بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی کاربردی

رساله برای دریافت درجه دکتری

رشته ریاضی گرایش کاربردی

روش های تصویری
برای حل معادلات ماتریسی

مؤلف:

فرید صابری موحد

استاد راهنما:

دکتر محمود محسنی مقدم

استاد مشاور:

دکتر عظیم ریواز

دی ماه ۱۳۹۳

این رساله

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه دکتری

به

بخش ریاضی کاربردی-دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو:	فرید صابری موحد	
استاد راهنما:	دکتر محمود محسنی مقدم	(دانشگاه شهیدباهنر کرمان)
استاد مشاور:	دکتر عظیم ریواز	(دانشگاه شهیدباهنر کرمان)
داور ۱:	دکتر نظام الدین مهدوی امیری	(دانشگاه صنعتی شریف)
داور ۲:	دکترعباس سالمی	(دانشگاه شهیدباهنر کرمان)
داور ۳:	دکتر آزیتا تاج الدینی	(دانشگاه شهید باهنر کرمان)
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه:	دکتر عباس مرادیان	
معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده ریاضی و رایانه:	دکتر محمدعلی یعقوبی	

تقدیم به

روان پاک پدربزرگ هایم، همان هایی که یادشان همیشه با من هست

گوهرهای درخشان زندگیم، مادر بزرگ های مهربانم که تکه هایی از وجودم هستند

پدر و مادر نازنینم که عاشقانه دوستشان دارم و بوسه بر دستانشان می زنم

برادر عزیزم فرشاد که همیشه الگویی برای من بوده است

برادر کوچکم فرهاد که همیشه کمکی برای من بوده است

یگانه خواهر مهربان و عزیزم فرزانه

عمو امیر و عمو محمد عزیزم

دوست نازنینم محمدرضا که همچون برادری برای من بوده است

و

سرمایه های جاودان دانشگاه شهید باهنر کرمان

آقای علیرضا افضلی پور و بانو فاخره صبا

تشکر و قدردانی

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می رود ممد حیات است و چون بر می آید مفرح ذات. پس در هر نفس دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب.

بعد از حمد و سپاس خداوند، قصد دارم از همه افرادی که من را در دوره تحصیلی دکتری حمایت کردند تشکر نمایم.

جناب آقای دکتر محسنی مقدم، در همین چند سطر کوتاه، من از کمک ها، راهنمایی ها و نظرات مفید شما و همچنین تصحیح مکرر مقالاتم توسط شما بسیار سپاسگذارم. همواره شخصیت و منش اخلاقی شما استاد بزرگوارم در یاد من خواهد ماند. سپاسگذارم.

جناب آقای دکتر عظیم ریواز، من ۸ سال شاگرد شما بودم. من سپاسگذار راهنمایی ها، نظرات و نکات علمی و شخصیتی مفید شما در تمام این سالها می باشم. همچنین امیدوارم که شاگرد خوبی برای آقای دکتر محسنی مقدم و شما استاد گرامی ام بوده باشم. سپاسگذارم.

بر خود لازم می دارم که از استاد بزرگوارم **سرکار خانم دکتر آزیتا تاج الدینی** تشکر کنم که هیچگاه کمک های ایشان را در زمینه شکل گیری تفکراتم در تهیه مقالات و پایان نامه خود فراموش نمی کنم.

از جناب **آقای دکتر عباس سالمی پاریزی** تشکر فراوان دارم. من هیچگاه شیرینی و لحظات ناب کلاس های درسی ایشان را فراموش نمی کنم. واقعاً یاد عالیجنابان $\limsup$، $\liminf$، $\lim$، حکومت ملوک الطوایفی و سایر مثال ها و داستان های بینظیر ایشان بخیر.

از **جناب آقای دکتر غلامرضا آقاملایی** به خاطر کلاس های آنالیز ماتریسی و همچنین شخصیت اخلاقی ایشان، سپاسگذارم.

از استاد گرامی **سرکار خانم دکتر فاطمه پنجه علی بیک** به خاطر گذراندن یک دوره بی نظیر و طلایی فرصت مطالعاتی در نزد ایشان بسیار سپاسگذارم.

از همه افراد در گروه پارسی‌لاتک بویژه **آقای دکتر احمد موسوی** و **آقای ابوالفضل دیانت** سپاسگذارم.

از دوستان عزیزم، **آقای دکتر حامد ربیعی**، **آقای دکتر داوود حاجی نژاد**، **آقای دکتر امین رفیعی**، **خانم دکتر بهناز طلوع**، **آقای دکتر حمید فاضلی راد**، **مجید خاکشور**، **حسن برسم**، **محسن امیری**، **عابد شهریاری**، **محمودرضا مظاهری**، **سلمان احمدی اصل** و **اصلان عباسلو** متشکرم.

در پایان، از همکاران بخش ریاضی **سرکار خانم باقری**، **سرکار خانم آذریان**، **سرکار خانم نگهدار**، **سرکار خانم کریمی افشار**، **سرکار خانم توفیق**، **سرکار خانم حوا** و **جناب آقای مرتضی شمس الدینی** کمال تشکر و امتنان را دارم.

چکیده

هدف از تحلیل همگرایی یک روش زیر فضای کرایلف، توصیف رفتار نرم خطا و نرم باقیمانده متناظر با این روش بر حسب داده های ورودی مساله داده شده، از قبیل خواص ماتریس دستگاه، اطلاعات سمت راست و حدس اولیه است.

در این رساله، تحلیل همگرایی روش گرادیان مزدوج و روش های Gl-FOM و Gl-GMRES را، به ترتیب، برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ و معادلات ماتریسی $AXB = C$، با ضرایب متقارن معین مثبت، مطالعه می کنیم. برای ساخت یک پایه متعامد یکه برای زیر فضاهای کرایلف متناظر با این روش ها، از الگوریتم لانچوز استفاده می کنیم. به علاوه، از آنجا که روش های Gl-FOM و Gl-GMRES روش های باقیمانده متعامد سراسری و باقیمانده کمینه سراسری هستند، بنابراین در این رساله آنها را، به ترتیب، روش های G-OR-L و G-MR-L می نامیم.

اطلاعات بدست آمده از الگوریتم لانچوز باعث می شود که بتوان عبارات صریح محاسباتی برای توصیف ساختار جواب تقریبی، باقیمانده و خطای متناظر با این روش ها بدست آورد. به ویژه، با استفاده از اطلاعات بدست آمده از الگوریتم لانچوز و اطلاعات طیفی ماتریس های مساله، چند کران بالا برای نرم باقیمانده و خطا متناظر با این روش ها نشان می دهیم. سپس، رفتار همگرایی نرم باقیمانده روش های گرادیان مزدوج و G-OR-L را بررسی می کنیم.

همچنین، رفتار همگرایی بدترین‐حالت روش های G-OR-L و G-MR-L را مطالعه می کنیم. به ویژه اینکه، با استفاده از این رفتار همگرایی، اثبات می کنیم که این روش ها در تعدادی متناهی تکرار همگرا می شوند.

کلمات کلیدی: تحلیل همگرایی، روش گرادیان مزدوج، روش های زیر فضای کرایلف، الگوریتم لانچوز، کران بالا

مقدمه

دستگاه معادلات خطی تنک بزرگ[1] و یا مسایل مقدار ویژه ماتریس تنک بزرگ[2]، بیشترین کاربرد را در علوم و مهندسی دارند. برای مثال، گسسته سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی با روش اجزای محدود و یا روش تفاضل متناهی اغلب منجر به چنین مسایلی می شوند. دستگاه معادلات خطی تنک بزرگ معمولاً با دو دسته روش بررسی می شوند.

روش های مربوط به دسته اول، روش های مستقیم تنک نام دارند که در حقیقت گونه هایی از روش حذفی گاوس هستند. این روش ها از یک طرف، راه کارهایی را برای جایگشت معادلات و مجهولات به منظور یک تجزیه پایدار LU و پرشدگی[3] کوچک در عوامل مثلثی ارایه می دهند، و از طرف دیگر با سازماندهی مناسب اطلاعات و محاسبات موجب استفاده بهینه از امکانات سخت افزاری، که امروزه اغلب شامل رایانه های موازی هستند، می شوند. امروزه، این روش ها از محبوبیت زیادی برخوردار شده اند به طوری که این روش ها با استفاده از پیش شرط های[4] گوناگون، کارایی خیلی خوبی از خود نشان داده اند. برای نمونه، اخیراً با استفاده از محورگیری کلی و پیش شرط ساز AINV، رفیعی [۴۰] دستگاه معادلات خطی ای را بررسی کرد که ماتریس ضرایب آن دارای ۲۷/۰۰۰/۰۰۰ درایه ناصفر بود. به منظور آشنایی بیشتر با بحث پیش شرط سازی، خواننده را به مرجع فوق العاده کامل [۷] ارجاع می دهیم.

دسته دوم، روش های تکراری هستند. روش های تکراری که امروزه برای حل دستگاه های معادلات خطی تنک بزرگ استفاده می شوند، اغلب روش های زیر فضای کرایلف[5] و یا گونه های پیش شرط ساز آنها هستند. روش های زیر فضای کرایلف یکی از قدرتمندترین روش های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی تنک بزرگ هستند. ویژگی های شاخص این روش ها از قبیل حجم ذخیره

---

[1] large sparse linear system of equations [2] large sparse matrix eigenvalue problems [3] fill-in

[4] preconditions [5] Krylov subspace methods

سازی پایین و جواب تقریبی خوب باعث شده اند که این روش ها از مقبولیت بسیار گسترده ای در میان گرایش های مختلف علوم و مهندسی برخودار شوند. کارایی روش های زیر فضای کرایلف به اندازه ای است که با توجه به «اهمیت توسعه و تحقق یافتن علوم و مهندسی در قرن بیستم»، این روش ها به عنوان یکی از ۱۰ الگوریتم برتر در میان روش های عددی قرن بیستم و البته تا به امروز شناخته شده اند [۱۳].

یکی از مهم ترین مباحث مربوط به روش های زیر فضای کرایلف، تحلیل همگرایی[۱] این روش ها است. هدف از تحلیل همگرایی یک روش زیر فضای کرایلف، بررسی رفتار نرم خطا و نرم باقیمانده متناظر با این روش بر حسب داده های ورودی مساله داده شده، از قبیل خواص ماتریس دستگاه، بردار سمت راست و حدس اولیه می باشد.

در این رساله، تحلیل همگرایی روش گرادیان مزدوج را برای حل

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^{n}, \tag{۱}$$

و تحلیل همگرایی روش های زیر فضای کرایلف متعامد سازی کامل سراسری[۲] (Gl-FOM) و روش باقیمانده کمینه تعمیم یافته سراسری[۳] (Gl-GMRES) را برای حل

$$AXB = C, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{s\times s}, C \in \mathbb{R}^{n\times s}, \tag{۲}$$

به طوریکه A و B ماتریس های متقارن معین مثبت[۴] (SPD) هستند، مطالعه می کنیم.

همانطور که بحث خواهد کردیم، از الگوریتم لانچوز[۵] و الگوریتم لانچوز سراسری در ساخت پایه متعامد یکه برای زیر فضاهای کرایلف متناظر با هر یک از این روش ها استفاده می شود. لازم به ذکر است که، از آنجا که روش های Gl-FOM و Gl-GMRES روش های باقیمانده متعامد سراسری و باقیمانده کمینه سراسری هستند، بنابراین در این رساله آنها را، به ترتیب، روش های G-OR-L و G-MR-L می نامیم.

هدف اصلی این رساله، از یک طرف استفاده از اطلاعات تولید شده توسط الگوریتم لانچوز در روش گرادیان مزدوج و روش های G-OR-L و G-MR-L، و از طرف دیگر استفاده از اطلاعات طیفی ماتریس های موجود در دستگاه های (۱) و (۲)، در تحلیل رفتار همگرایی خطا و باقیمانده متناظر با این روش ها می باشد. این رساله در سه فصل تنظیم شده است.

---

[۱] convergence analysis [۲] global full orthogonalization method [۳] global generalized minimal residual method [۴] symmetric positive definite [۵] Lanczos algorithm

در فصل اول، ابتدا به تاریخچه ای مختصر از پیدایش و توسعه روش های زیر فضای کرایلف اشاره می کنیم و سپس، نماد ها، تعریف ها، قضیه ها و الگوریتم های مورد نیاز برای فصل های بعدی معرفی می شوند.

در فصل دوم، تحلیل همگرایی روش گرادیان مزدوج را برای حل (۱) بررسی می کنیم. هدف اصلی ما در این فصل، بدست آوردن چند کران بالا جدید برای نرم خطای این روش است. همچنین، بر اساس ارتباط بین روش گرادیان مزدوج و الگوریتم لانچوز، نشان می دهیم که نتایج بدست آمده به اطلاعات تولید شده توسط الگوریتم لانچوز و اطلاعات طیفی A ارتباط دارند. همچنین، رفتار $A-$نرم خطا نسبی در هر تکرار و رفتار ۲$-$نرم باقیمانده ها را در تکرار های متوالی بررسی می کنیم.

در فصل سوم، تحلیل همگرایی روش های G-OR-L و G-MR-L را برای حل (۲) بررسی می کنیم. چند نتیجه نظری را برای این روش ها، مانند عبارات صریح محاسباتی و کران های بالا برای نرم خطا و باقیمانده ارایه می دهیم. به ویژه، نشان می دهیم که کران های بالا بدست آمده برای خطای روش G-OR-L به ما کمک می کنند تا رفتار نرم فروبنیوس باقیمانده این روش را پیش بینی کنیم. همچنین در این فصل، رفتار همگرایی بدترین‌ـحالت[۱] این روش ها مطالعه می شود.

در انتهای هر فصل، چند مثال عددی را برای نشان دادن کارایی نتایج نظری ارایه شده خواهیم داشت.

به علاوه، مطالب فصل های دوم و سوم این رساله از مراجع [۳۵، ۳۶، ۵۰] گرد آوری شده اند.

بی‌شک این رساله خالی از اشکال نخواهد بود. نظرات اصلاحی همه عزیزان را به دیده منت می‌نهیم و با کمال سپاس و قدردانی مورد استفاده قرار خواهیم داد.

fdsaberi@gmail.com

[۱] worst-case

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فهرست الگوریتم‌ها

فهرست علایم اختصاری

میدان اعداد حقیقی و مختلط	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$
مجموعه بردارهای ستونی و حقیقی $n \times ۱$	$\mathbb{R}^n$
مجموعه ماتریس های حقیقی $n \times s$	$\mathbb{R}^{n\times s}$
بعد فضای برداری $\mathbb{V}$	$\dim(\mathbb{V})$
ماتریس همانی $n \times n$	I_n
ماتریس قطری با درایه های قطری $\{d_۱, \ldots, d_n\}$	$\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$
ماتریس سه قطری با قطر های α, β, γ	$\mathrm{tridiag}(\alpha, \beta, \gamma)$
ستون jام از یک ماتریس همانی	e_j
دترمینان ماتریس A	$\det(A)$
اثر ماتریس A	$\mathrm{trace}(A)$
ترانهاده ماتریس A	A^T
کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A	$\lambda_{\min}(A)$
بزرگترین مقدار ویژه ماتریس A	$\lambda_{\max}(A)$
طیف ماتریس A	$\sigma(A)$
عدد حالت ماتریس A	$\kappa(A)$
برد عددی ماتریس A	$\mathcal{F}(A)$
ترانهاده x و ترانهاده مزدوج x	x^T, x^H
عملگر vec	$\mathrm{vec}(\cdot)$
ضرب داخلی اقلیدسی	$\langle \cdot, \cdot \rangle$

نرم اقلیدسی برداری (۲−نرم برداری) .... $\|\cdot\|_2$

ضرب داخلی فروبنیوس .... $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$

نرم فروبنیوس .... $\|\cdot\|_F$

A−ضرب داخلی بر اساس ماتریس متقارن معین مثبت .... $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$

A−نرم بر اساس ماتریس متقارن معین مثبت .... $\|\cdot\|_A$

(A,B)−ضرب داخلی بر اساس ماتریس های متقارن معین مثبت .... $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(A,B)}$

(A,B)−نرم بر اساس ماتریس های متقارن معین مثبت .... $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(A,B)}$

تعامد بر اساس ضرب داخلی $\langle\cdot,\cdot\rangle$ .... $\perp$

ضرب کرونکر .... $\otimes$

ضرب لوزی بر اساس ضرب داخلی فروبنیوس .... $\diamond$

ضرب لوزی بر اساس (A,B)−ضرب داخلی .... $\diamond_{(A,B)}$

فهرست کلمات اختصاری

روش باقیمانده کمینه	MR
روش باقیمانده کمینه سراسری	Gl-MR
روش باقیمانده کمینه تعمیم یافته	GMRES
روش باقیمانده کمینه تعمیم یافته سراسری	Gl-GMRES
روش باقیمانده متعامد	OR
روش باقیمانده متعامد سراسری	Gl-OR
روش متعامد سازی کامل	FOM
روش متعامد سازی کامل سراسری	Gl-FOM
متقارن معین مثبت	SPD
کران	U
کران بالا	UB

فصل ۱

مفاهیم و پیش نیازهای اولیه

۱ـ۱ روش های زیر فضای کرایلف

همه روش های زیر فضای کرایلف بر سه اصل استوارند [۱، ۱۴، ۱۸، ۳۰، ۴۲، ۵۳، ۵۴]:

(۱) ساخت زیر فضاهای کرایلف متناظر با این روش ها.

(۲) تصویر کردن فضای بزرگتر به یک فضای کوچکتر.

(۳) ساخت پایه مناسب برای زیر فضاهای کرایلف.

زیر فضاهای کرایلف کلاسیک، که در حقیقت وجه مشترک همه روش های زیر فضای کرایلف هستند، برای اولین بار توسط یک ریاضیدان روسی به نام الکسیس نیکولاویچ کرایلف[۱] به صورت زیر تعریف شد [۲۶].

شکل ۱ـ۱ الکسیس نیکولاویچ کرایلف (۱۸۶۳–۱۹۴۵).

تعریف ۱ـ۱ـ۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $v \in \mathbb{R}^n$. زیر فضای کرایلف متناظر با (A, v, m)، که $m \leq n$، به صورت $\mathcal{K}_m(A, v)$ نمایش داده می شود و عبارت است از:

$$\mathcal{K}_m(A, v) := \operatorname{span}\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}.$$

در ادامه، شرحی مختصر از ساز و کار روش های زیر فضای کرایلف ارایه می شود. برای این منظور، دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Ax = b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n, \tag{۱ـ۱}$$

که A یک ماتریس معکوس پذیر می باشد.

[۱] Aleksei Nikolaevich Krylov