دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

تعمیم منتج روی چندگوناهای یکسوگویا

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

رسول نقدعلی فروشانی

استاد راهنما

دکتر منصور آقاسی

۱۳۸۶

به نام خدا

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تعمیم منتج روی چندگوناهای یکسوگویا

سخنران: رسول نقدعلی فروشانی

زمان: یکشنبه ۱۳۸۶/۱۲/۵ ساعت ۱۵

مکان: سالن کنفرانس

هیئت داوران

۱ – دکتر منصور آقاسی

۲ – دکتر احمد حقانی

۳ – دکتر امیر هاشمی (دانشگاه صنعتی اصفهان)

۴ – دکتر اعظم اعتماد

چکیده:

حل یک دستگاه از چندجمله‌ایها همواره یکی از مسائل مهم در ریاضیات و به ویژه در جبر و هندسه جبری محاسباتی بوده‌است. نظریه حذف یکی از روشهای مهم در حل دستگاه چندجمله‌ایهااست. یکی از شاخه‌های مهم در نظریه حذف منتج است. منتج اولین بار توسط بزو و ایلر در سال ۱۷۶۴ معرفی گردید و پس از آن در سال ۱۸۴۰ توسط سیلوستر روشی برای محاسبه منتج دو چندجمله‌ای یک متغیره مطرح شد. سپس ریاضی‌دانان روسی یک منتج جدید به نام منتج چنبری را معرفی کردند. ولی منتج‌های بیان شده در برخی موارد حالت تباهیده دارند. در این پایان‌نامه توسیعی از منتج $n+1$ چندجمله‌ای n متغیره معرفی و وجود آن روی یک چندگونای یکسوگویا اثبات می‌شود. سپس با توسیع کار بزو و اُیلر یک ماتریس به نام ماتریس بزوئی تعریف می‌شود که کهادهای ماکزیمال آن مضربی از منتج می‌باشند.

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض آقای رسول نقدعلی فروشانی

تحت عنوان

تعمیم منتج روی چندگوناهای یکسوگویا

در تاریخ ۱۳۸۶/۱۲/۵ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر منصور آقاسی
۲– استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر احمد حقانی
۳– استاد داور ۱	دکتر امیر هاشمی (دانشگاه صنعتی اصفهان)
۴– استاد داور ۲	دکتر اعظم اعتماد

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر رسول نصر اصفهانی

پس از حمد و سپاس از پروردگار تعالی و تشکر از پدر و درود به روح مادرم که دلسوزی و محبت آنها راهگشای زندگیم بوده و هست، از آقای دکتر آقاسی که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه بر دوش ایشان بوده متشکرم. همچنین از استاد و مشاور دلسوز آقای دکتر حقانی که با نظرات سازنده خود در جهت پربارتر شدن این پایان‌نامه بنده را یاری کردند، کمال سپاس و تشکر را دارم، و نیز از آقای دکتر هاشمی و خانم دکتر اعتماد که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال امتنان را دارم. در پایان از آقای دکتر نصر و کلیه اساتید گروه ریاضی که در طول دوره کارشناسی ارشد زحمات زیادی را برای اینجانب کشیده‌اند سپاسگزارم.

فهرست مطالب

چکیده:

منتج به عنوان یکی از شاخه‌های نظریه حذف دارای اهمیت ویژه‌ای در حل دستگاه چندجمله‌ایها است. در این پایان‌نامه ابتدا به معرفی منتج و انواع آن می‌پردازیم و توسیعی از منتج کلاسیک را معرفی می‌کنیم. منتج جدید در بر گیرنده همه منتج‌های معرفی شده قبل از آن می‌باشد. سپس ثابت می‌کنیم که این منتج روی چندگوناهای یکسوگویا وجود دارد. در ادامه یک ماتریس به نام ماتریس بزوئی معرفی می‌نمائیم و ثابت می‌کنیم که کهادهای ماکزیمال این ماتریس مضربی از منتج می‌باشد. سرانجام در چند مثال منتج‌های معرفی شده را به کمک نرم افزار Singular و Maple محاسبه می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمه و تاریخچه

نظریه منتج[۱] تاریخچه و سرگذشت ریاضی مفصلی دارد که با اصلاحاتی روی سیستم‌های خطی آغاز گردید. اولین ساختار صریح که به عنوان منتج شناخته می‌شود برای دو چندجمله‌ای یک متغیره در سال ۱۷۶۴ توسط بزو[۲] و اُیلر[۳] معرفی و در سال ۱۸۴۰ توسط روش شناخته شده تجزیه‌ای سیلوستر[۴] به صورت جنجال برانگیزی پیگیری شد و تعمیم‌هائی از آن به چندجمله‌ایهای چند متغیره منتشر گردید که منتج را به یک موضوع مورد توجه برای مطالعه تبدیل کرد.

بعد از یک دوره تاریک، دهه‌های اخیر شاهد از سرگیری نظریه حذف [۵] بوده است. آنچه که باعث انگیزه تحقیق بیشتر در این زمینه شد، تا حدی کاربردهای این نظریه، به طور مؤثر، در هندسه جبری و به طور خاص‌تر در حل دستگاههای چندجمله‌ای است. در حقیقت، بسیاری از عمل‌گرهائی که در این حوزه استفاده می‌شوند شامل تصویر کردن چندگوناها و حذف متغیرها می‌باشند. ساختار منتج جوابی مستقیم برای چنین مسائلی در بر دارد. پس از پردازشی مقدماتی روی درجه معادلات چندجمله‌ای و توسط عملیات ویژه روی ضرائب، در دترمینان ماتریس ساخته شده از ضرائب، چندجمله‌ای حذفی به دست می‌آید. این روش مخصوصاً برای کسانی که به دنبال حل عددی دستگاه می‌باشند جالب است، زیرا یک الگوی ساختاری به دست می‌دهد که برای کلاس بزرگی از دستگاه‌های داده شده به کار می‌رود. به هر

[۱] resultant
[۲] Bézout
[۳] Euler
[۴] Sylvester
[۵] elimination theory

حال، این روش‌ها با مشکلات مربوط به حالت‌های کلی‌تری مواجه می‌شوند وقتی که دستگاه داده شده ساختار تباهیده‌ای از منتج را نتیجه بدهد. این مسئله باعث پیشرفت‌های جدیدی مانند تعمیم مفهوم منتج به چندگوناهای کلی تر به‌جای فضاهای تصویری می‌گردد. بقیه تلاش‌ها در این زمینه مربوط به منتج‌ها روی چندگوناهای چنبری و به طور خیلی دقیق‌تر و روشن‌تر مربوط به ساختار ماتریس‌هائی است که دترمینان آنها مضربی نابدیهی از منتج چنبری است.

نظریه حذف در جبر محاسباتی شامل روش‌هائی برای حذف متغیرها از دستگاه‌های معادلات و حل دستگاه است. این حذف متغیرها در هندسه جبری معادل با تصویر کردن یک چندگونا از بعد $(n+۱)$ به یک چندگونا از بعد n می‌باشد. منتج یک ابزار خوب برای این تصویر کردن است. اگر یک دستگاه از چندجمله‌ایهای n متغیره با ضرائب نا مشخص داشته باشیم که تعداد ضرائب m تا است جواب‌های چنین دستگاهی در یک فضای از بعد $(n+m)$ قرار می‌گیرد. منتج جواب‌های این دستگاه را به یک فضای m بعدی تصویر می‌کند. در واقع منتج شرایط لازم و کافی روی ضرائب به منظورجواب داشتن دستگاه را بیان می‌کند.

کلمه منتج اولین بار در سال ۱۶۹۳ توسط لایبنیتز[۶] ، هنگامی به کار برده شد که یک نوع جدید از آنچه امروزه دترمینان نامیده می‌شود را معرفی می‌کرد.

منتج کلاسیک اولین باربه‌صورت دترمینان یک ماتریس بیان شده که درایه‌های آن به صورت چندجمله‌ایهایی، از ضرائب چندجمله‌ایهای دستگاه اولیه، روی حلقه اعداد صحیح می‌باشد. این منتج دارای دو شکل معروف سیلوستر و بزو است که هر دو در این پایان نامه بیان شده‌اند. روش دیگر برای منتج در حالت کلاسیک در سال ۱۹۰۲ توسط مک کولی [۷] بیان شد[۲۴]. در سال ۱۹۷۰ ریاضی‌دانان روسی مقوله جدیدی را با نام چندگوناهای چنبری‌و حل دستگاه معادلات روی این چندگوناها وارد عرصه هندسه جبری کردند.

هدف اصلی این پایان‌نامه ارائه روش جدیدی بر اساس ماتریسهای بزوئی[۸] برای محاسبه مضارب نابدیهی منتج روی یک چندگونای تصویری X است، که روی یک مجموعه باز با یک نمایش پارامتری بیان می‌شود. این ساختار که تعمیم حالت کلاسیک و چنبری است، کاربردهای دیگری نظیر فراگستری چندگوناها و مسائل مربوط به اشتراک مانده‌ای دارد. اساس کار این پایان‌نامه مقاله [۴] می‌باشد.

در این پایان‌نامه فرض بر آن است که خواننده با مطالب اولیه هندسه جبری (در حد مفاهیم اولیه کتاب هارتشورن) آشنائی دارد. از سوی دیگر به منظور سهولت در استفاده از این مباحث فصل دوم را به بیان چند تعریف و تعدادی قضیه اختصاص داده‌ایم. فصل سوّم معرفی منتج سیلوستر و بیان منتج‌های مختلف

[۶] Leibniz
[۷] Macaulay
[۸] Bézoution matrices

است که هدف این پایان نامه توسیع دادن آنها است. فصل چهارم به معرفی ماتریس بزوئی وبررسی خواص آن اختصاص دارد. در فصل پنجم منتج روی یک چندگونای X را تعریف کرده و سپس آنرا به چندگوناهائی که روی زیر مجموعه‌های باز چگال پارامتری شده‌اند توسیع می‌دهیم و شرایط جدیدی را برای وجود منتج روی این چندگوناها ارائه می‌نما ئیم. در ادامه اثبات می‌کنیم که کهادهای ماکزیمال ماتریس بزوئی مضارب نابدیهی منتج را به دست می‌دهند و نهایتاً در فصل ششم چند کاربرد و مثال عملی از محاسبه منتج‌های را ارائه خواهیم کرد.

فصل ۲

تعاریف و قضایای مقدماتی‌هندسی

دراین فصل تعدادی تعریف و قضیه از هندسه جبری آورده شده که در فصول آینده از آنها استفاده می‌شود. مبنای این تعاریف [۲۰] است.
در سراسر این فصل منظور از میدان $\mathbb{K}$، یک میدان جبری بسته است. منظور از $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه چندجمله‌ایها بر حسب n متغیر روی $\mathbb{K}$ است.

۲—۱ فضای مستوی و تصویری

تعریف ۱.۲ منظور از فضای مستوی[۱] روی $\mathbb{K}$ که با $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (یا به طور خلاصه با $\mathbb{A}^n$) نمایش می‌دهیم عبارت است از کلیه n—تائیهائی که از اعضای $\mathbb{K}$ تشکیل شده‌اند. هر عضو $\mathbb{A}^n$ را یک نقطه از آن می گویند.

تعریف ۲.۲ برای زیر مجموعه T از S مجموعه صفرهای T را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Z(T) = V(T) := \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0 \quad \forall f \in T\}$$

---
[۱] affine space

تذکر ۳.۲ اگر $I \lhd S$ و T مجموعه مولد آن باشد آنگاه: $Z(I)=Z(T)$

تعریف ۴.۲ زیر مجموعه $Y \subset \mathbb{A}^n$ را یک مجموعه جبری مستوی [۲] گویند هر گاه زیر مجموعه T از S موجود باشد به طوری‌که $Y=Z(T)$.

گزاره ۵.۲ اجتماع متناهی از مجموعه‌های جبری مستوی، مجموعه جبری مستوی است. اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های جبری مستوی، مجموعه جبری مستوی است. کل $\mathbb{A}^n$ ومجموعه تهی نیز مجموعه‌های جبری مستوی هستند.

اثبات. ر.ک. به[۲۰] ص ۲ گزاره ۱.۱. □

با توجه به گزاره فوق می‌توان یک توپولوژی روی $\mathbb{A}^n$ تعریف کرد که مجموعه‌های بسته در آن مجموعه‌های جبری مستوی باشند. به این توپولوژی، توپولوژی زاریسکی [۳] روی $\mathbb{A}^n$ گویند.

تعریف ۶.۲ زیر مجموعه Y از فضای توپولوژیک X را تحویل‌ناپذیر گویند هرگاه نتوان آن‌را به صورت اجتماع دو زیر مجموعه بسته از Y نوشت.

نکته ۷.۲ هر زیر مجموعه باز ناتهی از یک فضای تحویل‌ناپذیر، تحویل‌ناپذیر است.

اثبات. ر. ک. [۲۰] ص ۳ مثال ۱.۱.۳. □

نکته ۸.۲ اگر Y یک زیر مجموعه تحویل‌ناپذیر از فضای توپولوژیک X باشد، بستار آن $(\overline{Y})$ در X نیز تحویل‌ناپذیر است.

تعریف ۹.۲ یک **چندگونای جبری مستوی**[۴] (یا به طور خلاصه چندگونای مستوی) یک زیر مجموعه بسته تحویل‌ناپذیر از $\mathbb{A}^n$ (در توپولوژی زاریسکی) است.

تعریف ۱۰.۲ فرض کنیم X یک مجموعه جبری مستوی باشد، ایده‌آل X یعنی $I(X)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(X) := \{f \in S=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] \ \mid \ f(x)=0 \ ; \ \forall x \in X\}$$

تذکر ۱۱.۲ $I(X)$ یک ایده‌آل از S است.

[۲] affine algebraic set
[۳] Zariski
[۴] affine algebraic variety

تعریف ۱۲.۲ حلقه مختصاتی [5] از مجموعه جبری مستوی X که با $A(X)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از:

$$A(X) := \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{I(X)}$$

تعریف ۱۳.۲ ایده‌آل I از $\mathbb{K}[x_\circ, \ldots, x_n]$ را همگن گویند هر گاه به وسیله چندجمله‌ایهای همگنی از $\mathbb{K}[x_\circ, \ldots, x_n]$ تولید شود.

برای میدان جبری بسته $\mathbb{K}$ یک رابطه هم ارزی روی عناصر $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\circ\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a'_\circ, \ldots, a'_n) \sim (a_\circ, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\circ\} \quad s.t. \quad (a'_\circ, \ldots, a'_n) = \lambda(a_\circ, \ldots, a_n)$$

تعریف ۱۴.۲ مجموعه کلاسهای هم ارزی فوق را که با $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ (یا به طور ساده $\mathbb{P}^n$) نمایش می‌دهیم فضای تصویری روی $\mathbb{K}$ می‌نامند: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} := \{\ [a_\circ : \cdots : a_n] \ \mid \ a_i \in \mathbb{K} \setminus \{\circ\}\ ,\ i = \circ, \ldots, n\}$

تعریف ۱۵.۲ فرض کنیم $T \subseteq \mathbb{K}[x_\circ, \ldots, x_n]$ زیر مجموعه‌ای از عناصر همگن $\mathbb{K}[x_\circ, \ldots, x_n]$ باشد. مجموعه صفرهای T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V(T) := \{p \in \mathbb{P}^n \ \mid \ F(p) = \circ \ \ ; \ \ \forall F \in T\}$$

تعریف ۱۶.۲ فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{K}$ باشد. منظور از فضای تصویری روی V، مجموعه کلیه زیر فضاهای برداری یک بعدی از V است. که با $\mathbb{P}(V)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۱۷.۲ اگر V یک فضای برداری $(n+1)$ بعدی روی $\mathbb{K}$ باشد $(V \cong \mathbb{K}^{(n+1)})$ آنگاه $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$.

تعریف ۱۸.۲ فرض کنیم W یک زیر فضای $(k+1)$ بعدی از فضای $(n+1)$ بعدی V روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. تابع شمول $W \hookrightarrow V$ القا کننده نگاشت $\mathbb{P}(W) \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ است. تصویر $\mathbb{P}(W)$ توسط این نگاشت را زیر فضای خطی [6] k بعدی (یا یک $k-$صفحه) از $\mathbb{P}(V)$ گوئیم.

[5] coordinate ring
[6] linear subspace

تذکر ۱۹.۲ یک زیر فضای خطی k بعدی از $\mathbb{P}^n$ را می‌توان مجموعه صفرهای $(n-k)$ چندجمله‌ای خطی همگن در نظر گرفت، در نتیجه یک زیر چندگونای $\mathbb{P}^n$ است. عکس مطلب فوق نیز برقرار است یعنی اگر X یک چندگونای تصویری به صورت $X = V(f_1, \ldots, f_r)$ باشد که $i = 1, \ldots, r$, $f_i \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ چندجمله‌ایهای خطی باشند. آنگاه X یک زیر فضای خطی $\mathbb{P}^n$ است.

تعریف ۲۰.۲ مجموعه $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ را یک مجموعه جبری تصویری [۷] گویند هر گاه زیر مجموعه T از عناصر همگن $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ موجود باشد که $Y = V(T)$.

در اینجا نیز گزاره‌ای شبیه گزاره ۵.۲ برای مجموعه‌های جبری تصویری وجود دارد و به همان ترتیب توپولوژی زاریسکی روی $\mathbb{P}^n$ را تعریف می‌کنیم. یعنی مجموعه‌های بسته را مجموعه‌های جبری تصویری می‌گیریم.

تعریف ۲۱.۲ منظور از **چندگونای جبری تصویری** (یا به طور خلاصه چندگونای تصویری) عبارت است از یک زیر مجموعه بسته تحویل‌ناپذیر از $\mathbb{P}^n$ در توپولوژی زاریسکی.

تعریف ۲۲.۲ (**چندگونای چنبری** [۸]) فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان و $f_1, \ldots, f_m$ چندجمله‌ایهائی در $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ باشند. قرار می‌دهیم

$$X_0 = V_0(f_1, \ldots, f_n) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^n \mid f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0 \ , \ i = 1, \ldots, m\}$$

فرض کنیم X چندگونای تصویری شامل X_0 باشد. X را چندگونای چنبری تعریف شده به‌وسیله $f_1, \ldots, f_m$ می‌نامند.

تعریف ۲۳.۲ مجموعه جبری تصویری X را در نظر بگیرید. ایده‌آل همگن X را که با $I(X)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$I(X) := \{F \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \mid F(p) = 0 \ , \ p \in X \ \& \ F \text{ همگن}\}$$

و در این صورت مختصات همگن حلقه‌ای [۹] X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(X) := \frac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{I(X)}$$

[۷] projective
[۸] toric variety
[۹] homogeneous coordinate ring

گزاره ۲۴.۲ مجموعه جبری مستوی (تصویری) X تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $I(X)$ اوّل باشد.
اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم X تحویل‌ناپذیر باشد. نشان می‌دهیم $I(X)$ اول است.
اگر $fg \in I(X)$ آن‌گاه داریم

$$X \subset V(fg) = V(f) \cup V(g) \Rightarrow X = (X \cap V(f)) \cup (X \cap V(g))$$

که $(X \cap V(g))$ و $(X \cap V(f))$ در X بسته هستند. پس بنا به تحول‌ناپذیری X داریم $X = (X \cap V(f))$ یا $X = (X \cap V(g))$ که نتیجه می‌شود $f \in I(X)$ یا $g \in I(X)$.
برعکس فرض کنیم P یک ایده‌آل اول باشد و فرض کنیم $V(P) = Y_۱ \cup Y_۲$ آنگاه $P = I(Y_۱) \cap I(Y_۲)$ بنابراین $P = I(Y_۱)$ یا $P = I(Y_۲)$ که در این‌صورت $V(P) = Y_۱$ یا $V(P) = Y_۲$. □

گزاره ۲۵.۲ هر مجموعه جبری مستوی (تصویری) را می‌توان به اجتماع مجزائی از مجموعه‌های جبری مستوی (تصویری) تحویل‌ناپذیر تجزیه کرد.
اثبات. ر.ک. به [۲۰] ص ۵ نتیجه ۱.۶. □

تذکر ۲۶.۲ به زیر مجموعه‌های تحویل‌ناپذیری که در تجزیه یک مجموعه جبری مستوی (تصویری) به مؤلفه‌های تحویل‌ناپذیر ظاهر می‌شوند، مؤلفه‌های تحویل‌ناپذیری مجموعه جبری مستوی (تصویری) می‌گوییم.

تعریف ۲۷.۲ چندگونای مستوی (تصویری) $Y \subset X$ را یک ابر رویه [۱۰] از X گویند هرگاه چندجمله‌ای (همگن) تحویل‌ناپذیر $f \in \mathbb{K}[x_۱, \ldots, x_n]$ ($f \in \mathbb{K}[x_۰, \ldots, x_n]$) موجود باشد به طوری‌که $Y = V(f)$. اگر این چندجمله‌ای خطی باشد به X ابرصفحه[۱۱] گویند.

می‌دانیم که $x_i \in \mathbb{K}[x_۰, \ldots, x_n]$ برای $i = ۰, \ldots, n$ پس $H_i := V(x_i)$ $(i = ۰, \ldots, n)$ یک ابر صفحه در $\mathbb{P}^n$ می‌باشد و $U_i := \mathbb{P}^n \setminus H_i$ $(i = ۰, \ldots, n)$ در $\mathbb{P}^n$ باز است.

گزاره ۲۸.۲ هر U_i در توپولوژی زاریسکی با $\mathbb{A}^n$ یکریخت است، همچنین خانوادهٔ $\{U_i\}_{i=۰}^n$ یک پوشش باز برای $\mathbb{P}^n$ است.
اثبات. ر.ک. [۲۰] ص ۱۰ قضیه ۲.۲ و نتیجه ۲.۳. □

قرارداد ۲۹.۲ $\{U_i\}_{i=۰}^n$ را پوشش باز استاندارد برای $\mathbb{P}^n$ می‌گوئیم.

---
[۱۰] hypersurface
[۱۱] hyperplane

۲–۲ توابع منظم و ریختها

۲–۲–۱ توابع منظم و گویا

تعریف ۳۰.۲ فرض کنیم X یک چندگونای مستوی و p نقطه‌ای از آن باشد. تابع $f : X \to \mathbb{K}$ را در نقطه p منظم[۱۲] گویند هر گاه در یک همسایگی باز V از نقطه‌p، بتوان f را به صورت کسر g/h نوشت که g و h چندجمله‌ایهائی در $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ بوده و h روی V ناصفر باشد. تابع f را منظم روی X گویند هر گاه در هر نقطه از X منظم باشد.

مجموعه توابع منظم روی چندگونای مستوی X را با $O(X)$ نمایش می‌دهیم، که دارای ساختار حلقه‌ای است.

لم ۳۱.۲ حلقه توابع منظم روی چندگونای مستوی X با $A(X)$ یکریخت است.

اثبات. ر.ک. به [۲۰] ص ۱۷ قضیه ۳.۲. □

تعریف ۳۲.۲ اگر X یک چندگونای مستوی باشد، طبق ۲۴.۲، $A(X)$ یک حوزه صحیح است. میدان کسرهای $A(X)$ را که با $K(X)$ نمایش می‌دهند میدان تابع[۱۳] X گوئیم. به اعضای $K(X)$ توابع گویا[۱۴] روی X گویند.

تعریف ۳۳.۲ تابع $f : X \to \mathbb{K}$ روی چندگونای تصویری X را در نظر بگیرید. گوئیم f در نقطه p از X منظم است هر گاه همسایگی باز U از X و چندجمله‌ایهای همگن و هم درجه G و H در $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ موجود باشند به طوری‌که H روی U ناصفر باشد و $f = G/H$. f روی X منظم است هر گاه در هر نقطه از آن منظم باشد.

تعریف ۳۴.۲ میدان تابعی چندگونای تصویری X را با $K(X)$ نمایش داده و به دو صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$K(X) := \{F/G \;\mid\; f, g \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \;\&\; G, F \in S(X) \text{ هم درجه } \;\&\; g \neq 0\}$$

یا می‌توان $K(X)$ را $K(U)$ تعریف کرد که در آن U یک زیر مجموعه باز مستوی از X است. با توجه به قضیه زیر این دو تعریف سازگار هستند. به اعضای $K(X)$ توابع گویا گوئیم.

---

[۱۲] regular
[۱۳] function field
[۱۴] rational function

قضیه ۳۵.۲ اگر X یک چندگونای تصویری و $f \in K(X)$ یک تابع منظم باشد. یک زیر مجموعه باز U از X وجود دارد که f روی آن تعریف شده است و نگاشت $p \in U \ , \ p \longmapsto f(p)$ یک تابع منظم روی U می‌باشد و برعکس. یعنی هر تابع منظم روی یک زیر مجموعه باز X، از یک تابع منظم یکتا در $K(X)$ به‌دست می آید.

اثبات. ر.ک. [۲۶] ص ۱۰۵ گزاره ۶.۱۳. □

۲–۲–۲ ریخت

قرارداد ۳۶.۲ در ادامه کار هر گاه از کلمه چندگونا یا مجموعه جبری استفاده کردیم و تصویری یا مستوی بودن آن را مشخص نکردیم منظور هر دو نوع چندگونا یا مجموعه جبری است.

تعریف ۳۷.۲ منظور از ریخت[۱۵] از مجموعه جبری X به $\mathbb{A}^n$ نگاشتی می‌باشد که با یک n–تائی از توابع منظم روی X تعریف شده باشد. منظور از یک ریخت از X به مجموعه جبری مستوی $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ ریخت از X به $\mathbb{A}^n$ است که تصویر آن در Y قرار گرفته است.

تعریف ۳۸.۲ نگاشت $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ (از مجموعه جبری X به $\mathbb{P}^n$) را ریخت گویند هر گاه φ پیوسته بوده و برای مجموعه‌های باز مستوی استاندارد $(i = 0, \dots, n) \quad U_i \simeq \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$. تحدید φ به $\varphi^{-1}(U_i)$ ریخت باشد.

تعریف ۳۹.۲ ریخت $\varphi : X \longrightarrow Y$ از مجموعه‌های جبری را **یکریختی** گویند هر گاه ریخت $\psi : Y \longrightarrow X$ موجود باشد که $\varphi o \psi = id_Y$ و $\psi o \varphi = id_X$.

لم ۴۰.۲ نمودار[۱۶] یک ریخت $(\{(x, \varphi(x)) \ | \ x \in X\})$ در $X \times Y$ بسته است.

اثبات. ر.ک. به [۳۳] ص ۴۵ لم ۱. □

گزاره ۴۱.۲ نگاشت $\varphi : X \subseteq \mathbb{A}^n \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{A}^m$ ریخت است اگر و تنها اگر برای هر $p \in X$ چندجمله‌ایهای $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \quad (i = 1, \dots, m)$ موجود باشند که

$$\varphi(p) = (f_1(p), \dots, f_m(p))$$

اثبات. ر.ک. به[۲۶] ص ۵۱. □

[۱۵] morphism

[۱۶] graph

گزاره ۴۲.۲ نگاشت $\varphi : X \subseteq \mathbb{P}^n \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{P}^m$ ریخت است اگر وتنها اگر برای هر $p_\circ \in X$ چندجمله‌ایهای همگن وهم درجه $F_i \in \mathbb{K}[x_\circ, \ldots, x_n] (i = \circ, \ldots, m)$ موجود باشند که

$$\varphi(p) = (F_\circ(p), F_\text{۱}(p), \ldots, F_m(p))$$

به ازای هر p در یک همسایگی $U \subseteq X$ از $p_\circ$.

اثبات. ر.ک. به [۲٦] ص ۱۰٦ گزاره ٦.۱۷. □

تعریف ۴۳.۲ (نگاشت متناهی)

فرض کنیم X و Y مجموعه‌های جبری مستوی و $\varphi : X \longrightarrow Y$ یک ریخت باشد. φ را یک نگاشت متناهی گویند هر گاه $A(X)$ یک $A(Y)$–مدول متناهی باشد.

تعریف ۴۴.۲ فرض کنیم X و Y دو مجموعه جبری تصویری و $\varphi : X \longrightarrow Y$ یک ریخت باشد. φ را نگاشت متناهی گویند هر گاه به ازای هر باز $V \subset Y$. $U = \varphi^{-1}(V)$ مستوی باشد و نگاشت $\varphi_{|_U} : U \longrightarrow V$ از مجموعه‌های جبری مستوی متناهی باشد.

گزاره ۴۵.۲ در تعریف ۴۴.۲ کافی است شرایط تعریف به ازای یک زیر مجموعه باز از Y برقرار باشد.

اثبات. ر.ک. به [۲٦] ص ۱۲٦ گزاره ۸.۲. □

تعریف ۴٦.۲ فرض کنیم $\varphi : X \longrightarrow Y$ یک ریخت از مجموعه‌های جبری و باشد $p \in Y$. $\varphi^{-1}(p)$ را تار[۱۷] φ در نقطه p می‌نامیم.

قضیه ۴۷.۲ هر نگاشت متناهی دارای تار متناهی است.

اثبات. ر.ک. به [۲٦] ص ۱۲۷ قضیه ۸.۵. □

لم ۴۸.۲ فرض کنیم $\pi_\circ : X_\circ \longrightarrow Y_\circ$ یک ریخت از مجموعه‌های جبری تصویری باشد. فرض کنیم $Y \subset Y_\circ$ زیر مجموعه باز دلخواه و $X = (\pi_\circ{}^{-1})(Y)$ تصویر معکوس Y و π تحدید $\pi_\circ$ به X باشد. اگر تارهای π متناهی باشند، آنگاه π یک نگاشت متناهی است.

اثبات. ر.ک. به [۱۹] ص ۱۷۸ لم ۱۴.۸. □

تعریف ۴۹.۲ (بعد)

بعد یک چندگونای X برابر است با درجه تعالی [۱۸] $K(X)$ روی $\mathbb{K}$. برای مجموعه جبری تحویل‌پذیر X بعد آن را به صورت ماکزیمم ابعاد مؤلفه‌های آن تعریف می‌کنیم.

---

[۱۷] fibre

[۱۸] transendence degree

نکته ۵۰.۲ اگر X یک چندگونا و $U \subset X$ زیر مجموعه بازی از X باشد، آنگاه $K(X) = K(U)$ و در نتیجه $dim(X) = dim(U)$.

تعریف ۵۱.۲ اگر V یک فضای برداری $(k+1)$ بعدی روی $\mathbb{K}$ باشد، بعد $\mathbb{P}(V)$ را k تعریف می‌کنیم.

قضیه ۵۲.۲ $Y \subset X$ یک ابر رویه از X است اگر و تنها اگر $dim(Y) = dim(X) - 1$.

اثبات. ر.ک. به [۳۳] ص ۵۵ قضایای ۲ و ۴. □

نکته ۵۳.۲ چندگونای X متناهی است اگر و تنها اگر $dim(X) = 0$.

اثبات. کافیست نکته را برای حالت مستوی اثبات کنیم.

اگر X فقط شامل یک نقطه باشد به وضوح $dim(X) = 0$ و برای X متناهی نیز حکم به دست می‌آید. برعکس فرض کنید $dim(X) = 0$ و $t_1, \cdots, t_n$ توابع مختصاتی X در $\mathbb{A}^n$ باشند. چون $t_i \in K(X)$ و بنا به فرض $dim(X) = 0$، t_i روی $\mathbb{K}$ جبری است. پس چندجمله‌ای یک متغیره F روی $\mathbb{K}$ وجود دارد که $F(t_i) = 0$ و چون تعداد ریشه‌های F متناهی است. پس تعداد متناهی نقطه دارای مختصات t_i است. □

نتیجه ۵۴.۲ از قضیه ۴۷.۲ و لم ۵۳.۲ نتیجه می‌شود که هر تار از یک نگاشت متناهی از بعد صفر است.

گزاره ۵۵.۲ برای چندگونای X داریم : $dim(X) = dim(\overline{X})$ که در آن $\overline{X}$ بستار X در توپولوژی زاریسکی است.

اثبات. ر.ک. به [۱۹] ص ۱۳۴. □

قضیه ۵۶.۲ اگر X و Y دو چندگونا باشند آنگاه $dim(X \times Y) = dim(X) + dim(Y)$.

اثبات. ر.ک. به [۳۳] ص ۵۴. □

گزاره ۵۷.۲ اگر $X \subseteq \mathbb{P}^n$ یک مجموعه جبری از بعد k و $Y \cong \mathbb{P}^l$ هر فضای خطی (تعریف ۱۸.۲) از بعد $l \geq n-k$ باشد، آنگاه Y بایستی X را قطع کند.

اثبات. ر.ک. به [۱۹] ص ۱۳۵ گزاره ۱۱.۴. □

قضیه ۵۸.۲ اگر $Y \subset X$ (دو مجموعه جبری) آنگاه $dim(Y) \leq dim(X)$. همچنین اگر X یک چندگونا و Y در X بسته و $dim(Y) = dim(X)$ آنگاه $X = Y$.

اثبات. ر.ک. به [۳۳] ص ۵۴ قضیه ۱. □

تعریف ۵۹.۲ فرض کنیم $Y \subset X$ دو چندگونا باشند منظور از هم‌بعد[۱۹] Y در X عبارت است از

$codim(Y) := dim(X) - dim(Y)$

[۱۹] codimension