چکیده

در این پایان نامه نقش حساب دقت متناهی و غیر نرمالی ماتریس‌های ضرائب و ماتریس‌های تکرار در واگرا شدن و یا رسیدن به جواب غلط در حین بکارگیری روش‌های تکراری پایه‌ای تحت فرمول $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$,$x^{(0)}$ که برای حل دستگاه $Ax = b$ بکار گرفته می‌شوند بررسی خواهد شد. به علاوه تاثیر پیش‌شرطی سازی بر روی ماتریس‌های اولیه به منظور کاهش عددشرطی ماتریس ضرایب و همچنین کاهش شعاع طیفی ماتریس تکرار در بهبود و توانمندسازی روش‌های تکراری پایه‌ای بررسی خواهد شد.

کلمات کلیدی:

غیرنرمالی، روش تکراری پایه‌ای، حساب با دقت متناهی، ناپایداری طیفی، خروج از نرمالی، پیش‌شرطی سازی.

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

مقدمه

نرمال بودن به معنای داشتن خاصیت جابجایی $AA^H = A^HA$ یک ویژگی ایده‌آل برای ماتریس‌ها می‌باشد. به تعبیر دیگر ماتریس A نرمال است اگر دارای یک مجموعهٔ متعامد از بردارهای ویژه باشد. در جبرخطی روشهای متعدد موفق و قابل اعتماد برای حل دستگاه معادلات خطی در شرایطی که ماتریس ضرایب A نرمال یاشد وجود دارد. همین موضوع در مورد تقریب مقادیر ویژه ماتریس‌ها در شرایطی که ماتریس A نرمال باشد برقرار است. این در حالی است که همهٔ ماتریس‌های بدست آمده از مسائل فیزیکی لزوماً نرمال نبوده که این به نوبهٔ خود مشکلات فراوانی بر سر راه متخصصینی که قصد طراحی و پیاده‌سازی الگوریتم‌های مربوطه را دارند به وجود آورده است. عدم آگاهی و اطمینان از نرمال بودن و یا نبودن ماتریس‌ها در هر یک از مسائل مقادیرویژه و مسائل حل دستگاه معادلات خطی می‌تواند منجر به نتایج غلط و یا واگرایی روشها گردد که در پروژه‌های بزرگ می‌تواند خسارات جبران ناپذیری را داشته باشد. Henrici(۱۹۶۲)[۱۷]، Sluis(۱۹۷۵)[۳۵] Chtaelin(۱۹۸۸،۱۹۹۳)[۹][۸] به بررسی و مطالعهٔ مشکلات غیرنرمالی پرداخته‌اند.

چون تحلیل همگرایی روش‌های تکراری نیازمند دانش کافی در جبر خطی عددی است بنابراین در فصل اول به معرفی یکی از مهم‌ترین مباحث جبرخطی یعنی ماتریس و تبدیلات خطی بین فضاهای برداری می‌پردازیم و نمادها و قضایای مهم لازم در این پایان‌نامه را معرفی می‌کنیم. در فصل دوم روش‌های تکراری پایه‌ای را برای حل دستگاه معادلات خطی معرفی می‌کنیم روشی که اولین نمونه‌های استفادهٔ آن به Gauss، Jacobi، Seide و Nekrason برمی‌گردد. اما مطالعهٔ اصولی و دقیق روشهای تکراری حل دستگاههای خطی بزرگ، بعد از ظهور کامپیوترهای الکترونیکی رقمی که مقارن با جنگ جهانی دوم بود انجام شد. در فصل سوم به بررسی رفتار و عملکرد ماتریس‌های غیرنرمال می‌پردازیم. یکی از این رفتارهای اساسی، ناپایداری طیفی است که نقش اساسی را در محاسبات عددی ماتریس بازی خواهد کرد. در Braconnier،Chatelin،Dunych(۱۹۹۵)[۴] مسائلی از High Technology و در Reddy(۱۹۹۱)[۲۷] و Kerner(۱۹۸۹)[۲۵] مسائلی از فیزیک نظری مطالعه گردیده و نشان داده شده است که خروج از نرمالیتی می‌تواند بسته به یک پارامتر مشخص به طور نمایی رشد کند. در فصل چهارم، به بررسی تأثیر متقابل دو عامل غیرنرمالی و حساب دقت متناهی بر کیفیت همگرایی روش‌های

تکراری $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$,$x^{(0)}$ می‌پردازیم و به توسط آزمایش‌های عددی نشان می‌دهیم که در حساب با دقت متناهی، غیرنرمالی، شرط همگرایی روش‌های تکراری را تحت تأثیر قرار می‌دهد. برای رفع و یا دست کم کاهش این مشکل از ابزار پیش‌شرطی سازی کمک می‌گیریم، ابزاری که تحت شرایط مناسب با انتخاب یک پیش‌شرط کنندهٔ خوب، کاهش عدد شرطی ماتریس ضرایب و همچنین کاهش شعاع طیفی ماتریس تکرار را در پی خواهد داشت و در پایان به مقایسهٔ اندازهٔ غیرنرمالی ماتریس‌های ضرایب با ساختار ویژه (خاص) و ماتریس تکرار روش تکرار ژاکوبی و گاوس-سیدل می‌پردازیم.

فصل ۱

تئوری ماتریس و جبر خطی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بررسی مطالبی می‌پردازیم که در مباحث بعدی به آن نیازمندیم. نمادهای استفاده شده در این پایان نامه معرفی خواهند شد و بعضی از قضایا و تعاریف مهم و اساسی قابل استفاده در این پایان نامه را ارائه خواهیم کرد. چون تحلیل همگرائی روش‌های تکراری نیازمند دانش کافی در جبر خطی عددی است بنابراین نیازمند معرفی یکی از مهم‌ترین مباحث جبر خطی یعنی ماتریس و تبدیلات خطی بین فضاهای برداری هستیم

۲.۱ ماتریس‌ها

به منظور حفظ عمومیت، تمامی فضاهای مورد بحث در این پایان‌نامه را مختلط فرض می‌کنیم مگر آنکه طور دیگری معرفی گردند.

یک ماتریس مختلط A آرایه‌ای با $m \times n$ عضو مختلط

$$a_{ij} \quad , \ i = ۱, \cdots , m \, , \quad j = ۱, \cdots , n \, .$$

مجموعه همه ماتریسهای $m \times n$ یک فضای برداری مختلط را تشکیل می‌دهدکه با $\mathbb{C}^{m \times n}$ نمایش می‌شود. هرگاه $n = ۱$، آنگاه $A \in \mathbb{C}^{m \times ۱}$ یک بردار ستونی می‌باشد و هرگاه $m = ۱$ آنگاه ماتریس $A \in \mathbb{C}^{۱ \times n}$ یک بردار سطری نامیده می‌شود.

عملگرهای اصلی که روی ماتریسها انجام می‌شود بدین شرح است:

- جمع دو ماتریس: $C = A + B$ که $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$ و $C = (c_{ij})$ ماتریس‌هائی با اندازه $m \times n$ هستند و

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ , \quad i = ۱, ۲, \cdots , m \ , \quad j = ۱, ۲, \cdots , n.$$

- ضرب عدد در ماتریس: $C = \alpha A$ که

$$c_{ij} = \alpha a_{ij} \ , \quad i = ۱, ۲, \cdots, m \ , \quad j = ۱, ۲, \cdots, n.$$

- ضرب دو ماتریس: $C = AB$ که $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ، $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$ ، $C \in \mathbb{C}^{m\times p}$ و

$$c_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

ترانهاده[۱] ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ماتریس $C \in \mathbb{C}^{n\times m}$ است به طوری که

$$c_{ij} = a_{ji}, \quad i = ۱, \cdots, n, \quad j = ۱, \cdots, m.$$

و با A^T نمایش داده میشود. ترانهاده مزدوج ماتریس $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ نیز دارای تعریف زیر است:

$$A^H = \overline{A}^T = \overline{A^T}.$$

۱.۲.۱ انواع ماتریس‌ها

انتخاب روشی برای حل مسائل جبر خطی عددی اغلب به ساختار ماتریس وابسته است. یکی از مشخصه‌های بسیار مهم برخی ماتریس‌ها خاصیت تقارن آنها است. در زیر برخی از دیگر ساختارهای ویژهٔ ماتریس‌ها آمده است:

- ماتریس متقارن:[۲]

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Longrightarrow A^T = A$$

- ماتریس هرمیتی[۳]:

$$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n} \Longrightarrow A^H = A$$

- ماتریس پاد[۴]متقارن:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Longrightarrow A^T = -A$$

- ماتریس پادهرمیتی:

$$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n} \Longrightarrow A^H = -A$$

[۱] Transpose
[۲] Symmetric
[۳] Hermitian
[۴] Skew

برخی دیگر از ماتریس‌های با ساختار خاص وجود دارند به گونه‌ای که برای بعضی اهداف محاسباتی مناسب‌اند و نقش مهّمی را در تحلیل‌های عددی و کاربردهای محاسباتی بازی می‌کنند از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ماتریس قطری[5]:

$$\forall i \neq j, \quad a_{ij} = ۰$$

با نمایش

$$A = diag(a_{۱۱}, a_{۲۲}, \cdots, a_{nn}).$$

- ماتریس بالامثلثی:

$$\forall i > j, \quad a_{ij} = ۰$$

- ماتریس پائین مثلثی:

$$\forall i < j, \quad a_{ij} = ۰$$

- ماتریس بالا دوقطری:

$$\forall j \neq i \text{ یا } j \neq i + ۱, \quad a_{ij} = ۰$$

- ماتریس پائین دوقطری:

$$\forall j \neq i \text{ یا } j \neq i - ۱, \quad a_{ij} = ۰$$

- ماتریس سه قطری:

$$\forall |j - i| > ۱, \quad a_{ij} = ۰$$

با نمایش

$$A = tridiag(a_{i,i-۱}, a_{i,i}, a_{i,i+۱}).$$

- ماتریس قطری بلوکی: ماتریسی قطری که هر عنصر قطری آن با یک ماتریس مربعی جایگزین شود. با نمایش

$$A = diag(A_{۱۱}, A_{۲۲}, \cdots, A_{nn}).$$

- ماتریس تنک[6]: ماتریس A را تنک گویند هرگاه اکثر مولفه‌های آن صفر باشد.

[5] Diagonal
[6] Sparse

- ماتریس چگال[۷]: ماتریس A را پر گویند هرگاه اکثر مولفه‌های آن ناصفر باشد.

- ماتریس متعامد[۸]: ماتریس مربع $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را متعامد گویند هرگاه

$$A^T = A^{-۱} \quad \text{یا} \quad AA^T = A^T A = I$$

- ماتریس یکانی[۹]: ماتریس مربع A با درایه‌های مختلط را یکانی نامند هرگاه $A^{-۱} = A^H$.

- ماتریس قطر غالب[۱۰] ضعیف[۱۱]: ماتریس مربع A قطر غالب ضعیف سطری است اگر برای هر i

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

اگر در رابطهٔ بالا علامت $\geq$ به $>$ تبدیل شود آنگاه ماتریس را اکیداً قطر غالب سطری گویند. ماتریس قطر غالب ستونی نیز دارای تعریف مشابهی می‌باشد

- ماتریس معین مثبت[۱۲]: ماتریس متقارن A معین مثبت است اگر به ازای هر بردار غیر صفر x،

$$x^T Ax > ۰$$

فرض کنیم $x = (x_۱, x_۲, \cdots, x_n)^T$ سپس

$$x^T Ax = \sum_{i,j=۱}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

شکل درجه دومی متناظر با A می‌باشد

مثال ۱.۱. *اگر $A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix}$ آنگاه شکل درجه دومی A بدین صورت است.*

$$x^T Ax = \begin{pmatrix} x_۱ & x_۲ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}$$

$$= (۲x_۱ + x_۲, x_۱ + ۵x_۲) \begin{pmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{pmatrix}$$

[۷] Dense
[۸] Orthogonal
[۹] Unitary
[۱۰] Diagonal dominant
[۱۱] Weakly
[۱۲] Positive definite

$$= ۲x_۱^۲ + ۲x_۱x_۲ + ۵x_۲^۲$$
$$= ۲\left(x_۱^۲ + x_۱x_۲ + \frac{۱}{۴}x_۲^۲\right) + \frac{۹}{۲}x_۲^۲$$
$$= ۲\left(x_۱ + \frac{۱}{۲}x_۲\right)^۲ + \frac{۹}{۲}x_۲^۲ > ۰$$

ماتریس متقارن A شبه معین مثبت است اگر $x^TAx \geq ۰$.

برخی ویژگی و مشخصه‌های ماتریس های معین مثبت

۱. ماتریس A معین مثبت است اگر و تنها اگر همهٔ مقادیرویژهٔ آن مثبت باشند.

توجه کنید در مثال۱.۱ مقادیرویژه آن ۱٫۶۹۷۲ و ۵٫۳۰۲۸ هستند.

۲. مجموع دو ماتریس معین مثبت، معین مثبت است

۳. اگر $A = (a_{ij})$ معین مثبت باشد، آنگاه برای هر i، $a_{ii} > ۰$.

۴. اگر $A = (a_{ij})$ معین مثبت باشد سپس بزرگترین عضو در کل ماتریس باید در روی قطر باشد.

توجه کنید که شرایط (۳) و(۴) شرایطی لازم برای اینکه یک ماتریس متقارن، معین مثبت باشد. این شرایط می‌تواند تست ابتدائی ماتریس معین مثبت باشد. برای مثال ماتریس‌های

$$A = \begin{pmatrix} ۴ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} ۲۰ & ۱۲ & ۲۵ \\ ۱۲ & ۱۵ & ۲ \\ ۲۵ & ۲ & ۵ \end{pmatrix}$$

نمی‌توانند معین مثبت باشند، چون در ماتریس A یکی از عناصر قطری صفر است و در B بزرگترین عنصر ماتریس یعنی ۲۵ روی قطر نیست.

۳.۱ بردارهای متعامد

۱.۳.۱ فضاهای ضرب داخلی

ضرب داخلی در یک فضای برداری حقیقی(یا مختلط) V تابعی است که هر زوج از بردارهای x, y را به یک عدد حقیقی (یا مختلط) $\langle x, y\rangle$ تصویر می‌کند بطوریکه در شرایط زیر صدق کنند:

۱. $\langle x, x\rangle \geq ۰$ و $\langle x, x\rangle = ۰$، اگر و فقط اگر $x = ۰$ ؛

۲. به ازای هر α ، $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ ؛

۳. $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x+z\rangle$ ؛

۴. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$، (این ویژگی برای فضای حقیقی بصورت $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ می‌باشد).

تعریف ۱.۱. ضرب داخلی دو بردار x, y بدین صورت است:

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} x^T y & x, y \in \mathbb{R}^{n\times ۱}, \\ x^H y & x, y \in \mathbb{C}^{n\times ۱}. \end{cases}$$

که در آن x^H ترانهاده مزدوج x می‌باشد.

تعریف ۲.۱. دو بردار x و y را **متعامد** گوئیم و با نماد $x \perp y$ ، نمایش می‌دهیم هرگاه $\langle x, y\rangle = ۰$.

تعریف ۳.۱. مجموعه بردارهای $B = \{u_۱, u_۲, \cdots, u_n\}$ **متعامد یکه** است
هرگاه به ازای هر i، $|u_i| = ۱$ و به ازای هر $i \neq j$ داشته باشیم $u_i \perp u_j$.
به عبارت دیگر

$$\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} ۱ & i = j, \\ ۰ & i \neq j. \end{cases}$$

- هر مجموعه متعامد یکه از بردارها مستقل خطی است.
یعنی برای مجموعهٔ B در تعریف ۳.۱ چنانچه $\sum_{j=۱}^{n} c_j u_j = ۰$ آنگاه

$$c_۱ = c_۲ = \ldots = c_n = ۰$$

- هر مجموعه متعامد یکه با n بردار یک پایه برای فضای n بعدی V است.

۴.۱ ماتریس‌های مربع و مقادیرویژه

۱.۴.۱ ماتریس‌های مربع

یک ماتریس مربعی است اگر دارای تعداد مساوی سطر و ستون باشد؛یک ماتریس مربعی مهم ماتریس همانی $I = \{\delta_{ij}\}_{i,j=۱,\cdots,n}$ می‌باشد ، که در آن

$$\delta_{ij} = \begin{cases} ۱ & \forall i = j, \\ ۰ & \forall i \neq j. \end{cases}$$

ماتریس همانی $I_n = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به ازای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ با اندازه n در مساوی $AI = IA = A$ صدق می کند

معکوس یک ماتریس

ماتریس مربع A از مرتبهٔ n را وارون پذیر گویند هرگاه ماتریسی مانند B چنان یافت شود که

$$AB = BA = I_n.$$

در این صورت B را وارون A نامیده و با $A^{-۱}$ نشان می‌دهند.

دترمینان یک ماتریس

دترمینان یک ماتریس به چندین روش قابل محاسبه است، ساده‌ترین آن تعریف بازگشتی زیر است؛ دترمینان یک ماتریس ۱×۱ ، $A = (a)$ برابر عدد a است. اکنون دترمینان یک ماتریس $n \times n$ بدین وسیله تعیین می‌شود:

$$\det(A) = \sum_{j=۱}^{n} (-۱)^{j+۱} a_{۱j} \det(A_{۱j}),$$

که $A_{۱j}$ یک ماتریس $(n-۱) \times (n-۱)$ که با حذف سطر اول وستون jام A بدست می‌آید. این روش برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس A با استفاده از سطر اول A بود. دترمینان A می‌تواند به طور مشابه با استفاده از سطرها و یا ستونهای دلخواه A محاسبه گردد. یک ماتریس را منفرد گوئیم وقتی $det(A) = ۰$ ؛ در غیراینصورت آن را نامنفرد گوئیم.

در زیر مشخصه‌هائی ساده را برای دترمینان معرفی می‌کنیم:

$$\det(AB) = \det(BA),$$

$$\det\left(A^T\right) = \det(A),$$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A),$$

$$\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)},$$

$$\det(I) = ۱.$$

۵.۱ نرم بردار و ماتریس

۱.۵.۱ نرم برداری

مفهوم اندازه و فاصله در یک فضای برداری با استفاده از ایده نرم قابل تعریف است. نرم تابعی حقیقی مقدار به صورت $\|.\| : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد که مقدار حقیقی طول یک بردار را تعیین می‌کند. یک نرم باید در شرایط زیر

صدق کند:

۱. به ازای هر بردار $x \in \mathbb{C}$، $\|x\| \geq 0$؛

۲. $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

۳. به ازای هر $x, y \in \mathbb{C}^n$ ، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۴. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $x \in \mathbb{C}^n$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

رده مهمی از نرم‌های برداری، که موارد استفادهٔ فراوانی دارند شامل موارد زیر است:

۱.

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

که آن را نرم-یک می‌نامند.

۲.

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} {x_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

که آن را نرم-دو (یا نرم اقلیدسی) می‌نامند. نرم اقلیدسی یک بردار مختلط از ضرب داخلی زیر بدست می‌آید:

$$\|x\|_2 = < x, x >^{\frac{1}{2}} .$$

۳.

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|,$$

که آنرا نرم ماکزیمم یا نرم بی‌نهایت می‌نامند.

قضیّه ۱.۱. [۲۶] *فرض کنید $\|.\|$ یک نرم دلخواه در $\mathbb{R}^n$(یا در $\mathbb{C}^n$) و P ماتریسی نامنفرد حقیقی (یا مختلط) $n \times n$ باشد. آنگاه $\|x\|' = \|Px\|$ نرمی است که در $\mathbb{R}^n$(یا در $\mathbb{C}^n$) تعریف می‌شود.*

ویژگی هم ارزی در نرم های برداری

همه نرم‌های برداری در نامساوی زیر که α و β ثابت‌هایی مثبت‌اند هم ارزند

$$\alpha\|x\|_\mu \leq \|x\|_\nu \leq \beta\|x\|_\mu.$$

برای نرم‌های $۱, ۲, \infty$، ثابت‌های α و β به صورت زیر می‌باشند:

$$\|x\|_۲ \leq \|x\|_۱ \leq \sqrt{n}\|x\|_۲,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_۲ \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_۱ \leq n\|x\|_\infty.$$

۲.۵.۱ نرم ماتریسی

تعریف ۴.۱. یک نرم ماتریسی بر مجموعهٔ تمام ماتریس‌های $n \times n$ مختلط یک تابع حقیقی مقدار مانند $\|.\|$ است که بر این مجموعه تعریف شده است و به ازای تمام ماتریس‌های $n \times n$، A و B و تمام اعداد حقیقی α در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $\|A\| \geq ۰$؛

۲. $\|A\| = ۰$ اگر وفقط اگر $A = ۰$؛

۳. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$؛

۴. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

تعریف ۵.۱. فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$، $\|.\|_m$ یک نرم برداری بر $\mathbb{C}^m$، $\|.\|_n$ یک نرم برداری بر $\mathbb{C}^n$ باشد نرم القاشده[۱۳] (نرم وابسته[۱۴]) در $\mathbb{C}^{m\times n}$ از نرم‌های برداری $\mathbb{C}^m$ و $\mathbb{C}^n$ با تعریف زیر بدست می‌آید:

$$\|A\|_{mn} = \max_{۰\neq x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n}.$$

[۱۳] Induced
[۱۴] Subordinate

فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$ و $x \in \mathbb{C}^n$ آنگاه می‌توان نشان دادکه [۲۱]

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

$$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$$

از دو ویژگی بالا می‌توان نتیجه گرفت که نرم‌های القاشده در ویژگی زیر صدق می‌کنند:

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p\|B\|_p \ \ , \ \ p = ۱, ۲, \infty$$

نرمی ماتریسی را که در ویژگی بالا صدق کند نرم سازگار گوئیم. یکی از ویژگیهای نرم سازگار نتیجهٔ زیر است که

$$\|A^k\|_p \leq \|A\|_p^k.$$

اما باید توجه داشت که همهٔ نرم‌های ماتریس A در این ویژگی صدق نمی‌کنند. برای مثال اگر

$$\|A\|_\Delta = \max |a_{ij}|$$

یک نرم ماتریسی باشد برای $A = B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، آنگاه

$$\|AB\|_\Delta > \|A\|_\Delta\|B\|_\Delta.$$

نرم‌های ۱ و ۲ و ∞ ماتریسی را می‌توان به ترتیب به کمک روابط زیر بدست آورد:

$$\|A\|_۱ = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \quad (\text{نرم ماکزیمم مجموع ستون})$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad (\text{نرم ماکزیمم مجموع سطر})$$

$$\|A\|_۲ = \max_{x\neq ۰} \frac{\|Ax\|_۲}{\|x\|_۲} = \sqrt{\lambda_{max}\,(A^TA)}.$$

توجه کنید که مقادیرویژهٔ A^TA، حقیقی و نامنفی‌اند.

یکی از موارد مهم نرم ماتریسی که از نرم برداری استنتاج (القاء) نمی‌شود، نرم فروبنیوس[۱۵] است که برای $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ دارای تعریف زیر می‌باشد:

$$\|A\|_F = \left(\sum_i^m \sum_j^n |a_{ij}|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}.$$

[۱۵] Frobenius

اگر A ماتریسی مربعی باشد

$$n^{-\frac{1}{2}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le n^{\frac{1}{2}}\|A\|_2,$$

$$n^{-\frac{1}{2}}\|A\|_2 \le \|A\|_\infty \le n^{\frac{1}{2}}\|A\|_2,$$

$$n^{-1}\|A\|_\infty \le \|A\|_1 \le n\|A\|_\infty,$$

$$\|A\|_1 \le \|A\|_F \le n^{\frac{1}{2}}\|A\|_2.$$

طبق تعریف آمده در بخش ۱.۲.۱ ماتریس Q را یکانی گوئیم اگر $Q^HQ = QQ^H = I$. تعریف معادل دیگر این است که ستونهای آن در $\mathbb{C}^m$ پایه‌ای متعامد تشکیل دهند اگر $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ یک ماتریس یکانی و $x, y \in \mathbb{C}^m$ برداری دلخواه باشد، آنگاه داریم

$$(Qx)^H(Qy) = x^Hy,$$

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2,$$

$$\|Q\| = 1.$$

و همچنین در ضرب ماتریس دلخواه $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ با ماتریس یکانی $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ نرم-۲ و نرم فروبنیوس آن بدون تغییر است[۳۳] یعنی

$$\|QA\|_2 = \|A\|_2,$$

و

$$\|QA\|_F = \|A\|_F.$$

۶.۱ مقادیرویژه ماتریس

۱.۶.۱ تعاریف اولیه

فرض کنیم A یک ماتریس مربعی حقیقی یا مختلط از مرتبه n باشد. عدد مختلط λ مقدارویژه ماتریس مربعی A است اگر یک بردار غیر صفر u در $\mathbb{C}^n$ وجود داشته باشد بطوریکه $Au = \lambda u$. در این حالت، بردار u را بردارویژه راست متناظر با مقدارویژه λ گوئیم.

تعریف ۶.۱. عدد مختلط λ یک مقدارویژه ماتریس A است اگر و فقط اگر صفرهای چندجمله‌ای مشخصه $\pi(z)$ با تعریف زیر باشد:

$$\pi(z) = \det(zI - A).$$

چندجمله‌ای $\pi(z)$ دارای n صفر نه لزوماً متمایز در $\mathbb{C}$ است. مجموعه تمام این صفرها را طیف A نامیده و با $\sigma(A)$ نمایش داده می‌شود بدین شکل که

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \pi(\lambda) = 0\}.$$

اگر λ مقدارویژه $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ آنگاه $\overline{\lambda}$ یک مقدارویژه از A^H است. بردارویژه y از A^H متناظر با مقدارویژه $\overline{\lambda}$ بردارویژه چپ A نام دارد. مقدارویژه λ و بردارهای ویژه راست و چپ، $x, y \neq 0$ در روابط زیر صدق می‌کنند

$$Ax = \lambda x,$$

$$y^H A = \lambda y^H.$$

شعاع طیفی ماتریس A عددی حقیقی و نامنفی است با این تعریف:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}.$$

مجموع همه عناصر روی قطر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ اثر[16] ماتریس نام دارد یعنی

$$\boldsymbol{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

اگر $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ مقادیرویژه ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (نه لزوماً متمایز) باشند، آنگاه

$$\boldsymbol{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

و

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

۲.۶.۱ حدود و موقعیت مقادیرویژهٔ A

قضیّه ۲.۱. *(قضیهٔ گرشکورین[17])[۴۱] اگر A یک ماتریس $n \times n$ بوده و C_i دایره‌ای به مرکز a_{ii} و شعاع $r_i = \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ برای $i = 1, \ldots, n$ باشد. آنگاه مقادیرویژهٔ A در $C = \cup_{i=1}^{n} C_i$ قرار دارند.*

قضیّه ۳.۱. *[۲۶] فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ نرم $\|A\|_{A,\varepsilon}$ در $\mathbb{C}^n$ وجود دارد به گونه‌ای که*

$$\rho(A) \leq \|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

[16] Trace
[17] Gerschgorin