک ایده آل دوطرفه بسته ازجبر باناخA باشدآنگاه $\frac{A}{I}$ یک فضای باناخ با نرم

$$|||\dot{x}||| = \inf_{u \in I} \|x + u\|$$

است. در اینجا $\dot{x}$ ، هم مجموعه$x + I$ می باشد .

با این نرم می توان تحقیق کرد$\frac{A}{I}$ یک جبر باناخ است. این فضا را جبر خارج قسمتیA بوسیله ایده آل دو طرفهI می نامیم . زیرا برای هر $u, v \in I$:

$$|||\dot{x}+\dot{y}||| = |||(x\dot{+}y)+I||| \leq ||x+y+u+v|| \leq ||x+u|| + ||y+v||$$

$$|||\dot{x}.\dot{y}||| \leq ||xy+xv+uy+uv|| = ||(x+u)(y+v)|| \leq ||x+u||.||y+v||$$

بنابراین با گرفتن inf از طرفین در بالا بدست می آوریم

$$|||\dot{x}+\dot{y}||| \leq |||\dot{x}||| + |||\dot{y}|||$$

$$|||\dot{x}.\dot{y}||| \leq |||\dot{x}|||.|||\dot{y}|||$$

در حالت خاص اگر A یکدار باشد آنگاه

$$|||\dot{1}||| = |||\dot{1}^2||| \leq |||\dot{1}|||.|||\dot{1}|||$$

$$1 \leq |||\dot{1}||| \leq ||1|| = 1$$

$$|||\dot{1}||| = 1$$

[۱،فصل۳].

۱-۱-۶ تعریف: (زیر فضای با همبعد متناهی)

اگر A یک جبر باناخ باشد زیر فضای M از A با همبعد متناهی است هرگاه $\dim\frac{A}{M} < \infty$.اگر $\dim\frac{A}{M} = n$ آنگاه می نویسیم codim M=n و n را همبعد M می نامیم .

۱-۱-۷ تعریف: فضای تمام توابع خطی وکراندارازA به میدان اسکالر را با A^* نمایش می دهیم . هر عضو A^* یک تابعک خطی نامیده می شود .

۱-۱-۸ قضیه: اگرXیک فضای نرمدارباشد،Mیک زیرفضای بستهXوNیک زیرفضای متناهی البعد ازX باشد، آنگاه M+N یک زیرفضای بسته ازX است . [۵،فصل۳]

۱-۱-۹ قضیه:(هان باناخ)

اگرX یک فضای نرمدار،Mیک زیرفضایX،و $f:M\longrightarrow \mathbb{F}$ یک تابعک خطی کراندارباشد،آنگاه یک F در X^* وجود دارد بطوریکه $F|M=f$ و $||F|| = ||f||$. [۵،فصل۳]

۱-۱-۱۰نتیجه: اگر X یک فضای نرمدار باشد، M زیرفضای بسته‌X ، $x_0 \in X\setminus M$ و $d = \mathrm{dist}(x_0, M)$، آنگاه یک f در X^* وجود دارد بطوریکه برای هر x در M، $f(x)=0$، $f(x_0)=1$و $\|f\| = d^{-1}$. [۵،فصل۳]

۱-۱-۱۱ قضیه: فرض کنیم A یک جبرباناخ وMیک زیر فضای بسته A باهمبعدnباشددراین

صورت تابعکهای خطی $F_1,\dots F_n$روی A موجودند بطوریکه :

$$M = \bigcap_{i=1}^{n} \ker F_i$$

اثبات: طبق فرض قضیه داریم که$\mathrm{codim}\ M=n$بنابراین فرض می کنیم که

$$f_1 +M , f_2 +M,\dots, f_n +M \qquad f_i \in A \ , \ i=1,2,\dots,n$$

پایه برای فضای برداری $\frac{A}{M}$ باشند. چونM یک زیر فضای بستهA می باشد پس برای هر $i\in \{1,2,\dots,n\}$،

$$M_i = M+<f_1,\dots,f_{i-1} , f_{i+1} ,\dots,f_n> \qquad (*)$$

بسته است.(طبق قضیه۱-۱-۸) همچنین $f_i \notin M_i$ ؛در غیر اینصورت اگر $f_i \in M_i$ آنگاه

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} , \alpha_{i+1} , \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \ , m \in M$$

وجود دارند بطوریکه

$$f_i = m +\alpha_1 f_1 +\dots+\alpha_{i-1} f_{i-1} + \alpha_{i+1} f_{i+1} +\dots+\alpha_n f_n$$

و درنتیجه

$$f_i +M =\alpha_1 (f_1 +M)+\dots+ \alpha_{i-1}(f_{i-1}+M)+ \alpha_{i+1}(f_{i+1}+M)+ \dots +\alpha_n (f_n +M)$$

که چون توانستیم بردار$f_i +M$ را به صورت ترکیب خطی از دیگر بردارها بنویسیم این تناقض بامستقل خطی بودن مجموعه $\{f_1 +M , f_2 +M,\dots, f_n +M\}$دارد .بنابراین (طبق قضیه ۱-۱-۱۰) n تابعک خطی $F_1,F_2,\dots F_n$روی A هست که برای هر$i\in \{1,2, \dots , n\}$،

$$F_i(f_i)= 1$$

و

$$F_i(M_i)=0 \qquad (**)$$

حال نشان می دهیم

$$M=\bigcap_{i=1}^{n}\ker F_i$$

چون به ازای هر i طبق(**) داریم :

$$F_i(M_i)=0$$

و طبق(*) داریم که

$$M_i = M+\langle f_1,\dots,f_{i-1}, f_{i+1},\dots,f_n\rangle$$

درنتیجه داریم که $M\subseteq M_i$ وبنابراین به ازای هر $i\in\{1,2,\dots,n\}$ داریم

$$F_i(M)=0$$

پس

$$M\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}\ker F_i$$

فرض کنیم

$$f\in\bigcap_{i=1}^{n}\ker F_i$$

بنابراین می توانیم $f+M$ را به صورت ترکیب خطی از اعضای پایه $\frac{A}{M}$ بنویسیم .

بنابراین $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ وجود دارند بطوریکه

$$f+m=(\alpha_1 f_1+\dots+\alpha_n f_n)+M \qquad (***)$$

پس برای هر $i\in\{1,2,\dots,n\}$ طبق(**)

$$f-(\alpha_1 f_1+\dots+\alpha_n f_n)\in M\subset M_i\subset \ker F_i$$

بنابراین برای $i\in\{1,2,\dots,n\}$،

$$F_i(\alpha_1 f_1+\dots+\alpha_n f_n-f)=0$$

در نتیجه به دلیل خطی بودن F_i ها

$$\alpha_1 F_i(f_1)+\dots+\alpha_i F_i(f_i)+\alpha_{i+1}F_i(f_{i+1})+\dots+\alpha_n F_i(f_n)-F_i(f)=0$$

اما،
$$F_i(f_j)=\begin{Bmatrix}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{Bmatrix}$$

وطبق فرض چون

$$f\in\bigcap_{i=1}^{n}\ker F_i$$

بنابراین برای هر $i\in\{1,2,\dots,n\}$، $\alpha_i=0$.

درنتیجه:
$$\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$$

و طبق رابطه(***) داریم

$$f+M=(\alpha_1 f_1+\dots+\alpha_n f_n)+M=M\rightarrow f\in M$$

بنابراین

$$\bigcap_{i=1}^{n}\ker F_i\subseteq M\quad.\ \blacksquare$$

۱-۱-۱۲ تعریف: رادیکال یک جبرباناخ تعویض پذیر،اشتراک ایده آلهای ماکسیمال آن است. رادیکال جبر باناخ A را با نماد $rad(A)$ نمایش می دهیم. [۱،فصل۳]

۱-۱-۱۳ تعریف: فضای A نیم ساده است هرگاه $rad(A)=\{0\}$.

۱-۱-۱۴ قضیه: فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار و $x\in A$ بطوریکه $\|x\| < 1$،دراین صورت $1-x$ وارون پذیر است و

$$(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad .$$

اثبات: فرض کنید $\|x\| = r < 1$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

بنابراین برای $m>n$ داریم

$$\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} x^k\right\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|x^k\| \le \sum_{k=n+1}^{m} \|x\|^k < \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

بنابراین وقتی $n\to\infty$داریم که $\|S_n - S_m\| \to 0$پس $\{S_n\}$ یک دنباله کوشی در جبر باناخAاست وچون هر دنباله کوشی در فضای باناخ A همگراست بنابراین دنباله$\{S_n\}$ همگرا به عضوی مانند

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

است.چون

$$xS_n = S_{n+1} - 1$$

و وقتی که $n\to\infty$ ، $S_n\to a$ و $S_{n+1}\to a$ ، بنابراین داریم

$$xa = a-1 \Longrightarrow a(1-x) = (1-x)a=1 \quad . ∎$$

و به همین ترتیب می توان ثابت کرد که $1+x$ نیز وارون پذیر است و

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad .$$

۱-۱-۱۵ نتیجه:اشتراک هر ایده آل حقیقی یک جبر باناخ یکدار جابجایی A باگوی باز به مرکز۱و شعاع۱تهی است.بنابراین هر ایده آل ماکسیمالA بسته است به ویژه $rad(A)$ بسته است. بنابراین $\frac{A}{rad(A)}$ یک جبر باناخ نیم ساده است.

اثبات: فرض می کنیم L یک ایده آل ماکسیمال A باشدآنگاه L شامل هیچ عضو وارون پذیری نیست. چون اگر$a\in L$ وارون پذیر باشدآنگاهa^{-1}عضوی ازA است. پس داریم که

$$a^{-1}a\in L \Longrightarrow 1 \in L \Longrightarrow \forall x \in A , 1.x \in L \Longrightarrow L = A$$

و این تناقض است با اینکه L یک ایده آل ماکسیمال است.

بنابراین طبق قضیه قبل اشتراک Lباگوی باز به مرکز۱وشعاع۱، تهی است.

چون A یک جبر باناخ است و L یک ایده آل ماکسیمال ازA است پس $\bar{L}$ نیزیک ایده آل حقیقیA است (چون اگر$\bar{L} = A$ آنگاه $1 \in \bar{L}$و در نتیجه $\{x_n\} \subset L$ موجود است که $\|x_n - 1\| < 1$ و بنابراین x_n وارون پذیراست ودرنتیجه $L = A$) .

همچنین داریم که$L \subseteq \bar{L}$ وچون L یک ایده آل ماکسیمال است، نتیجه می دهد که $L = \bar{L}$ پس L بسته است وچون $rad(A)$ اشتراک ایده آل های ماکسیمال A است پس $rad(A)$ نیز بسته است و همچنین داریم که A یک جبر باناخ جابجایی است و$rad(A)$ یک ایده آل بسته ازA است بنابراین $\frac{A}{rad(A)}$ یک جبر باناخ جابجایی است وداریم$rad(\frac{A}{rad(A)})=\{0\}$. پس این جبر نیم ساده هم می باشد .∎

۱-۱-۱۶ نکته:ازاین قسمت به بعدمنظورازA یک جبرباناخ یکدار است .

۱-۱-۱۷ تعریف: طیف عنصر$x\in A$ رامجموعه تمام اعدادمختلط λ درنظرمی گیریم که$x-\lambda.1$ وارون پذیرنباشد. طیف x را با $\sigma(x)$ نشان می دهیم .

۱-۱-۱۸ تعریف(شعاع طیفی): شعاع کوچکترین قرص بسته ای به مرکز مبدا است که شامل $\sigma(x)$ می باشد وگاهی این عدد را نرم طیفی x نیز می نامند و با $\rho(x)$ نمایش می دهند .

$$\rho(x)= \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(x)\}$$

۱-۱-۱۹ نتیجه: اگر G رامجموعه تمام عناصر وارون پذیر جبرباناخ مختلط A بنامیم دراین صورت به ازای هر$x\in A$، اگر$\lambda \in \sigma(x)$ آنگاه

$$|\lambda| \leq \|x\|$$

اثبات: فرض می کنیم که$\lambda \in \sigma(x)$ و$|\lambda| > \|x\|$ آنگاه بنابر قضیه (۱-۱-۱۴)،

$$۱-\lambda^{-1}x \in G \quad (\text{چون } \left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1)$$

وهمین امر برای

$$x - \lambda.1 = -\lambda(1-\lambda^{-1}x)$$

درست است لذا $\lambda \notin \sigma(x)$ و این تناقض با فرض است . ∎

۱-۱-۲۰ تبصره: برای هر $x\in A$ ، $\sigma(x)$ فشرده و ناتهی است . [۱۵،فصل۱۸]

۱-۲ تابعکهای خطی ضربی

۱-۲-۱ تعریف: اگرA وB دوجبرمختلط باشند نگاشت خطی $\varphi: A \to B$ خطی ضربی است اگر به ازای هر $x,y\in A$ ،

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

هر گاه$B=\mathbb{C}$،آنگاه φ را تابعک خطی ضربی می نامیم .

۱-۲-۲ مثال: برای هر$x\in[0,1]$ تابعک χ_x با ضابطه

$$\chi_x(f) = f(x)$$

یک تابعک خطی ضربی کراندار روی $C([0,1])$ است .

- ممکن است جبرمختلط A، تابعک خطی ضربی نداشته باشد مانند$M_n(\mathbb{C})$ $(n\geq 1)$ یا $L(H)$، وقتی که H یک فضای هیلبرت است . [۱،فصل۳]

۱-۲-۳ نکته: فرض کنید A یک جبر باناخ یکدار وχ یک تابعک خطی ضربی روی آن باشد.اگر $\chi \not\equiv 0$ آنگاه$\chi(1) = 1$. چون

$$\chi(x) = \chi(x.1) = \chi(x).\chi(1)$$

$$\chi(1) = \frac{\chi(x)}{\chi(x)} = 1 \quad .$$

همچنین می توان نشان داد که برای هر$x \in A$

$$\chi(x) \in \sigma(x) \quad .$$

برای اثبات این ادعا فرض کنیدکه $x \in A$ وجودداشته باشدکه $\chi(x) \notin \sigma(x)$.

بنابراین $x-\chi(x)1$ وارون پذیراست . فرض کنید که y وارون$(x-\chi(x)1)$ باشد. بنابراین

$$(x-\chi(x)1)y = y(x-\chi(x)1) = 1 \quad . \qquad (*)$$

باتوجه به اینکه

$$\chi(x-\chi(x)1) = \chi(x) - \chi(x)\chi(1) = 0$$

پس بایدِ$\chi(1) = 0$ واین امرامکان پذیرنیست.بنابراین برای هر $x \in A$ داریم

$$|\chi(x)| \leq \rho(x) \leq \|x\| \, ,$$

وبنابراین

$$\|\chi\| \leq 1 \quad .$$

از طرفی

$$\|\chi\| \geq |\chi(1)| = 1 \quad ,$$

پس

$$\|\chi\| = 1 \quad .$$

(یادآوری: $\|\chi\| = \sup\{|\chi(x)| : \|x\| \leq 1\}$)

۱-۲-۴ قضیه: اگر A یک جبرباناخ باشدآنگاه $\chi \in A^*$ یک تابعک خطی ضربی روی A است اگروفقط اگر برای هر$x\in A$، $\chi(x) \in \sigma(x)$. [۱، فصل۴]

۱-۲-۵ قضیه: اگر A یک جبر باناخ جابجایی باشد، آنگاه:

الف) $\chi \to \ker\chi$، از مجموعه تابعکهای خطی ضربی A به مجموعه ایده آلهای ماکسیمال A دوسویی است.

ب) برای هر $x\in A$، $\sigma(x) = \{\chi(x) :$ تابعک خطی ضربی رویAاست $\chi\}$.

اثبات الف: اگر χ یک تابعک خطی ضربی روی A باشد $\ker \chi$ یک ایده آل ماکسیمال A است. برعکس اگرI یک ایده آل ماکسیمال باشد آنگاه با توجه به اینکهA یک جبر باناخ یکداروجابجایی است، بنابراینI بسته است.علاوه براین $\frac{A}{I}$ یک جبرجابجایی بدون ایده ال نابدیهی است . بنابراین $\frac{A}{I}$ یک میدان است و در نتیجه یک یکریختی مانند

$$\varphi: \frac{A}{I} \to \mathbb{C}$$

وجود دارد. بادرنظرگرفتنχبه صورت ترکیب نگاشت طبیعی π که $\pi: A \to \frac{A}{I}$ وφ ، χ یک تابعک خطی ضربی است و $\ker \chi = I$. اگر

$$\ker\chi_1 = \ker\chi_2$$

آنگاه$\alpha \in \mathbb{C}$ وجودداردکه به ازای هر $x\in A$ ،

$$\chi_1(x) = \alpha\chi_2(x) \ .$$

و چونA جبر باناخ یکدار است ، داریم که

$$\chi_1(1) = \alpha\chi_2(1) \ .$$

بنابراین $\alpha = 1$. پس $\chi_1 = \chi_2$. درنتیجه نگاشت مزبوردوسویی است .

اثبات ب: اگرχ یک تابعک خطی ضربی رویA باشد همانطور که قبلاًنشان دادیم $x - \chi(x)1$ وارون پذیر نیست. پس$\chi(x) \in \sigma(x)$. برعکس اگر $\lambda \in \sigma(x)$ بنابراین$x - \lambda.1$ وارون پذیرنیست،

$(x-\lambda.1)A$ ایده آل است و بنا براین در یک ایده آل ماکسیمال I قراردارد.باتوجه به قسمت (الف) همین قضیه تابعک خطی ضربی χ وجوددارد بطوریکه $I=\ker\chi$. پس

$$((x-\lambda.1)1) \in \ker\chi ,$$

ودرنتیجه

$$\chi((x-\lambda.1)1) = 0 .$$

یعنی

$$\chi(x) - \lambda = 0 .$$

درنتیجه

$$\lambda \in \{\chi(x): \text{است A تابعک خطی ضربی روی } \chi\} .$$

بنابراین

$$\sigma(x) = \{\chi(x): \text{است A تابعک خطی ضربی روی } \chi\} . \blacksquare$$

۱-۲-۶ تبصره: قضیه فوق نشان می دهدکه مجموعه تمام تابعکهای خطی ضربی روی A که با $m(A)$ نشان می دهیم وفضای ایده ال ماکسیمال می نامیم ناتهی است(چون به ازای هر $x\in A$، $\sigma(x)$ ناتهی است) .

۱-۲-۷ قضیه: فرض کنیدK یک مجموعه فشرده و $A=C(K)$ آنگاه $m(A)$ می تواند هم ارز با K باشد .

اثبات: برای هر $x\in K$ تابع $f\to f(x)$ یک تابعک خطی ضربی روی A است این تابع رابانماد χ_x نمایش می دهیم . زیراداریم که

$$\chi_x(f) = f(x) .$$

پس به ازای هر f و g عضو A

$$\chi_x(fg) = (fg)(x) = f(x)g(x) = \chi_x(f).\chi_x(g) .$$