بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان نامه
براي دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
رشته‌ی رياضي محض

عنوان:

یکدستی جبرهای ℓ^1-نیم مشبکه

استاد راهنما:

دکتر محمد حسین ستاری

استاد مشاور:

دکتر شهرام رضا پور

پژوهشگر:

محمد آذریان

شهریور/ ۱۳۹۰
تبریز/ ایران

تقدیم به

همسرم

به پاس محبت های بی دریغش که هرگز فروکش نمی کند

سپاس گزاری...

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر ستاری، که با صبر فراوان و صرف وقت زیاد، همواره راهنما و راه گشای بنده در اتمام و اکمال این پایان نامه بوده است تشکر نمایم.

از جناب آقای پروفسور رضاپور، به خاطر مشاوره ی این مجموعه و به پاس تمام زحماتی که طول این دوره متحمل شدند و همچنین لطف و محبتی که همیشه نسبت به بنده داشتند کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر پورمحمود که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل کردند متشکرم.

از اساتید ارجمند آقایان؛ دکتر امجدی و دکتر عابدی که در این دوران تحصیل مشوق اینجانب بوده و همواره از ایده هاي خوب آنان بهره مند گردیده ام، خاضعانه سپاس گزارم.

از جناب آقای سید محمد علی آل عمرانی نژاد که همواره مشوق و راهنمای بنده بوده اند کمال تشکر و امتنان را دارم.

از کلیه ی دانشجویان هم دوره ی خود، به خصوص آقای شفیع اصل به خاطر همکاري و راهنمایي هاي ارزشمندشان سپاس گزارم.

و در پایان از پدر، مادر، همسر عزیزم و همه فرشتگاني که بالهاي محبت خود را گسترانیدند و با تحمل دشواري ها، سبب شدند تا در کمال آسودگي خیال و فراغت بال، شوق آموختن در من زنده بماند صمیمانه سپاس گزارم.

محمد آذریان

شهریور ۱۳۹۰

تبریز / ایران

فهرست مطالب

چکیده

ما در این مجموعه نشان خواهیم داد اگر L یک نیم مشبکه باشد آنگاه $\ell^1(L)$، که با ضرب پیچشی یک جبر باناخ است، دقیقا زمانی یکدست میشود که L بطور یکنواخت موضعا متناهی باشد. تکنیک اثبات ما نشان می دهد که، اگر جبر پیچشی یکدست باشد آنگاه به عنوان یک جبر باناخ، با فضای باناخ $\ell^1(L)$ که به ضرب نقطه وار مجهز شده، یکریخت است. و در نهایت نشان خواهیم داد که این تکنیک چطور می تواند به اثبات یکدستی جبرهای نیمگروه کلیفورد توسیع پیدا بکند.

کلید واژه‌ها: یکدستی، نیمگروه میانگین پذیر، نمایش شوتزنبرگر، جبر نیمگروه کلیفورد.

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ فضا و جبر باناخ

تعریف ۱.۱ (فضای باناخ)**.** فضاهای باناخ، رده ای از فضاها هستند که هم دارای ساختمان توپولوژیک هستند و هم دارای ساختمان جبری. مجموعه X از عنصرها را روی مجموعه عددهای حقیقی یک فضای برداری می گویند هرگاه $(+) : X \times X \to X$ و یک تابع $(\cdot) : R \times X \to X$ داشته باشیم که، به ازای هر $x, y, z \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ در شرطهای زیر صدق کنند:

۱. $x + y = y + x$

۲. $(x + y) + z = x + (y + z)$

۳. در X یک بردار θ وجود دارد به گونه ای که برای همه ی x های متعلق به X داریم

$$x + \theta = x$$

۴. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

۵. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

۶. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

۷. $1 \cdot x = x \quad , \quad 0 \cdot x = \theta$

(+) را جمع و $(\cdot)$ را ضرب اسکالر می نامیم. باید توجه داشت که عنصر θ که در (iii)

تعریف شده، یکتاست، زیرا اگر θ' نیز دارای این خاصیت باشد آنگاه

$$\theta = \theta + \theta' = \theta' + \theta = \theta'$$

عنصر $(-۱)x$ را منفی x نامیده و $-x$ می نویسند. داریم

$$x + (-x) = ۱ \cdot x + (-۱)x = (۱ - ۱)x = ۰ \cdot x = \theta$$

یک تابع حقیقی نامنفی $\|\cdot\|$ که روی فضای برداری X تعریف گردد، نرم نامیده می شود اگر:

۱. به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq ۰$، و $\|x\| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$؛

۲. به ازای هر x و $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$؛

۳. به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

خاصیت (۳) را نامساوی مثلثی می نامیم و این نامساوی هم ارز حکم زیر است:
به ازای هر $x, y, z \in X$

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|.$$

فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را یک فضای برداری نرمدار می نامیم.
بر فضای برداری نرمدار X یک متر برحسب $\|\cdot\|$ به صورت $d(x, y) = \|x - y\|$ تعریف می کنیم. از خواص نرم معلوم می شود که $d(x, y)$ یک متر بر X است. گوییم دنباله ی $\{x_n\}$ در X همگرا در نرم به x است اگر $\lim \|x - x_n\| = ۰$؛ یعنی اگر $\{x_n\}$ نسبت به فاصله ی القا شده بوسیله ی نرم همگرا به x باشد.
در پرتو نامساوی مثلثی، نامساوی

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

به ازای هر $x, y \in X$ برقرار است. از این فورا معلوم می شود که اگر نرم را به صورت تابع $x \to \|x\|$ از X به توی $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، بطور یکنواخت پیوسته است. همچنین،

از نامساوی مثلثی به آسانی این مطلب مهم ثابت می شود که هرگاه $x_n \to x$ و $y_n \to y$ در X و $\alpha_n \to \alpha$ در $\mathbb{R}$، آنگاه $x_n + y_n \to x + y$ و $\alpha_n x_n \to \alpha x$ برقرارند.
گوییم زیر مجموعه A از یک فضای نرمدار کراندار است اگر $M > ۰$ ی باشد به طوری که، $\|x\| \leq M$ به ازای هر $x \in A$ برقرار باشد.
فضای نرمدار X که نسبت به متر القا شده بوسیله ی نرمش تام است یک فضای باناخ نام دارد. یعنی X یک فضای باناخ است اگر به ازای هر دنباله ی کشی $\{x_n\}$ از X عنصری مانند $x \in X$ باشد. به طوری که

$$\lim \|x_n - x\| = ۰.$$

لذا، فضاهای باناخ نمونه های خاصی از فضاهای متری تام می باشند.

در زیر، چند مثال از فضاهای باناخ ارائه می شود.

مثال ۲.۱. *اگر X یک مجموعه و $K(X)$ مجموعه ی تمام توابع مختلط روی X باشد آنگاه $K(X)$ با اعمال زیر برای هر $f, g \in K(X), x \in X, \alpha \in F$ یک فضای برداری است*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

که این اعمال را، اعمال نقطه وار نامیم.

مثال ۳.۱. *فضای برداری $\mathbb{R}^n$ با نرم $\|x\| = \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲\right)^{۱/۲}$ به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ یک فضای باناخ است.*
برای اثبات نرم بودن، فقط خاصیت نامساوی مثلثی را بررسی می کنیم؛ دو خاصیت دیگر بدیهی اند.
اگر $x, y \in \mathbb{R}^n$ آنگاه

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \|(x_۱ + y_۱, x_۲ + y_۲, ..., x_n + y_n)\| \\ &= \left(\sum_{i=۱}^{n} (x_i + y_i)^۲\right)^{۱/۲} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2} \qquad \text{نامساوی مینکوفسکی} \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

این نرم را نرم اقلیدسی می نامیم و متر اقلیدسی را به دست خواهد داد.

مثال ۴.۱. فرض کنیم ℓ^1 گردایه تمام دنباله های حقیقی $x = (x_1, x_2, ...)$ باشد بطوریکه $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. به آسانی معلوم می شود که ℓ^1 تحت اعمال جبری

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ...) \qquad , \qquad x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...)$$

یک فضای برداری است. به علاوه، هرگاه به ازای هر $x \in \ell^1$ تعریف می کنیم

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

آنگاه $\|\cdot\|$ یک نرم بر ℓ^1 است. زیرا:

۱. برای هر $x \in \ell^1$، اگر

$$\begin{aligned} x = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \forall n \;\; x_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \|x\| = 0 \end{aligned}$$

۲. برای هر $x \in \ell^1$ و $\alpha \in R$

$$\|\alpha x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n| = |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = |\alpha| \|x\|_1$$

۳. برای هر $x, y \in \ell^1$

$$\|x + y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

حال نشان می دهیم که $\ell^۱$ تام است.

برای این کار، فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله کشی از $\ell^۱$ باشد؛ یعنی به ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مانند k باشد بطوریکه $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ به ازای هر $n, m > k$ برقرار است. پس عددی مانند $M > ۰$ هست بطوریکه به ازای هر n، $\|x_n\|_۱ \leq M$. به ازای هر n قرار می دهیم $x_n = (x_۱^n, x_۲^n, ...)$. رابطه

$$|x_i^n - x_i^m| \leq \sum_{i=۱}^{\infty} |x_i^n - x_i^m| = \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

به ازای $n, m > k$ ایجاب می کند که به ازای هر iی ثابت، دنباله ی $\{x_i^n\}$ از اعداد حقیقی کشی است. به ازای هر i قرار می دهیم $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$. حال، از نامساویهای

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{p} |x_i| &\leq \\
&\leq \sum_{i=۱}^{p} |x_i - x_i^n| + \sum_{i=۱}^{p} |x_i^n| \\
&\leq \sum_{i=۱}^{p} |x_i - x_i^n| + \|x_n\|_۱ \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{i=۱}^{p} |x_i^m - x_i^n| \right) + \|x_n\|_۱ \\
&\leq \varepsilon + M \\
&< \infty
\end{aligned}$$

به ازای هر p، نتیجه می شود که $x = (x_۱, x_۲, ...) \in \ell^۱$. همچنین، به خاطر آنکه به ازای هر $n, m > k$،

$$\sum_{i=۱}^{p} |x_i^m - x_i^n| \leq \|x_n - x_m\|_۱ < \varepsilon$$

داریم به ازای هر p و هر $n > k$،

$$\sum_{i=1}^{p} |x_i - x_i^n| = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{p} |x_i^m - x_i^n|\right) \leq \varepsilon.$$

لذا، $\|x - x_n\| \leq \varepsilon$ به ازای هر $n > k$ برقرار است؛ در نتیجه $\{x_n\}$ همگرا به x در ℓ^1 است. یعنی ℓ^1 یک فضای باناخ است.

تعریف ۱.۵. برای فضاهای برداری X, Y روی میدان F نگاشت $T : X \to Y$ را نگاشت خطی نامیم هرگاه برای هر $\alpha \in F, x, y \in X$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

اگر X, Y نرمدار باشند، آنگاه نگاشت T را کراندار گوییم هرگاه $M > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in X$ نامساوی

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

برقرار باشد. مجموعه ی تمام نگاشتهای خطی کراندار را با $BL(X, Y)$ نشان می دهیم. خود $BL(X, Y)$ با تعریف زیر یک فضای نرمدار است.

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in E_{[1]}\}$$

که $E_{[1]} = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ همسایگی به شعاع ۱ است.
برای هر نگاشت خطی کراندار T داریم:

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$$

اگر به جای Y در $BL(X, Y)$ میدان $\mathbb{F}$ را قرار دهیم آنگاه، مجموعه ی حاصل را دوگان نرمی X و اعضای آنرا تابعک خطی می نامیم. معمولا $BL(X, \mathbb{F})$ را با نماد X' نمایش می دهند. دوگان دوم و سوم و ... به همین ترتیب تعریف می شوند.

اگر $\lambda \in X'$ و $x \in X$ آنگاه از نمادگذاری زیر استفاده خواهیم کرد.

$$\lambda(x) =< x, \lambda >$$

فرض کنیم $T : X \to Y$ یک نگاشت خطی باشد. در اینصورت نگاشت الحاقی T را با نماد T' نشان می دهیم که $T' : Y' \to X'$ با ضابطه ی زیر تعریف می شود

$$< x, T'(\lambda) >=< T(x), \lambda > \qquad (\lambda \in Y', \ x \in X)$$

T' خطی است و اگر کراندار باشد آنگاه $T' \in BL(Y', X')$ و

$$\|T'\| = \|T\|.$$

به سادگی مشخص می شود که اگر $T : X \to Y$ و $S : Y \to Z$ نگاشتهای خطی باشند آنگاه

$$(SoT)' = T'oS'$$

و اگر کراندار باشند آنگاه

$$\|SoT\| \leq \|S\|\|T\|.$$

اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$ آنگاه، T را ایزومتریک نامیم.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و M زیرفضایی از X باشد. $M^\perp$ برای هر $x \in M$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$M^\perp = \{x' \in X' :< x, x' >= ۰\}$$

$M^\perp$ را پوچساز M گوییم.

قضیه ۷.۱ (قضیه ی هان باناخ). *فرض کنید تابع حقیقی p روی فضای برداری X*

تعریف شده است، و به ازای هر $\alpha \geq 0$

$$p(\alpha x) = \alpha p(x)$$

باشد. و همچنین نامساوی

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

برای هر $x, y \in X$ برقرار باشد. فرض کنیم f یک تابعک خطی است که روی زیر فضای S تعریف شده و برای هر s در S، $f(s) \leq p(s)$ باشد. در این صورت یک تابعک خطی F وجود دارد که روی X تعریف شده به گونه ای که برای همه ی x ها

$$F(x) \leq p(x)$$

و برای همه ی s های متعلق به S، $F(s) = f(s)$ است.

برهان. رجوع شود به فصل دهم از منبع [۱۰] □

گزاره ۸.۱. *فرض کنید M یک زیرفضای بسته ی فضای باناخ X باشد. قضیه ی هان باناخ هر $m' \in M'$ را به یک تابعک خطی $x' \in X'$ توسیع می دهد. تعریف می کنیم:*

$$\sigma m' = x' + M^{\perp}$$

در این صورت σ یک یکریختی یکمتر از M' به روی $X'/M^{\perp}$ است.

برهان. رجوع شود به قضیه ی ۹.۴ از منبع [۱۱] □

تعریف ۹.۱ (جبر باناخ)**.** هر جبر مختلط، یک فضای برداری مانند A روی میدان مختلط است که در آن یک ضرب شرکت پذیر و پخش پذیر تعریف شده است؛ یعنی به ازای هر $x, y, z \in A$

$$(y+z)x \quad = \quad yx + zx$$

$$x(y+z) = xy + xz$$
$$x(yz) = (xy)z$$

و با ضرب اسکالر چنان مربوط شده است که به ازای $x, y \in A$ و αی اسکالر

$$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

هرگاه یک نرم در A موجود باشد که A را به یک فضای خطی نرمدار بدل کرده و به ازای هر $x, y \in A$ در نامساوی ضربی

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \qquad (۱.۱)$$

صدق کند، آنگاه A یک جبر مختلط نرمدار می باشد. هرگاه، علاوه بر این، A یک فضای متری تام نسبت به این نرم باشد، یعنی A یک فضای باناخ باشد، آنگاه A را یک جبر باناخ می نامیم.
هرگاه $x_n \to x$ و $y_n \to y$، با استفاده از رابطه (۱.۱) و اتحاد

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y)$$

نتیجه می شود که $x_n y_n$ به سمت xy میل می کند و این نشان می دهد که ضرب، یک عمل پیوسته است.
توجه کنید که تعویض پذیری A (یعنی به ازای هر $x, y \in A$، $xy = yx$) شرط نشده است، و ما نیز شرط نمی کنیم مگر وقتی صریحا آن را بپذیریم.
با این حال فرض می کنیم A دارای عضو یکه باشد. این یعنی عنصری مانند e باشد بطوریکه برای هر $x \in A$،

$$xe = ex = x$$

برقرار باشد. به آسانی معلوم می شود که، بنابر(۱.۱)، حداکثر یک چنین eای وجود

دارد $(e' = e'e = e)$ و $\|e\| \geq 1$. ما فرض اضافی

$$\|e\| = 1$$

را نیز می پذیریم.
عنصر x را معکوس پذیر می نامیم اگر x در A دارای معکوس باشد؛ یعنی عنصری مانند $x^{-1} \in A$ موجود باشد بطوریکه

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e.$$

توجه کنید هیچ $x \in A$ی بیش از یک معکوس ندارد.

مثال ۱۰.۱. *فرض کنید $\{A_L : \lambda \in \Lambda\}$ گردایه ای از جبرهای باناخ باشد. آنگاه ℓ^1-جمع مستقیم این جبرهای باناخ، با نماد $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}^{(\ell^1)} A_\lambda$ نشان داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:*

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}^{(\ell^1)} A_\lambda = \{(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : \sum_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda\| < \infty, a_\lambda \in A_\lambda\}$$

$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}^{(\ell^1)} A_\lambda$ یک فضای خطی است. حال ضرب را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (a_\lambda b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

که در آن $a_\lambda b_\lambda$ همان ضرب در A_λ است. $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}^{(\ell^1)} A_\lambda$ با ضرب مولفه وار مذکور تشکیل یک جبر باناخ می دهد. توجه کنید که

$$\|(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\| = \|(a_\lambda b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\| = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda b_\lambda\| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} \|a_\lambda\| \sum_{\lambda\in\Lambda} \|b_\lambda\| \leq \|(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|\|(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\|.$$

تعریف ۱۱.۱. $(\Lambda, \preceq)$ یک مجموعه مرتب شده جزیی و $\preceq$ یک ترتیب جزیی است اگر برای هر $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$ داشته باشیم:

۱. $\alpha \preceq \alpha$

۲. اگر $\alpha \preceq \beta,\ \ \beta \preceq \gamma$ آنگاه $\alpha \preceq \gamma$.

۳. اگر $\alpha \preceq \beta,\ \ \beta \preceq \alpha$ در نتیجه $\alpha = \beta$

تعریف ۱.۱۲. یک مجموعه مرتب شده جزیی $(\Lambda, \preceq)$، یک مجموعه جهت دار است اگر، برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$ وجود داشته باشد $\gamma \in \Lambda$ بطوریکه:

$$\alpha \preceq \gamma,\ \ \beta \preceq \gamma$$

تعریف ۱.۱۳. یک تور در یک مجموعه X، یک خانواده $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ است که، مجموعه اندیس گذار Λ مجموعه جهت دار باشد.

تعریف ۱.۱۴. فرض کنید $(\Lambda, \preceq)$ یک مجوعه مرتب شده جزیی باشد.
اگر برای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$، $\alpha \preceq \beta$ یا $\beta \preceq \alpha$ باشد آنگاه مجموعه ی $(\Lambda, \preceq)$ را مرتب کلی و $\preceq$ را ترتیب کلی گوییم.

تعریف ۱.۱۵. یک زیر مجموعه S از یک مجموعه مرتب شده جزیی $(\Lambda, \preceq)$، یک زنجیر است اگر $(S, \preceq|_S)$ یک مجموعه مرتب کلی باشد که، $\preceq|_S$ تحدید ترتیب جزیی $\preceq$ به S است.

قرارداد ۱.۱۶. *ما از نماد $|\ |$ برای نشان دادن عدد اصلی یک مجموعه استفاده می کنیم.*

تعریف ۱.۱۷ (مجموعه رو به پایین جهتدار شده)**.** اگر P یک مجموعه مرتب شده جزیی و $D \subseteq P$ باشد. D را یک مجموعه رو به پایین جهتدار شده یا مجموعه ی پایینی در P گوییم اگر برای هر $x \in D, y \in P, y \preceq x$ نتیجه شود $y \in D$ است.

۱.۲ مدول های ضربی

تعریف ۱.۱۸ (A-مدول چپ)**.** اگر A یک جبر باناخ روی میدان $\mathbb{F}$، و X یک فضای خطی روی $\mathbb{F}$ باشد، در اینصورت X را یک مدول چپ روی A یا یک A-مدول چپ نامیم هرگاه، برای هر $\alpha, \in \mathbb{F}, a, b \in A, x, y \in X$ نگاشتی مانند $m : A \times X \to X$

با خواص زیر موجود باشد:

۱. $m(a+\alpha b,x)=m(a,x)+\alpha m(b,x)$

۲. $m(a,x+\alpha y)=m(a,x)+\alpha m(a,y)$

۳. $m(a\cdot b,x)=m(a,m(b,x))$

نگاشت $(a,m)\to am$ را ضرب مدول می نامند. و به همین ترتیب A-مدول راست تعریف می شود.

تعریف ۱۹.۱ (A-مدول). اگر A,B جبرهایی روی میدان $\mathbb{F}$ و X یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ باشد. آنگاه گوییم X یک $A-B$-مدول دوطرفه است اگر، یک A-مدول چپ و یک B-مدول راست باشد. و اگر n,m به ترتیب اعمال مدول مربوط به A- مدول چپ بودن و B-مدول راست بودن X باشند آنگاه برای هر $a\in A,b\in B,x\in X$ داشته باشیم:

$$m(a,n(x,b))=n(m(a,x),b)$$

از این به بعد برای دوری از بدیهیات اعمال مدول را نخواهیم نوشت، یعنی برای مثال به جای $m(a,x)$ عبارت ax را خواهیم نوشت. حال اگر X یک $A-A$- مدول دوطرفه باشد، آنگاه آنرا A-مدول دوطرفه یا A-مدول خواهیم نامید.

تعریف ۲۰.۱. فرض کنیم A یک جبر نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ و X یک فضای برداری نرمدار روی F باشد. در اینصورت گوییم X یک A-مدول نرمدار چپ(یا راست یا دوطرفه) است اگر، X یک A-مدول چپ(یا راست یا دو طرفه) باشد و ثابت K برای هر $a\in A,x\in X$ چنان موجود باشد که

$$\|am\|\leq K\|a\|\|x\|$$

حال اگر X یک فضای باناخ باشد آنگاه آنرا A-مدول باناخ نامیم.

تعریف ۲۱.۱. فرض کنید A یک جبر باشد و E,F دو A-مدول چپ باشند. در اینصورت گوییم نگاشت $\phi:E\to F$ به ازای هر $a\in A,e\in E$ یک A-مدول

مورفیسم چپ است اگر

$$\phi(ae) = a\phi(e)$$

یعنی نگاشتی که اعمال مدولی را بین دو مدول حفظ می کند. به همین ترتیب A-مدول مورفیسم راست نیز تعریف می شود. همچنین اگر E, F دو A-مدول دوطرفه باشند آنگاه، گوییم نگاشت $\phi : E \to F$ برای هر $a \in A, e \in E$ یک A-مدول مورفیسم دوطرفه یا A-مدول مورفیسم است اگر

$$\phi(ae) = a\phi(e)$$

و

$$\phi(ea) = \phi(e)a$$

گاهی اوقات از کلمه ی همریختی به جای مورفیسم استفاده می شود.

۳.۱ ضرب تانسور

تعریف ۲۲.۱. اگر X و Y و Z فضاهای خطی نرمدار، روی میدان $\mathbb{F}$ باشند.
نگاشت $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ یک دو خطی است اگر

۱. $\phi(\alpha x + y, z) = \alpha\phi(x, z) + \phi(y, x)$ وقتی α اسکالر و $z \in Y$، $x, y \in X$.

۲. $\phi(x, \alpha z + y) = \alpha\phi(x, z) + \phi(y, x)$ وقتی α اسکالر و $y, z \in Y$، $x \in X$.

اگر $Z = \mathbb{F}$ باشد آنگاه ϕ را تابعک دو خطی می گوییم.

یک نگاشت دو خطی $\phi : X \times Y \longrightarrow Z$ کراندار است، اگر $M \geq 0$ به ازای هر $x \in X, y \in Y$ وجود داشته باشد که نامساوی

$$\|\phi(x, y)\| \leq M \parallel x\|\|y\|$$