دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
گروه ریاضی

پایان نامه دوره دکتری ریاضی محض (توپولوژی)

عنوان :

رابطه‌ی بین $C(X)$ و $C(Y)$ وقتی که Y زیرفضای X است.

استاد راهنما
دکتر علی رضایی علی آباد

استاد مشاور
دکتر فریبرز آذرپناه

نگارش
مهدی بدیعی

شهریورماه ۸۹

تقدیم به دختر عزیزم، مهتا

به نام خدا

از دست و زبان که بر آید   کز عهده‌ی شکرش بدر آید

همیشه در طول زندگی به خاطر زحمات و لطف‌هایی که من کرده‌اند، کسانی شایسته تقدیر و سپاسگذاری بوده‌اند. اما فرصت تشکر و قدردانی از آن‌ها برایم نبوده است. حال که اندک مجالی یافته‌ام بر خودم لازم می‌بینم که در حد امکان از آنان یادی کنم.

از جناب آقای دکتر رضایی علی آباد استاد راهنمایم، به خاطر همه‌ی زحماتی که برایم کشیده‌اند و علاوه بر یک معلم ایشان را دوستی می‌دیدم که همواره در خوشحالی‌ها و ناراحتی‌ها همراهم هستند، سپاسگذاری می‌کنم. همچنین آقایان دکتر آذرپناه استاد مشاورم و دکتر کرمزاده به دلیل زحماتی که در این دوره برای تدریس برای من کشیده‌اند و مشاوره‌هایی که به من کرده‌اند تشکر می‌کنم. همچنین لازم است تقدیر کنم از مشوق اولیه‌ام در رشته‌ی ریاضی، آقای دکتر کوچک‌پور.

از اینجا دست پدر و مادرم را برای همه‌ی زحماتی که برایم کشیده‌اند، می‌بوسم. در این ده سال زندگی مشترک با همسرم همواره به شکلی درگیر زندگی دانشجویی بوده‌ام، پس از همسر مهربانم به دلیل همه‌ی صبر و حوصله همراه با از خودگذشتگی که در این سال‌ها داشته است و محیطی آرام که لازمه‌ی هر مطالعه‌ای است، فراهم کرده است تشکر می‌کنم.

فهرست مطالب

چکیده

نام خانوادگی: بدیعی **نام:** مهدی

عنوان: رابطه‌ی بین $C(X)$ و $C(Y)$ وقتی که Y زیرفضای X است.

استاد راهنما: دکتر علی رضایی علی آباد **استاد مشاور:** دکتر فریبرز آذر پناه

درجه تحصیلی: دکتری (Ph.D.) **رشته:** ریاض محض **گرایش:** توپولوژی

محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز **دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ تحصیلی: شهریور ماه ۱۳۸۹ **تعداد صفحه:** ۹۷

کلید واژه‌ها: z-پالایه، z-ایدآل اول، z°-ایدآل اول، P-فضا، F-فضا، CC-فضا، G_δ-نقطه، رتبه.

در این پایان نامه، روشی را ارائه می‌کنیم که به واسطه‌ی آن یک رابطه بین z-ایدآل‌های اول $C(X)$ و z-ایدآل‌های اول $C(Y)$ می‌یابیم، که در آن Y یک زیرفضای خاص از X است. برای نمونه، اگر $Y = Coz(f)$، برای یک $f \in C(X)$، یک رابطه‌ی دوسویی بین تمام z-ایدآل‌های اول $C(Y)$ و z-ایدآل‌های اول $C(X)$ که شامل f نیستند، می‌یابیم. به علاوه، با بررسی این رابطه‌ها مشخصه‌هایی برای مفاهیم معمول در $C(X)$ ارائه می‌کنیم. به طور مثال

الف) X یک F-فضا است اگر و تنها اگر توسیع تابع همانی $\iota : Y \to X$ به $\Phi : \beta X \to \beta Y$ یک به یک باشد، برای هر زیر فضای z-نشانده‌ی Y.

ب) با فرض این که p یک G_δ-نقطه‌ی نامنفرد در X باشد و $Y = X \setminus \{p\}$، ثابت می‌کنیم گزاره‌های زیر هم ارزند.

۱) $M^p(X)$ شامل z-ایدآل ماکسیمال غیر بدیهی نیست.

۲) p در X یک شبه P-نقطه است.

۳) هر یک از نقاط $\beta Y \setminus Y$ نسبت به Y یک P-نقطه است.

پ) رتبه‌ی نقاط p برابر n است اگر و تنها اگر متمم صفرمجموعه‌های $Y_۱, Y_۲, \cdots, Y_n$ وجود داشته باشند به طوری که

۱) $p \in cl_X Y_i$، برای هر $۱ \leq i \leq n$؛

۲) اگر $i \neq j$، آنگاه $p \notin cl_X(Y_i \cap Y_j)$؛

۳) p نسبت به هر Y_i یک F-نقطه است، برای هر $۱ \leq i \leq n$؛

۴) n بزرگ ترین عدد طبیعی با این خاصیت باشد.

پیش گفتار

این پایان نامه را در سه فصل ارائه کرده‌ایم. در فصل اول به مقدمات لازم در حلقه پرداخته‌ایم. z-ایدآل‌ها و z°-ایدآل‌ها از دل مفاهیم توپولوژیکی وارد مبحث $C(X)$ شده است، اما پس از سال‌ها که تحقیق در این موضوع شده است به این نتیجه رسیده‌ایم که می‌توان این مفاهیم را به طور مستقل در جبر و به عنوان یک مفهوم جبری بررسی کرد. به همین دلیل، پس از بخش اول که به معرفی مفاهیم ابتدایی در جبر اختصاص دارد، در بخش دوم z-ایدآل‌ها و z°-ایدآل‌ها را ابتدا به صورت جبری معرفی کرده‌ایم و خواص اندکی از آن‌ها را در همین بخش نوشته‌ایم. یکی از مفاهیمی که در جبر مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته شده، فضای ایدآل‌های اول مینیمال یک حلقه است که می توان آن‌ها را در کارهای هنریکسون[1]، جریسون[2]، کیست[3] و مونتگومری[4] یافت. مسلماً یکی از سئوالاتی که در این زمینه مطرح شد این بود، که چه وقت فضای ایدآل‌های

---

[1] Henrikson

[2] Jerison

[3] Kist

[4] Montgomery

اول مینیمال فشرده است؟ از طرفی دیگر z°-ایدآل‌های اول مورد مطالعه هستند و از این سو نیز یکی از سئوالاتی که در این زمینه مطرح شد این بود، که چه موقع هر z°-ایدآل اول یک ایدال اول مینیمال است، که این مفاهیم را ابتدا در کارهای رضایی می‌توان پیدا کرد. اما نقطه‌ی تلاقی آن‌ها جایی است که ثابت می‌شود فضای ایدآل‌های اول مینیمال $C(X)$ فشرده است اگر و تنها اگر هر z°-ایدآل اول مینیمال باشد. به همین منظور فضای ایدآل‌های اول مینیمال روی یک حلقه را در بخش سوم این فصل قرار داده‌ایم و خواص آن را تا جایی که هم‌ارزی‌های مربوط به فشردگی فضای ایدآل‌های اول مینیمال مطرح است، بیان کرده‌ایم.

در فصل دوم ابتدا تعریف‌ها و مفاهیم اولیه را که لازمه‌ی کارمان در مباحث توپولوژی و حلقه‌ی توابع است، را متذکر شده‌ایم. پس از آن در بخش دوم، مفاهیم مهم صفرمجموعه‌ها و متمم صفرمجموعه را توضیح داده‌ایم. در بخش سوم خواص z-پالایه‌ها را تا جایی که ممکن بوده است، در حالت کلی‌تر $\mathscr{P}$-پالایه‌ها آورده‌ایم. در بخش چهارم با استفاده از تعاریفی که در فصل قبل برای z-ایدآل‌ها و z°-ایدآل‌ها گفتیم، به تعاریفی می‌رسیم که برای آن‌ها در حلقه‌ی توابع پیوسته داریم. در بررسی حلقه‌ی توابع پیوسته روی زیر فضاها، زیر فضاهای C-نشانده، C^*-نشانده و z-نشانده بسیار مورد توجه هستند، به همین دلیل بخش پنجم را به بررسی خواص این زیرفضاها اختصاص داده‌ایم. در بخش ششم برای این که اندکی با خواص فشرده سازی استون-چک آشنا شویم به طور مختصر روش ساختن این فشردگی سازی را به همراه فشردگی سازی تک نقطه‌ای آورده ایم. در مبحث حلقه‌ی توابع پیوسته، بسیاری از فضاهای توپولوژی

به دلیل خواصی که دارند مورد توجه هستند از آن جمله می‌توان P-فضاها، شبه P-فضاها، تقریباً P-فضاها، تقریباً P-فضاهای ضعیف، F-فضا، CC-فضا و CC-فضای ضعیف نام برد که همه‌ی آن‌ها را به جز CC-فضاها، به معرفی و بررسی اندکی از خواص این فضاها بسنده کرده‌ایم. اما CC-فضاها را تا آن‌جا توضیح داده‌ایم، که نشان دهیم فشردگی $Min(C(X))$ معادل است با این که هر z°-ایدآل اول یک ایدآل اول مینیمال است.

در فصل سوم که غایت کارمان می‌باشد، به بررسی ارتباط بین $C(X)$ و $C(Y)$ می‌پردازیم، که در آن Y زیرفضای X است. این موضوع به طور خاص و تعدادی از ابزارهای لازم برای بررسی آن ابتدا در [۱۵]، توسط کهلز[۵] مورد توجه قرار گرفت. مقاله‌ی [۱۵] به طور خاص به زیرفضاهای $X \setminus \{p\}$ اختصاص دارد، که در آن p یک G_δ-نقطه‌ی نامنفرد است. یک از مطالب مهمی که در آن مقاله می‌بینیم، گزاره‌ی ۳.۲ می‌باشد. پس از آن مندلکر[۶] در [۱۹]، به طور جدی‌تر این توابع را معرفی کرده است. البته در نهایت بحث در آن مقاله به F'-فضاها محدود شده است. در بخش ششم از مقاله‌ی [۲۰]، مونتگومری بار دیگر از این نگاشت‌ها استفاده کرده است. از آن پس دیگر به این مبحث به شکل ویژه نگاه نشده است و هر جا که لازم بوده است، به صورت مختصر و در حالت‌های خاص بررسی شده‌اند. به طور مثال در مقاله‌ی مشترک [۱۱] از هنریکسون، مارتینز[۷]

[۵] Kohls

[۶] Mandelker

[۷] Martinez

و وودز[۸] برای بررسی زیر فضاهای یک شبه P-فضا اندکی مورد توجه قرار گرفته‌اند. ما سعی کرده‌ایم دوباره به این مبحث به طور خاص نگاهی دوباره بیندازیم و این ابزارها را بیشتر مورد بررسی قرار دهیم. به همین دلیل، در بخش اول، ابزارهای لازم را که تعدادی نگاشت می‌باشند و ابتدا کهلز معرفی کننده‌ی تعدادی از آن‌ها بوده است، به شکل عام ارائه کرده‌ایم و به اصطلاح آن تعریف را گسترش داده‌ایم. در بخش دوم خواص این ابزارها در حالت کلی آورده‌ایم. چون این نگاشت‌ها فقط روی زیرفضاهای z-نشانده می‌توانند یک نوع رابطه‌ی دوسویی ایجاد کنند، بخش سوم را به مطالعه‌ی این شکل از زیرفضاها اختصاص داده‌ایم. با استفاده از همین رابطه در این بخش نشان داده‌ایم که فضای X یک F-فضاست اگر وتنها اگر برای هر زیرفضای z-نشانده‌ی Y، نگاشت $\Phi : \beta Y \to \beta X$ یک به یک باشد، که در آن Φ توسیع تابع همانی $\iota : Y \to X$ است. در بخش چهارم توجه خودمان را به زیرفضاهای متمم صفرمجموعه معطوف کرده‌ایم و رابطه‌ای دوسویی بین z-ایدآل‌های (اول) حلقه‌ی $C(Coz(f))$ و z-ایدآل‌های (اول) حلقه‌ی $C(X)$ که شامل f نیستند، می یابیم. در همین بخش با استفاده از این رابطه‌ی دوسویی نتایجی شایان توجه به دست آورده‌ایم. به عنوان یکی از این نتایج، نشان می‌دهیم عکس گزاره‌ی ۲.۳ در [۱۵]، نیز صحیح می‌باشد. همچنین مفهوم z-ایدآل‌های اول ماکسیمال غیر بدیهی را معرفی کرده‌ایم و مشخصه‌هایی برای وجود این ایدآل در حالت خاص ارائه داده‌ایم. در بخش بعدی به سراغ صفر مجموعه‌هایی که z-نشانده هستند، رفته‌ایم و با روشی متفاوت با بخش‌های قبل و بدون استفاده از ابزارهای معرفی

---

[۸] Woods

شده در بخش ابتدایی، نشان داده‌ایم یک رابطه‌ی دوسویی بین z-ایدآل‌های (اول) حلقه‌ی $C(Z(f))$ و z-ایدآل‌های اول $C(X)$ که شامل f هستند وجود دارد، که در آن $Z(f)$ یک صفرمجموعه‌ی z-نشانده در X می‌باشد.

پس از معرفی P-فضاها و F-فضاها، ایده‌ی نقاطی همچون p که ایدآل‌های اول مینیمال شامل O^p متناهی باشد، برای اولین بار در [۱۲]، توسط هنریکسون و ویلسون[۹] با نام FMP-نقطه مطرح شد. در ادامه در [۱۰]، که کار مشترک هنریکسون، لارسون[۱۰]، مارتینز و وودز است، تعداد این ایدآل‌های اول مینیمال مورد توجه قرار گرفت و برای یک FMP-نقطه این تعداد به عنوان رتبه‌ی آن نقطه در نظر گرفته شده است و برای سایر نقاط رتبه را نامتناهی تعریف کرده‌اند. ما در بخش پایانی رساله سعی کرده‌ایم که برای یک سری نقاط که رتبه‌ی نامتناهی دارند نیز رتبه معرفی کنیم. همچنین با استفاده از نتایجی که به دست آورده‌ایم دو قضیه‌ی مهم ارائه داده‌ایم و از آن‌ها نیز نتیجه‌ای جالب نیز پیدا کرده‌ایم.

در این جا لازم است متذکر شویم، هر مفهوم جدیدی که در مبحث حلقه‌ی توابع پیوسته معرفی شود و در آن رابطه‌ای بین z-ایدآل‌های اول وجود داشته باشد، این ابزار می‌توانند وسیله‌ای مناسب برای بررسی خواص زیرفضاهای مورد مطالعه باشند.

---

[۹] Wilson

[۱۰] Larson

فصل ۱

پیش نیازهای جبری

در این فصل به آنچه که در موضوع جبر به آن نیاز داریم، می‌پردازیم. در بخش اول تعریف‌ها، علامت‌ها و قراردادهای اولیه را بیان می‌کنیم. در بخش دوم z-ایدآل‌ها و z°-ایدآل‌ها را به عنوان یک مفهوم جبری معرفی می‌کنیم و در بخش انتهایی این فصل فضای ایدآل‌های اول مینیمال را، از آن جهت که برای توصیف CC-فضاها مهم هستند، می‌آوریم.

۱.۱ علامت‌ها و تعریف‌های اولیه

در این نوشتار، همه‌ی حلقه را تعویض‌پذیر و یکدار و همه‌ی ایدآل‌ها را سره در نظر می‌گیریم، مگر این که خلاف آن را ذکر کنیم. خانواده‌ی تمام ایدآل‌های اول مینیمال و خانواده‌ی تمام ایدآل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را به ترتیب با $Min(R)$ و $Max(R)$ نمایش می‌دهیم و منظورمان از $Min(I)$، برای هر ایدآل I، خانواده‌ی

ایدآل‌های اول مینیمال روی I است. همچنین ایدآل پوچ حلقه‌ی R را به شکل $nil(R)$ معرفی می‌کنیم. حلقه‌ای که ایدآل پوچ آن صفر باشد را حلقه‌ی کاهش یافته می‌خوانیم. واضح است که همواره $\frac{R}{nil(R)}$ یک حلقه‌ی کاهش یافته است. به همین ترتیب رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R را با $Jac(R)$ می‌نویسیم. برای هر زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R، پوچساز S را با $Ann(S)$ نمایش می‌دهیم و اگر $S=\{a\}$ تک عضوی باشد آن را با علامت $Ann(a)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱.۱.۱. اگر R یک حلقه، a عضوی از آن و $P \in Min(R)$، آن‌گاه $a \in P$ اگر و تنها اگر $x \notin P$ وجود داشته باشد که $(ax)^n = 0$، برای یک $n \in \mathbb{N}$.

اثبات. $\Leftarrow$) کافی است نشان دهیم برای یک $x \notin P$، داریم : $a^n x = 0$. گیریم چنین نباشد، پس برای هر $x \notin P$ می‌توان گفت که $a^n x \neq 0$. قرار می‌دهیم

$$S = \{a^n x : n \in \mathbb{N}, x \in R \setminus P\} \cup R \setminus P$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که S یک مجموعه‌ی ضربی بسته است که $S \cap \{0\} = \emptyset$. بنابراین ایدآل اول Q شامل $\{0\}$ وجود دارد به قسمی که $S \cap Q = \emptyset$. به این ترتیب

$$(R \setminus P) \cap Q = \emptyset \qquad \Rightarrow \qquad Q \subseteq P$$

ایدآل اول P مینیمال است، پس $Q = P$. به این ترتیب

$$a \in S \cap P = S \cap Q$$

که نتیجه حاصل یک تناقض است.

$\Rightarrow$) چون $(ax)^n = 0$، پس $ax \in P$ و در نتیجه $a \in P$. □

در ادامه از M_a (P_a) برای نمایش اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال (مینیمال) شامل a استفاده می‌کنیم. واضح است اگر a وارون پذیر (مقسوم علیه صفر) نباشد، آن‌گاه M_a (P_a) برابر تمام R خواهد شد.

لم ۲.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و a و b اعضایی از آن باشند.

الف) $M_a \cap M_b = M_{ab}$.

ب) $M_{a^n} = M_a$، برای هر $n \in \mathbb{N}$.

اثبات. اثبات‌ها ساده هستند. □

لم ۳.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و a و b اعضایی از آن باشند.

الف) $P_a \cap P_b = P_{ab}$.

ب) $P_{a^n} = P_a$، برای هر $n \in \mathbb{N}$.

اثبات. اثبات‌ها ساده هستند. □

گزاره ۴.۱.۱. گیریم a و b دو عضو از حلقه‌ی کاهش یافته‌ی R باشند. $P_a \subseteq P_b$ اگر وتنها اگر $Ann(b) \subseteq Ann(a)$.

اثبات. ابتدا با توجه به این که حلقه‌ی R یک حلقه‌ی کاهش یافته است، متذکر می‌شویم که برای هر $a \in R$

$$Ann(a) = (0 : a) = (\bigcap_{P \in Min(R)} : a) = \bigcap_{P \in Min(R)} (P : a) = \bigcap_{a \notin P \in Min(R)} P$$

$\Leftarrow$) اگر P شامل b باشد، آن‌گاه P شامل a خواهد شد. به این ترتیب مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های اول مینیمال که b در آن‌ها نمی‌باشد شامل مجموعه‌ی تمام

ایدآل‌های اول مینیمالی است که a در آن‌ها نمی‌باشد. از این رو، با توجه به این که

$$Ann(b) = \bigcap_{b\notin P\in Min(R)} P \qquad \text{و} \qquad Ann(a) = \bigcap_{a\notin P\in Min(R)} P$$

می‌توانیم نتیجه بگیریم $Ann(b) \subseteq Ann(a)$.

$\Leftarrow$) گیریم $P_\circ$ یک ایدآل اول مینیمال شامل b باشد. ادعا می‌کنیم که $a \in P_\circ$، زیرا در غیر این صورت با توجه به این که، $Ann(a) = \bigcap_{a\notin P\in Min(R)} P$، داریم: $Ann(a) \subseteq P_\circ$. بنابراین $Ann(b) \subseteq P_\circ$. چون $Ann(b) = \bigcap_{b\notin P\in Min(R)} P$ و $P_\circ$ یک ایدآل اول مینیمال است، پس $b \notin P_\circ$. که نتیجه‌ی حاصل با فرض اولیه در تناقض است. به این ترتیب $P_a \subseteq P_b$. □

۲.۱ z-ایدآل و z°-ایدآل

در این بخش z-ایدآل‌ها و z°-ایدآل‌ها را به صورت یک مفهوم جبری معرفی می‌کنیم و خواص ابتدایی آن‌ها را در حدی که نیازمان باشد، بیان می‌کنیم.

تعریف. ایدآل I از حلقه‌ی R را یک z-ایدآل (z°-ایدآل) می‌نامیم، در صورتی که $M_a \subseteq I$ ($P_a \subseteq I$)، برای هر $a \in I$.

واضح است که هر ایدآل ماکسیمال یک z-ایدآل و هر ایدآل مینیمال یک z°-ایدآل است. همچنین اشتراک هر خانواده از z-ایدآل‌ها (z°-ایدآل‌ها) یک z-ایدآل (z°-ایدآل) می‌شود.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I ایدآلی از آن باشد. احکام زیرمعادلند.

الف) I یک z-ایدآل است.

ب) اگر $M_b \subseteq M_a$ و $a \in I$، آن‌گاه $b \in I$.

پ) اگر $M_a = M_b$ و $a \in I$، آن‌گاه $b \in I$.

ت) $I = \sum_{a \in I} M_a$.

اثبات. الف $\Leftarrow$ب) چون $b \in M_b \subseteq M_a \subseteq I$، پس $b \in I$.

ب $\Leftarrow$پ) بدیهی است.

پ $\Leftarrow$ت) واضح است که $I \subseteq \sum_{a \in I} M_a$. حال فرض می‌کنیم $b \in \sum_{a \in I} M_a$، در این صورت $a \in I$ وجود دارد به طوری که $b \in M_a$ و در نتیجه $M_b \subseteq M_a$. اما بنا بر قسمت «الف» از لم ۲.۱.۰۱،

$$M_{ab} = M_a \cap M_b = M_b.$$

از طرفی $ab \in I$، از این رو $b \in I$. به این ترتیب $\sum_{a \in I} M_a \subseteq I$ و حکم نتیجه خواهد شد.

ت $\Leftarrow$الف) آشکارا برقرار است. $\square$

قضیه‌ی قبل را می‌توان برای z°-ایدآل‌ها نیز بیان کرد، که آن را در قضیه‌ی زیر آورده‌ایم.

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I ایدآلی از آن باشد. احکام زیرمعادلند.

الف) I یک z°-ایدآل است.

ب) اگر $P_a \subseteq P_a$ و $a \in I$، آن‌گاه $b \in I$.

پ) اگر $P_a = P_b$ و $a \in I$، آن‌گاه $b \in I$.

ت) $I = \sum_{a \in I} P_a$.

اثبات. مشابه قضیه‌ی قبل ثابت می‌شود. □

لم ۳.۲.۱. فرض کنیم R و S دو حلقه و $f: R \to S$ یک همریختی پوشا باشد. اگر I یک z-ایدآل از S باشد، آن‌گاه $f^{-1}(I)$ نیز یک z-ایدآل از R است.

اثبات. چون f یک تابع پوشاست، پس

$$Max(R) \supseteq \{f^{-1}(M) : M \in Max(S)\}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f^{-1}(M_{f(a)}) &= f^{-1}\Big(\bigcap_{f(a)\in M\in Max(S)} M\Big) \\ &= \bigcap_{f(a)\in M\in Max(S)} f^{-1}(M) \\ &= \bigcap_{\substack{a\in f^{-1}(M) \\ M\in Max(S)}} f^{-1}(M) \\ &= \bigcap_{a\in M\in Max(R)} M_a \end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم $a \in f^{-1}(I)$ در این صورت

$$\begin{aligned} f(a)\in I \quad &\Rightarrow \quad M_{f(a)} \subseteq I \\ &\Rightarrow \quad f^{-1}(M_{f(a)}) \subseteq f^{-1}(I) \\ &\Rightarrow \quad M_a \subseteq f^{-1}(I) \end{aligned}$$

به این ترتیب $f^{-1}(I)$ یک z-ایدآل است. □

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. اگر $Jac(R) = ۰$، آن‌گاه هر z°-ایدآل یک z-ایدآل است.

اثبات. رجوع شود به [۱، قضیه‌ی ۱۲.۱.۳]. □

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنیم I یک ایدآل از حلقه‌ی R باشد و $P \in Min(I)$. اگر I یک z-ایدآل باشد، آن گاه P نیز یک z-ایدآل است.

اثبات. رجوع شود به [۱، قضیه‌ی ۴.۶.۱] . □ ،

گزاره ۶.۲.۱. هر z-ایدآل و هر z°-ایدآل یک ایدآل نیم اول است.

اثبات. بنا بر قسمت «ب» از لم‌های ۲.۱.۱ و ۳.۱.۱، حکم واضح است. □

در این جا لازم است یادآور شویم که منظور از یک حلقه‌ی موضعی، حلقه‌ای است که فقط یک ایدآل ماکسیمال دارد.

نتیجه ۷.۲.۱. فرض کنیم I یک z-ایدآل اول از حلقه‌ی موضعی R باشد. اگر I ماکسیمال نباشد، آن‌گاه مشمول در یک z-ایدآل اول غیر ماکسیمال خواهد شد.

اثبات. با توجه به قضیه‌ی ۵.۲.۱ و گزاره‌ی ۶.۲.۱ حکم واضح است. □

از نتیجه قبل مستقیماً حکم زیر نتیجه خواهد شد.

نتیجه ۸.۲.۱. فرض کنیم I یک ایدآل از حلقه‌ی R باشد به طوری که $\frac{R}{I}$ یک حلقه‌ی موضعی شود. در این صورت مجموعه‌ی تمام z-ایدآل‌هایی که شامل I هستند و در مجموعه‌ی z-ایدآل‌های غیر ماکسیمال، عضو ماکسیمال می‌باشند برابر است با مجموعه‌ی تمام z-ایدآل‌های اولی که شامل I هستند و در مجموعه‌ی z-ایدآل‌های اول غیر ماکسیمال، عضو ماکسیمال می‌باشند.

۳.۱ فضای ایدآل‌های اول مینیمال

فرض کنیم R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد. مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های اول مینیمال را به روش زیر به یک توپولوژی مجهز می‌کنیم و آن را فضای ایدآل‌های اول مینیمال می‌نامیم. برای هر زیر مجموعه‌ی S از R، پوسته‌ی S را به شکل زیر معرفی می‌کنیم.

$$h(S) = \{P \in Min(R) : S \subseteq P\}$$

و برای هر خانواده‌ی $\mathcal{S}$ از اعضای $Min(R)$ هسته‌ی $\mathcal{S}$ را $\bigcap \mathcal{S}$ معرفی می‌کنیم و با $k(\mathcal{S})$ نمایش می‌دهیم. قرار می‌دهیم

$$\mathscr{F} = \{\mathcal{F} \subseteq Min(R) : hk(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\}$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که این خانواده خواص مجموعه‌های بسته در یک فضای توپولوژی را دارد. همچنین برای هر مجموعه‌ی بسته‌ی $\mathcal{F}$ در این فضا داریم:

$$\mathcal{F} = hk(\mathcal{F}) = \bigcap_{a \in k(\mathcal{S})} h(a)$$

پس خانواده‌ی $\{h(a) : a \in R\}$ برای مجموعه‌های بسته در فضای توپولوژی حاصل تشکیل پایه می‌دهد.

حال خواص این فضا را تا آن جا که لازمه‌ی کارمان می‌باشد، شرح می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۱. اگر حلقه‌ی R یک حلقه‌ی کاهش یافته باشد، آن‌گاه

$$h(Ann(a)) = Min(R) \setminus h(a)$$

برای هر $a \in R$. به خصوص، این که $h(a)$ و $h(Ann(a))$ مجموعه‌های بازبسته‌ی